

بیلو میں آپ کو دوغلوں اور لہروں کے بارے میں کچھ لیکچر دینے جا رہا ہوں اور یہ کہ اس قسم کی حرکت دوغلی حرکت اور لہر کی حرکت یہ کیسی حرکت ہے ہم اس پر غور کرنے جا رہے ہیں اور ہم اسے ریاضی کے لحاظ سے کیسے بیان کرتے ہیں اور یہ کہاں ہوتا ہے حرکت کی ایک کلاس آتی ہے جسے پیریڈک موشن کہتے ہیں oscillatory motion

تو آئیے سمجھتے ہیں کہ م

تواتر حرکت کا کیا مطلب ہے م

تواتر حرکت ایک ایسی حرکت ہے جو اپنے آپ کو دہراتی ہے

تو آئیے سمجھتے ہیں کہ اگر کوئی ذرہ دائرے میں گھوم رہا ہے

تو اس کا کیا مطلب ہے

تو آئیے کہتے ہیں یہ یہاں سے شروع ہوا یہ ایک دائرے میں گھومتا ہے اور پھر اسے دہراتی رہتی ہے اور جب بھی یہ اس کے گرد جاتی ہے وہی حرکت کرتی ہے پھر یہ حرکت م

جز کا حساب لگانا چاہتا ہوں کیا ایسا لگتا ہے کہ اگر ذرہ ایک دائرے میں گھوم  $y$  جز یا  $x$  تواتر ہوتی ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ میں اس حرکت کے محور پر شروع ہوتا ہے  $x$  یہاں سے  $t$  کو وقت میں طے کرتا ہے  $t$  رہا ہے اور ہم یہ کہتے ہیں کہ یہ ایک فاصلہ تھیٹا کی  $t$  ہے اور اسی طرح  $r \cos$  کا  $t$  ہو اور یہ ہو گا اگر دائرے کا رداس تھیٹا  $x t$  محور پر اس کا ایک پروجیکشن ہوگا  $x t$  تو میں ایک پورا دائرہ مکمل کرتا ہے۔ ٹھیک ہے  $t$  ہونے والا ہے اور فرض کریں کہ یہ وقت کیپٹل  $r \sin$  کا  $t$  جزو تھیٹا  $y$  کا  $y$  اس حرکت

ابتدائی فاصلے سے اگر یہ اس نقطہ  $r$  کچھ فاصلے سے شروع ہوتا ہے  $x$  تو یہ کیپٹل ٹی باندھتے ہوئے واپس آتا ہے پھر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

ہے  $r$  سے شروع ہوتا ہے

تو یہ ایک خاص انداز میں بدل جاتا ہے اور جب یہ اوپری نقطہ پر پہنچتا ہے جس پر میں نمبر کر رہا ہوں دو یہ نمبر ایک تھا نمبر ایک سے شروع ہوا اوپر جاتا ہے نمبر چار نمبر تین نمبر چار پر دوبارہ صفر ہو جاتا ہے  $r$  منفی ہونا شروع ہو جاتا ہے نمبر تین پر مائنس  $x$  نمبر دو پر پہنچتا ہے پھر اور نمبر ایک پر واپس ایسا کچھ کر سکتا ہے اور اگر یہ حرکت دہراتی جائے خود وقت کے ساتھ اس کا مطلب ہے کہ تھیٹا ٹی ایک چکر مکمل کرنے کے بعد بالکل ویسا ہی ہونے والا ہے

تو حرکت م

تواتر ہونے والی ہے لہذا اگر میں اسے احتیاط سے پلاٹ کروں

میں اسے ایک خاص طریقے سے  $x t$  ہے  $r i$  محور یہ ایک ہے ذرہ ارد گرد جا رہا ہے  $y$  اور  $x$  تو میں اسے یہاں دکھاتا ہوں یہاں پلاٹ کر رہا ہوں لیکن کوئی بھی عمومی فعل ہو سکتا ہے تاہم یہ خود کو بالکل اسی انداز میں دہراتا ہے پھر یہ ایک م

تواتر حرکت ہے جس میں وقت کا وقفہ یہاں سے اس مقام تک ہوتا ہے جب یہ دوبارہ پوائنٹ ون تک پہنچ جاتا ہے

تو آئیے میں یہ دکھاتا ہوں کہ یہ ایک پوائنٹ تھا یہ پوائنٹ ٹو تھا یہ پوائنٹ تھری زیادہ سے زیادہ یہ پوائنٹ چار ہے اور یہ پوائنٹ پانچ ہے جو دوبارہ پوائنٹ ون ہے اور تحریک خود کو دہراتی ہے اگر تھیٹا عام طور پر بہت من مانی طور پر تبدیل ہوتا ہے

تو حرکت م

تواتر نہیں ہوگی تاہم اگر یہ ایک خاص وقت کے بعد اپنے آپ کو دہرائے

تو یہ م

تواتر ہے ایسا ہو سکتا ہے کہ ذرہ گھوم جائے اور ایک بار دو دائرے مکمل کرنے کے بعد حرکت اپنے آپ کو دہراتی ہے

تو وقت کی مدت کا دورانیہ دو گنا بڑا ہوگا لیکن ہم نقطہ یہ ہے کہ اگر حرکت اپنے آپ کو دہراتی ہے اگر کوئی حرکت وقت کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے

