ترتیب اور سیریز کے اس لیکچر میں دوبارہ خوش آمدید، ہم اپنے اب تک کی ترقی کے ایک سرسری خلاصہ کے ساتھ شروع کریں گے پچھلے
لیکچرز میں ہم نے ترتیب کے تصور کو غیر رسمی طور پر ایک ترتیب کے ذریعے متعارف کرایا تھا، ہمارا مطلب ہے کہ نمبروں کی ایک ترتیب شدہ
غیر منفی عدد کے سیٹ کا ایک ذیلی s تک جہاں r سے f s فہرست زیادہ رسمی طور پر ایک ترتیب کی وضاحت کی گئی ہے۔ بطور فنکشن
ann is equal to سیٹ ہے ہم نے دیکھا کہ ایک ترتیب کے لیے اشارے استعمال کیے جاتے ہیں ایک ترتیب کو اشارہ کیا جا سکتا ہے نوٹیشن
کو فنکشن کے آؤٹ پٹ کے طور پر دیکھا جا سکتا nth term an اور sequence کو اصطلاحات کہا جاتا ہے۔ 1 to infinity an
تسلسل کے ساتھ منسلک بنیادی فنکشن 1 سے f پر کیا جاتا ہے جہاں n کا اندازہ f دراصل an پر کیا جاتا ہے جو کہ n کا اندازہ f ہے
ویںn لامحدود کے برابر ہوتا ہے ترتیب کے لیے دیگر ممکنہ اشارے ہیں یا ہم ایک ترتیب کو مندرجہ ذیل طور پر درج کر سکتے ہیں ترتیب کی
سے لامحدود کے ann 1 اصطلاح کو بیان کرنے کا مشورہ دیا جاتا ہے یعنی ایک مجھے یہ بھی تبصرہ کرنا چاہئے کہ اگرچہ ہم نے لکھا ہے کہ
یونین 0 کے کچھ ذیلی سیٹ پر مختلف n کی رسمی تعریف میں 0 سے مختلف ہو سکتا ہے۔ لامحدودیت تک یا یہ سیٹ n برابر ہے جیسا کہ ترتیب
سے شروع ہو سکتی ہے اس کے بعد ہم نے یہ بھی دیکھا کہ ایک ترتیب کو دو طریقوں f4 ہو سکتا ہے۔ جو کہ ایک ترتیب ہے مثال کے طور پر
ویں ٹرم کے لیے ایک n سے بیان کیا جا سکتا ہے ایک کو بند شکل کا اظہار کہا جاتا ہے جب کہ ترتیب کو بیان کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر
مربع کے برابر ہے کسی ترتیب کو بیان کرنے کا دوسرا طریقہ x n کے برابر کے لیے n 1 سے زیادہ یا n ہر a n فارمولہ دے کر
کی شرائط n لکھنے کے بجائے nth term an in فارمولہ استعمال کرنا ہے جہاں recursive ہے یا recurrence relation
ویں اصطلاح کو لکھتے ہیں ہم نے ایک مشہور مثال دیکھی ہے یعنی فبونیکی ترتیب اگرچہ ہم ایکn ہم اس کی کچھ پچھلی اصطلاحات کے لحاظ سے
کا استعمال کرتے ہیں ایک ترتیب اور ایک سیٹ کے درمیان فرق دباؤ کا فیصلہ کرتا ann is equal to 1 to infinity ترتیب کے لیے
ہے۔ نوٹ کریں کہ عناصر کی ترتیب ترتیب میں اہم نہیں ہے جبکہ ترتیب ترتیب میں بہت اہمیت ہوتی ہے دوسری بات یہ ہے کہ ایک ترتیب میں
عناصر کی تکرار سے گریز کیا جاتا ہے جبکہ ایک ترتیب میں عناصر دہر سکتے ہیں ہم نے کافی مثالیں دی ہیں۔ ان تمام چیزوں کی وضاحت کریں تاہم
یہ بات ذہن میں رکھیں کہ ایک ترتیب آخر میں سیٹ سے الگ ہوتی ہے حالانکہ سختی سے نہیں ہم کنورجنسی میں کنورجنسی کے تصور کو متعارف
کراتے ہیں ہم ایک ترتیب کے رویے کی تحقیقات کرتے ہیں جیسے جیسے اصطلاح ترقی کرتی ہے دوسرے لفظوں میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ اس