تو اسے بالکل وہی ہونا چاہیے

تو حرکت وقتی مدت کے ساتھ م

تواتر ہوتی ہے اس کی دوسری مثالیں م

تقریباً 24 گھنٹے کے برابر ہونے کے بعد  $t$  کی مثالیں ہوں گی۔ زمین کی گردش اپنے محور پر دائیں طرف ہوتی ہے اور یہ حرکت  $m o$  تواتر

دہراتی ہے دوسری مثال چاند کا زمین کے گرد چکر لگانا ہے اور یہ حرکت تقریباً 29 دنوں کے بعد خود کو دہراتی ہے لہذا یہ ایک م

تواتر حرکت ہے جس کا وقت 20 وقت کی مدت 29 دن ہے یا زمین کے سورج کے گرد گھومنے کا دورانیہ تقریباً 365 دن یا ایک سال کے برابر ہوتا ہے اور یہ حرکت اتنے وقت کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے اس لیے یہ م

تواتر حرکت کی کچھ مثالیں ہیں اس لیے میں نے آپ کے لیے وقت کا دورانیہ بیان کیا ہے جو کہ ہم جو بھی یونٹ استعمال کرتے ہیں وہ نہیں ہے۔  $f$  متعلقہ مقدار تعدد ہونے جا رہی ہے اور تعدد کا کیا مطلب ہے فی یونٹ وقت میں حرکت کتنی بار اپنے آپ کو دہراتی ہے لہذا تعدد کو عام طور پر

بار حرکت  $t$  حرکت خود کو دہراتی ہے لہذا ظاہر ہے کہ فی یونٹ وقت میں ایک بار  $t$  ہے  $t$  سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ وقت میں ایک اوور صحیح ہوتی ہے لہذا یہ فریکوئنسی تیسری ہے ہم کسی چیز کی وضاحت بھی کرتے ہیں جسے کوئی فریکوئنسی کہا جاتا ہے اس کا مطلب کچھ دیر

دائیں ہے  $t$  اوور  $\pi$  ہے عام طور پر اومیگا اور یہ  $f$  2 بار  $\pi$  بعد واضح ہو جائے گا اور یہ 2

تو یہ کوئی فریکوئنسی کا وقت ہے سیکنڈوں میں دیا جا سکتا ہے پھر فریکوئنسی فی سیکنڈ ہونے والی ہے کبھی کبھی برٹز کے طور پر بھی لکھا جاتا ہے یا اس کا کیا مطلب ہے برٹز اگر وقت گھنٹوں میں ہے

تو فریکوئنسی فی گھنٹہ ہے اور وقت دنوں میں ہے پھر فریکوئنسی فی دن ہونے والی ہے لہذا ہم نے اس کے بارے میں بات کی میں اب واپس جاؤں گا ایک دائرے میں ایک ذرہ کے جذبات اور اب حرکت کرنے میں مہارت حاصل کر لی گئی ہے جہاں ذرہ کی رفتار مستقل ہوتی ہے بعض اوقات اسے

یکساں بھی کہا جاتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب یہ ذرہ کسی دائرے میں گھوم رہا ہوتا ہے

ہے  $r$  ہر وقت یکساں رہتی ہے اور اس لیے اگر دائرے کا رداس  $v$  تو اس کی رفتار یہاں

سے اور یہ وہ وقت ہے جسے آپ خود دیکھ سکتے ہیں اگر رفتار یکساں ہے  $v$  ہوگا تقسیم  $\pi r$  تو ذرہ کے گرد گھومنے میں لگنے والا وقت 2

تو حرکت اپنے آپ کو دہرانے جا رہی ہے جب پارٹیکل اپنے ابتدائی نقطہ پر پہنچ جائے

ایک اوور  $f$  حرکت کی فریکوئنسی  $v$  ختم ہے۔  $\pi r$  تو یہ خود کو دہرائے گا لہذا ایک بار گھومنے میں جو وقت لگتا ہے وقت کی مدت اور یہ 2 سے تقسیم کیا جاتا  $\pi$  ہے میں اومیگا کہنے جا رہا ہوں جو کوئی فریکوئنسی ہے دو  $r$  اوور  $\pi r v$  سے زیادہ دو  $v$  ہونے والی ہے جو  $t$

جانے میں وقت لگتا ہے زاویہ کے ارد گرد دو پائی دائیں  $t$  ہے اب آپ کو کوئی تعدد کا مطلب سمجھ میں آتا ہے

کے سوا کچھ نہیں  $f$  اور  $\pi$  اور یہ زاویہ فریکوئنسی کی طرح ہے اور جو دو  $t$  سے زیادہ  $\pi$  تو زاویہ کی رفتار کچھ نہیں ہے مگر دو

ہے لہذا ہم یہ سب چیزیں آپس میں جڑے ہوئے ہیں جیسا کہ آپ اب دیکھ سکتے ہیں کہ یہ حرکت کیوں دلچسپ ہے کیونکہ اگر میں اس حرکت کو

کے دائرے میں یکساں رفتار کے ساتھ گھوم رہا ہے  $r$  دیکھتا ہوں کہ ایک ذرہ رداس

تو یہ زاویہ جو وقت کے ساتھ احاطہ کرتا ہے اسے ریڈین میں ماپا جائے گا جیسا کہ آپ پہلے دیکھ سکتے ہیں میں نے کہا تھا کہ دو پائی ہے جب  $r$  ہے  $r$  یہ رداس  $t$  گنا  $v$  یہ جاتا ہے۔ ایک بار پورے دائرے میں یہ تھیٹا تھیٹا اس فاصلے کے برابر ہونے والا ہے یہاں جو ایک معروف رشتہ ہے اور اس  $t$  سے تقسیم ہونے والا ہے ہم کیا آپ اس اومیگا کو دیکھ سکتے ہیں اوقات  $r$  آرک کی لمبائی  $t$  گنا  $v$  تو تھیٹا سائن ہونے جا رہا ہے  $r$  کا  $\omega t$  کے برابر ہونے والا ہے  $r \cos$  کے  $t$  جز ہے۔ یہاں اومیگا  $x$  the  $x$   $t$  وجہ سے لہذا اس معاملے میں اگر میں حرکت کی منصوبہ بندی کرتا ہوں

کے دائرے کے دائیں حصے میں یہ رفتار  $r$  تو میں آپ کو یہ دوبارہ دکھاتا ہوں میں اس معاملے پر غور کر رہا ہوں جہاں ذرہ گھوم رہا ہے۔ رداس ہے اور  $r \cos$  کا  $t$  کے طور پر وقت کا ایک فعل اومیگا  $x$   $r$  سے زیادہ ہے  $v$  ہے جہاں اومیگا  $t$  ہے اور یہ زاویہ تھیٹا اومیگا  $v$  ہے یہ نیچے آتا ہے کیونکہ ایک کوزائن وکر صفر پر جاتا ہے کہ میں  $r$  کو صفر کے برابر پلاٹ کروں نقل مکانی  $t$  بمقابلہ  $x$  پر  $t$  اگر میں منفی ہو جاتا ہے اور پوزیشن 3 پر زیادہ  $x$  اسے پوزیشن پوزیشن کے ذریعہ دوبارہ دکھاتا ہوں ایک پوزیشن 2 یہاں پوزیشن 1 یہاں ہے اور پھر دوبارہ کم ہونا شروع ہوتا ہے کہ منفی ہو جاتا ہے یہ یہاں  $x$  سے زیادہ منفی ہے لہذا یہ اس طرح جاتا ہے یہ پوزیشن تین ہے اور اس کے بعد پوزیشن چار پر آتا ہے دوبارہ صفر ہو جاتا ہے اور پھر اوپر جاتا ہے اور واپس پانچ یا ایک پر جاتا ہے

کے  $t$  اسی طرح اومیگا  $x$   $t$  اور یہ ایک کوسائن وکر ہے اس لیے اس کا  $t$  تو یہ پورا وقت جو اسے واپس آنے میں لگتا ہے وقت کی مدت ہے۔ کو پلاٹ کروں  $y$   $t$  کوسائن کے برابر ہے اگر میں نے صحیح پلاٹ کرنا تھا اگر میں  $r$  تو یہ اومیگا  $\theta$  کا سائن ہوگا اور اگر میں اسے اس پوائنٹ پوزیشن پر پلاٹ کروں نیچے آتا ہے اور پھر منفی اوپر جاتا  $r$  برابر تک پہنچ جاتا ہے۔ پوزیشن  $\theta$  پر  $y$  تو یہ ایک اور صفر ہے اور پھر یہ اوپر جاتا ہے زیادہ سے زیادہ ہے اور پھر اوپر جاتا ہے یہ پوزیشن 3 پوزیشن 4 پوزیشن 5 ہے اور پھر یہ دہراتا ہے تو یہ بھی اسی وقت کی مدت کے ساتھ  $m$

تواتر ہے اس نقطہ کو یہاں صحیح سمجھا جاتا ہے۔ یہ پانچویں پوزیشن ہے جسے ایک ہی نقطہ سمجھا جاتا ہے ٹھیک ہے تو یہ خود کو دہراتا ہے یہ ایک خاص قسم کی حرکت ہے تو یہاں کیا ہو رہا ہے اگر کوئی ذرہ یکساں رفتار سے دائرے میں گھوم رہا ہے سائن کے برابر ہے بالکل ایک فریکوئنسی کے ساتھ گھومتا ہے اس  $r \cos$  اومیگا  $\theta$  کے برابر ہے اومیگا  $\theta$  کے برابر ہے  $r \cos$  برابر ہے  $x$   $t$  تو کو سادہ ہارمونک موشن کہتے ہیں بالکل ٹھیک ہے تو یہ وہ حرکت ہے جو سادہ ہارمونک ہے اس میں ایک کوسائن اومیگا  $\theta$  یا سائن اومیگا  $\theta$  ٹائم انحصار ہوتا ہے اور یہ  $\theta$  میں ہمارے مطالعہ کا مرکز بننے والا ہے۔ یہ لیکچرز میں لیکن اس سے پہلے میں آپ کو کچھ اور  $m$  تواتر حرکتیں دینا چاہتا ہوں اور انہیں نقل مکانی بمقابلہ ٹائم گراف موشن اور نقل مکانی بمقابلہ گراف پر ان کی نمائندگی کرنے کا طریقہ بتانا چاہتا ہوں