کی طرف سے لامحدودیت کی طرف n بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے یاد کریں کہ اشارے کی حد n کی شرائط کا کیا ہوتا ہے۔ ترتیب جیسے جیسے
جیسے جیسے l مقررہ قدر کے قریب اور قریب آتا ہے ns کے برابر ہے جس کا ہمارا مطلب یہ ہے کہ ترتیب کی شرائط یعنی ایک l رجحان
سے لامحدود کے برابر ہے واضح ہونے کے n 1 مربع n کافی بڑا ہوتا جاتا ہے مثال کے طور پر ہم نے دیکھا ہے کہ ترتیب میں 1 بذریعہ n
مربع وغیرہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے ہم آگے بڑھتے ہیں ترتیب کی by n وغیرہ وغیرہ X 4 1 X 9 1 X 16 1 لیے 1 1
اصطلاحات صفر کے قریب ہوتی جا رہی ہیں
مربع کو کنورجنٹ کہتے ہیں اور 0 کو ترتیب n مربع 0 کے برابر ہے ہم ترتیب 1 بذریعہ n کو لامحدود 1 بذریعہ n اس لیے ہم لکھتے ہیں حد
برابر 2 کے n n جیسے کہتے ہیں کہ مائنس 1 پاور seq uences مربع کی حد کہا جاتا ہے جبکہ اس کے لیے کچھ اور n بذریعہ 1
تلاش نہیں کر سکتے ہیں تاکہ l لامحدودیت کے لیے آئیے ہم واضح ہونے کے لیے کہتے ہیں 1 مائنس 1 1 مائنس 1 اور اسی طرح ہم کوئی نمبر
موجود نہیں ہوتا ہے اسی l ایسا نمبر l جیسا کہ ہم ترتیب کے اختتام کی طرف بڑھیں گے اس کی شرائط ترتیب اس نمبر کے قریب ہو جاتی ہے
برابر ہے 1 سے لامحدود اس طرح کے سلسلے کو مختلف کہا جاتا ہے ان خیالات کو ذہن n مربع n طرح کی ترتیب کے ساتھ معاملہ ہے جیسے
میں رکھتے ہوئے آئیے آگے بڑھتے ہیں میں یاد کرنا چاہتا ہوں جو تبصرہ میں نے پچھلے لیکچرز کے بالکل شروع میں کیا تھا یعنی روزمرہ کی
زندگی میں مندرجہ ذیل اصطلاحات ترتیب اور سلسلہ دونوں کو ایک دوسرے کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے دونوں واقعات یا اشیاء کی جانشینی
کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتے ہیں تاہم ریاضی میں یہ دونوں اصطلاحات الگ الگ معنی رکھتی ہیں۔ اور ہم نے دیکھا کہ ترتیب نمبروں کی
ترتیب شدہ فہرست کے لیے استعمال ہوتی ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ اس لیکچر کے ایک ریاضی دان کے لیے سیریز کا کیا مطلب ہے اگر آپ کو یاد
ہو کہ حقیقی نمبروں کی محدود تعداد کا مجموعہ ریاضی میں بڑے پیمانے پر استعمال ہوتا ہے روزمرہ کی زندگی میں ایمیٹکس مثال کے طور پر
گروسری کی دکان سے لے کر ایک لیبارٹری تک جہاں جدید ترین تجربات کیے جا رہے ہیں آئیے ہم یاد کریں کہ بہت ساری حقیقی اقدار کا مجموعہ
تلاش کرنا چاہیں گے۔ 3 a جمع 2 a کہتے ہیں کہ وہ حقیقی اعداد ہیں اور ہم ایک 1 جمع a1 a2 a3 تلاش کرتے ہوئے مثال کے طور پر
جمع a 2 جوڑتے ہیں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے یعنی 1 جمع a 3 اور a 1 a 2 نوٹ کریں کہ جس ترتیب میں ہم ان اصطلاحات کو