تو آئیے اس نمبر ایک کو دیکھتے ہیں مجھے ایک ذرہ لینے دیں ایکس محور کے ساتھ ساتھ چل سکتا ہے تک ایکس محور ہے اور پھر ان مقامات پر یہ کچھ سخت دیواریں ہیں تاکہ یہ ذرہ یہاں سے یکساں رفتار کے ساتھ  $1$  تو ہم کہتے ہیں کہ یہ  $\theta$  سے یہاں سے اس دیوار سے ٹکرانے اور فوراً واپس آجائے۔ پیچھے تاکہ آپ دیکھ سکیں کہ آگے پیچھے جانا ہے اور اس کی حرکت کو  $v$  چلا جائے دہرانا ہے تو یہ ایک  $m$

کو  $t$  کو پلاٹ کروں اور  $t$  بمقابلہ  $x$   $t$  گراف اس کے لیے کیسا نظر آتا ہے لہذا اگر میں  $t$  بمقابلہ  $x$  تواتر حرکت ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ  $1$  اضافہ یکساں طور پر ایک قدر پر جاتا ہے  $x$  کے برابر پھر  $\theta$   $x$  برابر کہوں  $\theta$  یہ اس وقت بائیں ہاتھ پر تھا ہے اور جیسے ہی یہاں پہنچتا ہے یہ واپس آنا شروع ہو جاتا ہے جب یہ بغیر کسی رفتار کے واپس آنا شروع ہوتا ہے۔  $1$  تو یہ صفر کے دائیں طرف جاتا ہے اور پھر حرکت دوبارہ اپنے آپ کو دہراتی ہے آپ دوبارہ دیکھتے  $s$  کمی  $x$  توانائی کھونے سے یہ نیچے جاتا ہے کے  $t$  ہیں کہ حرکت اپنے آپ کو دہرا رہی ہے یہ بالکل وہی مثلث ہے جو بار بار آتی رہتی ہے اور اس وقت یہاں سے یہاں تک کا وقت ہوگا جو  $h$  کی  $h$  سے جو کہ وقت کا وقفہ ہونے والا ہے آئیے ہم دوسری مثال لیتے ہیں کہ ایک گیند  $v$  ہے تقسیم  $1$  برابر ہے۔ طے شدہ کل فاصلہ  $2$  کی اونچائی سے نکلتی ہے اور نیچے آتی ہے اور اونچائی سے بغیر واپس اچھالتی ہے

کی اونچائی تک جاتی ہے اور پھر یہ نیچے آتا ہے اور اوپر چلا جاتا ہے اور یہ حرکت دہراتی رہتی ہے یہ بھی ایک  $m$   $h$  تو یہ دوبارہ تواتر حرکت ہے کیونکہ بالکل وہی حرکت ایک خاص وقت کے بعد ہو رہی ہے اور اگر میں گیند کی اونچائی کو پلاٹ کروں نیچے آتا ہے اور آپ کو اپنی مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ اونچائی اس طرح  $h$  کے مقابلے میں یہ اونچائی سے شروع ہوتی ہے۔  $t$  تو وقت مربع ہوگا  $gt$  ماننس آدھا  $h$  کے برابر  $yt$  ہوگی کیونکہ میرے پاس اور  $h$  کے برابر  $\theta$  سے ٹکرانا ہے اور اوپر جانا شروع ہوتا ہے بالکل ٹھیک ہے اسی رفتار کو اوپر جاتا ہے اونچائی  $y$  تو ایسا لگتا ہے کہ اب یہ پھر یہ دوبارہ نیچے آنا شروع ہو جاتا ہے تو آپ دیکھتے ہیں کہ اتنے وقت کے بعد حرکت دہرائی جاتی ہے یہ وہ وقت ہے جب گیند کو اچھی طرح نیچے آنے میں کتنا وقت لگتا ہے ہم جانتے ہیں لیکن یہ وقت کی مدت نہیں ہے کیونکہ یہاں اس مقام تک پہنچنے میں  $h$  مربع جڑ پر دو  $g$  برابر  $t$  برابر صفر کا مطلب ہے کہ  $y$  ہیں کہ کے دو مربع جڑ ہے  $h$  دو گنا زیادہ ہونے والا ہے جو کہ دو  $t$  اتنا ہی وقت لگا جہاں میں ایک بڑا بلاب بنا رہا ہوں اس لیے کل وقت کا دورانیہ وقت کا دورانیہ جب بھی حرکت  $m$

تواتر ہوتی ہے تمام متعلقہ مقادیر بھی  $m$  کی نقل مکانی کو دکھایا ہے جو کہ  $m$   $x$   $t$  تواتر ہوتی ہیں لہذا ہم نے جو مثالیں آپ کو دکھائی ہیں ان میں ہم نے ایک ذرہ تواتر ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ بدل رہا ہے میں آپ کو ہر قسم کی معلومات بھی دے رہا ہوں۔ وقت کی مدت کے ساتھ وقتاً فوقتاً الفاظ بدلتے رہتے ہیں

نے وقت کے  $x$   $t$  تو پہلی مثال میں مجھے دوبارہ واپس جانے دو ہم نے ایک ذرہ لیا جو دو سخت دیواروں کے درمیان آگے پیچھے جا رہا تھا اور تھا۔ نرمی واپس آگئی میں اب آپ کو دکھانا چاہتا  $x$   $incr$  تک بڑھ رہا ہے۔ واپس آیا  $1$  بڑھ رہا ہے  $x$  خلاف سازش کی ہے ایسا لگتا ہے جیسے ہوں کہ دوسری مقادیر کیسی نظر آئیں گی تو فرض کریں کہ میں اس رفتار بمقابلہ وقت کو پلاٹ کرنا چاہتا ہوں، میں اسے رفتار کہہ رہا ہوں کیونکہ میں اب منفی اور مثبت دونوں کو لے کر  $v$  جا رہا ہوں جیسا کہ ذرہ اوپر چلا گیا اس پوائنٹ کیپٹل  $\theta$  کے ساتھ یہ مثبت رفتار کے ساتھ آگے بڑھ رہا تھا اور رفتار کی ایک خاص قدر تھی جیسے ہی یہ اس نقطہ پر پہنچا دوسری دیوار سے ٹکرا گیا اور دوسری طرف بڑھنا شروع کر دیا تو رفتار منفی ہو گئی اور پھر یہ یہاں آیا یہ تھا رفتار اس نقطہ سے اس مقام تک اور پھر رفتار اس مقام تک دوبارہ مثبت ہو گئی اور پھر یہ دوبارہ منفی ہو گئی افسوس کہ اس نقطہ تک یہ سرخ رنگ ہے لہذا اس ذرے کی دو دیواروں کے درمیان آگے پیچھے جانے کی رفتار اس طرح ہے۔ یہ میں



کے طور پر دیا گیا ہے رفتار کی cosine r کے t کو اومیگا xt تو آئیے دیکھتے ہیں کہ سادہ ہارمونک موشن میں اس کا کیا مطلب ہے کے علاوہ dt سے زیادہ dv کا مائنس اومیگا آر سائن ہے اور وہ سرعت جس پر t کے سوا کچھ نہیں ہے جو اومیگا dxdt متعلقہ رفتار محور کے ساتھ y کے علاوہ میں اس ساری چیز کو x دو ایکس کے علاوہ کچھ نہیں ہے مائنس اومیگا مربع d مربع پر dt کچھ نہیں ہے جو ہے vt dy over dt سائن کے برابر اسی رفتار r لکھ سکتا تھا۔ اومیگا ٹی کے yt is ایک حرکت کے طور پر بھی لکھ سکتا تھا لہذا میں کے سوا y دو d مربع پر dt ہے جو dv پر dt ہوگا دلچسپ بات یہ ہے کہ ایکسپریشن جو cosine r کا اومیگا t omega t جو کہ جو اس کا دوبارہ مائنس اومیگا مربع گنا نقل مکانی ہے یا عام طور پر میں ایک موشن y کچھ نہیں ہے پھر بھی مائنس نکلتا ہے اومیگا اسکوائر لکھ سکتا ہوں جو بطور مستقل ایک کوسائن اومیگا ٹی کے علاوہ اومیگا ٹی کا کوئی اور مستقل ب سائن ہوتا ہے xt اوور کے برابر ہوگی۔ ڈی ٹی جو مائنس اومیگا اے سائین آف اومیگا ٹی پلس اومیگا ٹی کا اومیگا ٹائمز ہی کوسائن ہے اور ایکسپریشن dx t تو رفتار جس پر ڈی ٹی اوور ہے جو مائنس اومیگا اسکوائر ایک کوسائن اومیگا ٹی مائنس اومیگا اسکوائر ہی سائن آف اومیگا ٹی ہوگا جو دوبارہ مائنس ہے اومیگا اسکوائر ایکس ٹی

تو آپ جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ آیا میں حرکت کو خالص طور پر کوزائن خالصتاً نشانی کے طور پر لیتا ہوں یا اس کا ایک مجموعہ مائنس اومیگا ڈبل ڈاٹ x اسکوائر ایکس ٹی ہوتا ہے اور یہ دوسرے لفظوں میں سادہ ہارمونک حرکت کی ایک عام علامت ہے اگر میرے پاس ہے ایک مساوات ایک مثبت نمبر ہے c کے برابر ہے جہاں x بار c مربع اگر یہ مائنس کچھ مستقل dt بذریعہ x دو d کچھ بھی نہیں ہے مگر whi ch اس شکل کا ہوگا جو x dot t تو میں پوری دلیل کو الٹا کر رہا ہوں اب میں ایکس سے نکلا ایکسپریشن اب میں پیچھے کی طرف جا رہا ہوں پھر لکھ x dot t کے ساتھ sine of root cti b sine of cosine کے ct بونے جا رہا ہے اگر میں اس فارم کو جڑ xt دیا گیا تھا اور کی ایک سائین ct جڑ b پلس ct سکتا ہوں جیسے کہ کچھ گٹانک جڑ کی ایک کوسائن مستقل v تو پہلے میں نے آپ کو دکھایا تھا کہ اگر کوئی ذرہ دائرے میں یکساں طور پر گھوم رہا ہے جس کا مطلب ہے کہ اس کی کوئی رفتار یا

جزو خالص کوزائن اومیگا ٹی یا سائن اومیگا y کے جزو کے طور پر نکلتی ہے۔ حرکت کا موشن x جزو کی حرکت y یا x تو حرکت اس کے ٹی کا مجموعہ بن کر نکلتا ہے یا عام طور پر جب میں ان دونوں کو جوڑتا ہوں تو اس کے ان دونوں کے امتزاج میں اب بات یہ ہے کہ اس حرکت میں سرعت آتی ہے بالکل مائنس اومیگا مربع گنا نقل مکانی ہمیں انڈرس بونے دیں۔ اور اس طرح جب کوئی ذرہ دائرے میں گھوم رہا ہے اگر یہ اس مقام پر ہے یہ طول و عرض r سے زیادہ ہے یا اومیگا مربع r مربع v تو اس کا واحد سرعت مرکزی سرعت ہے جس کے بارے میں آپ جانتے ہیں کہ ہے اور اگر میں اس کے اجزاء کو لیتا ہوں ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ کچھ نہیں ہے مگر اومیگا t ہے یہ اومیگا t ہوتا ہے۔ جزو اس سمت میں ہونے والا ہے اگر یہ اومیگا x تو اس کا جزو جا رہا ہے اومیگا ٹی y کے علاوہ کچھ نہیں ہے اسی طرح ایکسپریشن کا x کوسائن ہے جو مائنس اومیگا مربع r کا مائنس اومیگا مربع t جزو جو سادہ ہارمونک حرکت کو y اور x ہے لہذا اس معاملے میں ایکسپریشن y t سائن ہونا جو مائنس اومیگا مربع r کا مائنس اومیگا مربع ظاہر کرتا ہے متعلقہ ایکسپریشن مائنس اومیگا مربع اوقات کے علاوہ کچھ نہیں ہے جو نقل مکانی کرتا ہے اور یہ سادہ ہارمونک ہے۔ حرکت اتنی سادہ ہارمونک حرکت کچھ بھی نہیں بلکہ م

تواتر حرکات کا ایک خاص معاملہ ہے جس کی میں نے آپ کو پہلے بھی کئی مثالیں دی ہیں تو آئیے اب ہم چند مسائل کو حل کرتے ہیں جن میں ایک م اور دوسرا جہاں ہم آہ م tion تواتر فعل شامل ہے۔

تواتر حرکت کرنے والے ذرہ کی مدت کا حساب لگاتے ہیں

کے cosine کے pit کے برابر ہے اور تین cosine کے pit تو پہلے مسئلے میں وقت کے فنکشن کے طور پر دیا گیا فنکشن دو برابر ہے فنکشن کو پلاٹ کریں اور اس کی مدت معلوم کریں۔

کو دیکھوں cosine کے pi t تو آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ فنکشن کیسا لگتا ہے اگر میں دو

صفر کے برابر ہے اور اگلا cosine کا pi t پر دو t کا دورانیہ ایک کے برابر ہوتا ہے میں کیسے جان سکتا ہوں کہ t تو صحیح اس میں صفر کے برابر ہوتا cosine کا pit پر تین t کا کوسائن بن جاتا ہے اور pi پر ایک کے برابر ہے کیونکہ پھر یہ دو t ایک ہو جاتا ہے کے برابر ہوتا ہے cosine کے pi دو تہائی کے برابر ہوتا ہے پھر سے دو cosine کا pit پر تین t ہے اور

تو اس کا دورانیہ دو تہائی دونوں فنکشنز کا ٹائم پیریڈ کیا ہوتا ہے جب وہ ایک ساتھ جوڑے جاتے ہیں کا کوسائن کوسائن اس طرح نظر آئے گا جہاں دورانیہ ایک ہے pi t تو میں ان دونوں فنکشنز کو پلاٹ کر سکتا ہوں لہذا دو برابر ہے اور کاسائن تھری پی ٹی ایسا لگتا ہے جیسے اس کی مدت دو تہائی ہے t تو یہ

تو یہ پوائنٹ ہے۔ پانچ یہ یہاں ہے

تو یہ اس طرح نظر آنے والا ہے اور خالص نتیجہ دو کا مجموعہ ہے یہ بالکل واضح نہیں ہے کہ مدت کیا نظر آنے والی ہے نیٹ فنکشن کیسا نظر آنے والا ہے لیکن اگر آپ صرف اس کے ارد گرد کھیلتے ہیں کہ آپ حاصل کرنے جا رہے ہیں کچھ اس طرح نظر آنے والا ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مدت کی طرف جا رہا ہے یہ زیادہ واضح نہیں ہے کہ مدت کیا ہونے جا رہی ہے اس کے لیے میں ایک چال چلانے جا رہا ہوں اور لکھوں مائنس دو pi جمع تین t سے دو pi جمع تین pi کے کوزائن کے طور پر دو pi t جمع کوزائن تین pi t برابر کا کوسائن دو ft کا pi دو pi مائنس دو pi مائنس تین t سے زیادہ دو pi جمع تین pi جمع کوزائن دو pi سے تقسیم کیا گیا یہ کوزائن تین t کو دو pi ہے ٹھیک ہے pi t سے زیادہ ہے اور وہ کوزائن دو

جمع pi by two t cosine کا pi ہے اور اس لیے یہ پانچ cosine کا pi t ہے اور یہ تین cosine کا pi t تو یہ دو کے دو pi اور آپ ان کو ایک ساتھ جوڑیں گے آپ کو pi by two t مائنس pi دو t by Five pi بن جاتا ہے cosine جمع pi by two t پر 0 دو f ملیں گے دو ٹی یہ آپ کا فنکشن ہے اور اب آپ آسانی سے پیریڈ تلاش کر سکتے ہیں لہذا cosine کے دو t cosine by pi کے کس وقت پر دو ہے t گنا ہے ایک گنا ایک جو دو ہے اور میں یہ معلوم کرنا چاہتا ہوں کہ کے برابر ہے cosine کے pi برابر پانچ ft اور آپ نے دیکھا کہ pi of two t کے دو گنا کوزائن از دو کوزائن pi t تو پانچ by two t cosine by two t

اور دونوں مائنس ایک ہیں جو دیتا ہے آپ دو دوبارہ cosine گنا pi دو برابر دو کوسائن ٹائم کا پانچ f برابر دو دیتا ہے t تو کے برابر ہے کہ یہ خود کو دہراتی ہے t کے برابر دو نوٹس کے بعد دہرا رہا ہے جو کہ سب سے چھوٹی تعداد t تو یہ

محور کے ساتھ جو x تو اس فنکشن کی مدت 2 ہے اور یہ دوسرے مسئلے کا جواب ہے میں ایک ذرہ کو حرکت دینے جا رہا ہوں۔ ایک پوٹینشل میں صفر کے برابر ہے mkxx کا ماس ہے اور اس طرف یہ نصف k ایک مستقل کے طور پر پارٹیکل m کہتے ہیں جہاں mkx کہ ہم ایک نصف صفر سے زیادہ صفر کے برابر ہے اور مائنس ایک نصف کے برابر mkx میں حرکت کر رہا ہے ایک نصف کے برابر ہے vx لہذا پوٹینشل یہ کے نصف ایم کے مادیولس کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے آپ دیکھ سکتے ہیں x صفر کے برابر شارٹ پوٹینشل کو x کے لیے mk x ہے

کہ اگر میں ایک ذرہ لیتا ہوں اور اسے ایک طرف سے چھوڑ دیتا ہوں تو یہ نیچے آتا ہے پھر اوپر آتا ہے پھر نیچے آتا ہے اور یہ ایک م تواتر حرکت کرتا ہے۔

توانائی کے ساتھ ایک ذرہ ای ایک م

تواتر حرکت کرنے جا رہا ہے کہ یہ حرکت م

مربع قسم کی صلاحیت کی ضرورت ہوتی ہے  $kx$  تواتر ہو گی لیکن سادہ ہارمونک حرکت نہیں کیونکہ سادہ ہارمونک حرکت کے لیے آپ کو نصف

صفر مربع لینے جا رہا ہوں  $mv$  کیونکہ قوت لکیری ہوتی ہے۔ سادگی کے لیے میں ای برابر ایک نصف

$vx$  وہ رفتار ہے جب  $v = 0$  تو یہ فوراً آپ کو بتاتا ہے کہ یہ فوری طور پر آپ کو بتاتا ہے کہ

مربع کے برابر ہوتا ہے جو کہ حرکتی  $mv$  ایک نصف  $e$  کے برابر ہوتا ہے  $y$  توانائی کے تحفظ کے لحاظ سے  $0$

توانائی ہے۔ پلس ایک آدھا ایم کے موڈ ایکس جب موڈ ایکس صفر پوٹینشل صفر ہے

کوئی بات نہیں جب پوٹینشل صفر ہو اور تمام انرجی حرکتی ہو  $v$  تو ڈیڑھ ایم بی اسکوائر کل انرجی ہونے والا ہے لہذا

میں  $x$   $mk \text{ mod } x$  مربع کے علاوہ ایک آدھا  $mv$  سے ایک آدھے  $a_1$  تو اب ہمارے پاس جو ہے وہ ایک ہے آدھا ایم وی صفر مربع برابر ہے۔

ہے کیونکہ یہ ذرہ کسی بھی  $k \text{ mod } x$  مربع مائنس  $v$  نought مربع برابر ہے  $v$  کو منسوخ کر سکتا ہوں اور میرے پاس  $m$  پورے آدھے

کے مربع جڑ کے طور پر دیا گیا ہے لہذا اگر یہ  $k \text{ mod } x$  مربع مائنس  $v$  نought  $v$  ہے  $v$  کی رفتار  $x$  پر آگے پیچھے حرکت کرتا ہے  $x$  کا فاصلہ طے کرتا ہے  $dx$

کے مربع جڑ پر  $k$  مربع مائنس  $v$  نought  $v$  ہے جو  $Vx$  کے برابر ہوتا ہے  $dx$  تو صرف مسافت طے کرنے کے لیے لیا جانے والا وقت

ٹھیک ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ سب سے زیادہ دور سے سب سے زیادہ دور ان دو پوائنٹس کے درمیان سفر کرتا  $x$   $mod$  ہونے والا ہے۔  $dx$

آپ  $x$  صفر ہے دائیں  $v$  ہے سب سے اونچا پوائنٹ دائیں سب سے زیادہ نقطہ بائیں سب سے زیادہ پوائنٹ ان پوائنٹس پر رفتار صفر ہے لہذا جب

صفر کا مطلب ہے کہ ایک آدھا ایم وی صفر مربع برابر ہے ایک آدھا ایم کے موڈ ایکس آدھا ایم آدھا میٹر کینسل اور  $v$  کو بتاتا ہے اس پوائنٹ سے

ہے  $k$  مربع پر  $v$  نought وہ دو پوائنٹس ہیں جہاں یہ عکاسی کرتا ہے لہذا اونچی پوائنٹ  $k$  مربع اوور  $v$  نought موڈ ایکس برابر ہے

$k$  مربع اوور ہے۔  $v$  نought مائنس  $v$  نought اور بائیں سب سے زیادہ پوائنٹ

$v$  کے درمیان حرکت کر رہا ہے اور مائنس  $k$  مربع سے  $v$  نought اور  $k$  مربع سے  $v$  نought تو اب یہ واضح ہے کہ ذرہ مائنس

تک کا وقت یہ ہے اور یہ ہونے والا ہے۔ ایک نصف وقت کی مدت کیونکہ یہ ایک طرف  $k$  مربع سے  $v$  نought تک  $k$  مربع سے  $v$  نought

سے دوسری طرف لے جانے کا وقت ہے اور لیا جانے والا کل وقت بالکل وہی ہوگا جب یہ وقت کی مدت کو دو سے تقسیم کیا جاتا ہے وہ وقت ہے

مربع مائنس  $v$  نought پر  $dx$  سے  $0$   $k$  مربع اوور  $v$  نought جو اسے بائیں طرف سے سب سے دائیں نقطہ تک لگتا ہے اور یہ مائنس

$v$  نought پر  $kdx$  مربع پر  $v$  نought جمع صفر سے  $kx$  صفر سے کم کے لیے جمع  $x$  کے مربع جڑ پر ہوگا جو کہ  $k \text{ mod } x$

مربع جڑ  $kx$  مربع مائنس

مربع  $v$  نought کے برابر ہے  $dx$  سے صفر  $k$  مربع اوور  $v$  نought بذریعہ مائنس  $t$  تو ہم نے اندازہ لگایا ہے کہ وقت کا دورانیہ

کے مربع جڑ پر آپ  $kx$  مربع مائنس  $v$  نought پر  $kdx$  مربع سے زیادہ  $v$  نought کے علاوہ صفر سے  $kx$  کے مربع جڑ سے

لیں  $y$  کو مائنس  $x$  یا  $x$  کو مائنس  $y$  اسے اس انٹیگرل پہلے انٹیگرل میں مزید آسان کر سکتے ہیں۔

ہے  $dy$  مائنس  $dx$  تو

کے مربع جڑ پر حاصل کریں اور یہ  $ky$  مربع مائنس  $v$  نought پر  $dy$  کے ساتھ مائنس سائن  $integral$  برابر  $t$  by two تو آپ کو

$v$  سے صفر کے علاوہ دوسری اصطلاح وہی صفر سے  $k$  مربع از  $v$  نought بن جائے گا۔ جمع  $k$  مربع بذریعہ  $v$  نought مائنس

کے مربع جڑ سے زیادہ  $v$  نought کے مربع جڑ پر ایک ہی رہتا ہے جسے ہم  $kx$  مربع مائنس  $v$  نought پر  $kdx$  مربع پر  $v$  نought

یا  $kdx$  مربع اوور  $v$  نought پلس صفر سے  $y$   $k$  مربع کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ مربع مائنس  $v$  نought پر جمع صفر سے  $kdy$

$kd y$  مربع پر  $v$  نought بذریعہ  $0$  دو گنا صفر سے  $t$  کوئی فرق نہیں پڑتا کیونکہ یہ متغیر ہے جس پر ہم انضمام کر رہے ہیں لہذا یہ  $dy$

$k \sin$  اسکوائر اوور  $v$  نought برابر  $y$  اب انٹیگرل بہت آسان ہے آپ لیجئے  $ky$  مربع کے مربع جڑ پر مائنس  $v$  نought پر

تک ہیں  $\pi$  اور حدیں صفر سے  $d \theta$   $\cos \theta$   $\sin \theta$   $k$  مربع اوور  $v$  نought دو  $dy$  اسکوائر تھیٹا لہذا

$v$  تھیٹا کو تھیٹا کے  $d \theta$  سائن تھیٹا کوزائن ہیں  $k$  مربع اوور  $v$   $0$  جو کہ  $\frac{\pi}{2} dy$  بنتے ہیں۔  $2$  گنا  $t$  by two  $2$   $0$  تو

انٹیگرل صفر سے  $\cos \theta$  ملتے ہیں یہ  $v$  نought کے اوپر چار  $k$  سے تقسیم کیا جاتا ہے لہذا آپ کو  $\cos \theta$   $v$  نought

کے سوا کچھ نہیں ہے اور اس لیے وقت کی  $v$  نought پر چار  $k$  تھیٹا کے ذریعے منسوخ کر دیتا ہے جو  $\sin \theta$   $d$  کو دو  $\pi$

صفر سے زیادہ ہونے والی ہے اگلے لیکچر میں میں سادہ  $v$  آٹھ  $K$  ہے۔ یہی جواب ہے اور حرکت کی فریکوئنسی  $v$  نought مدت آٹھ

ہارمونک موشن پر زیادہ

توجہ مرکوز کرنے جا رہا ہوں تحریک کی اس مساوات کو دیکھیں اس کی بنیاد پر جو ہم نے اب تک آپ کو سیکھا ہے