کے برابر ہے اور اسی طرح اگر آپ ترتیب اور امتزاج کو یاد a1 جمع a2 جمع a3 جو کہ a 3 جمع a 1 کہنا 2 جیسا ہی ہے۔ جمع a 3
کرتے ہیں تو تین حقیقتی طریقے ہیں جن میں ہم تین حقیقی نمبروں کا مجموعہ تلاش کرسکتے ہیں چھ مختلف ترتیبیں ممکن ہیں تاہم ان تمام ترتیبوں کا
نتیجہ بالآخر نکلتا ہے۔ حقیقی اعداد کی محدود تعداد کا مجموعہ تلاش کرنے کے لیے ایک ہی رقم میں ہم سب سے پہلے دو حقیقی نمبروں کا
مجموعہ تلاش کر سکتے ہیں اور اس رقم میں ہم ایک تیسرا حقیقی نمبر شامل کر سکتے ہیں، دیکھیں کہ آخر میں کیا نکلتا ہے حتمی طور پر متعدد کا
کم از کم ریاضی کے لحاظ سے er مجموعہ تلاش کرنے کے عمل میں حقیقی قدریں جس ترتیب میں شرائط ظاہر ہوتی ہیں وہ میٹ نہیں ہوتی ہیں۔
کچھ اعداد و شمار کے ساتھ کام کرتے وقت ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ کچھ دوسرے آرڈرز کے مقابلے میں کچھ ترتیب کام کرنا زیادہ آسان ہے مثال
کے طور پر اگر ہم سے کہا جائے کہ 247 198 اور 2 کا مجموعہ تلاش کریں۔ جیسا کہ ہم نے پہلے مشاہدہ کیا ہے وہ 6 مختلف ترتیبوں میں ہیں
تاہم 198 جمع 2 200 کے برابر ہے جس میں 247 تک کا اضافہ ہوتا ہے 447 حاصل کرتا ہے سب سے آسان ترتیب دیتا ہے لہذا ہم ہمیشہ حقیقی
نمبروں کی کچھ محدود تعداد کو تلاش کرنے کے لیے ایسے شارٹ کٹس کا سہارا لے سکتے ہیں اب رقم تلاش کرنے کے سوال پر غور کریں۔
لاتعداد حقیقی اعداد کی وضاحت کرنے کے لیے میں آپ کو ایک مثال دیتا ہوں آئیے ایک حقیقی نمبر کی اعشاریہ توسیع کو یاد کرتے ہیں مثال کے
طور پر جب ہم کہتے ہیں کہ 10 کا اعشاریہ 3 بذریعہ 3.333 ہوتا ہے وغیرہ غیر ختم ہونے والے اعشاریہ کی توسیع کا کیا مطلب ہے کہ ہم
واقعی کہنا چاہتے ہیں کہ 3 جمع 3 بذریعہ 10 جمع 3 بذریعہ 10 مربع جمع 3 بذریعہ 10 مکعب جمع وغیرہ 10 ضرب 3 کے برابر ہے۔ یہ وہی
ہے جو ہم جانتے ہوئے یا نادانستہ اعشاریہ کی توسیع میں ہم حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد کے مجموعہ سے نمٹتے ہیں اور یہاں ایک فطری سوال
یہ ہے کہ اگر ہم سمن کی تعداد میں اضافہ کرتے ہیں جو کہ 3 جمع 3 کو 10 سے ڈیل کرنے کے بجائے ہے اگر ہم 3 جمع 3 بذریعہ 10 جمع 3
بذریعہ 10 مربع سے ڈیل کرنے کے بجائے 3 جمع 3 بذریعہ 10 جمع 3 10 مربع فرض کریں کہ ہم اصطلاحات کے لیے 3 جمع 3 بذریعہ 10
جمع 3 بذریعہ 10 مربع جمع 3 بذریعہ 10 مکعب پیش کرتے ہیں اور کیا یہ 10 ضرب 3 نمبر کے لیے بہتر اور بہتر تخمینہ دیتا ہے، نوٹ کریں کہ
ہمیں بالکل 10 ضرب 3 حاصل کرنا ہوگا۔ 3 کے ساتھ 3 ضرب 10 کے ساتھ 3 ضرب 10 مربع کے ساتھ جوڑتے رہیں اور اسی طرح درحقیقت ہمیں
لامحدود بہت سے حقیقی نمبروں سے نمٹنا پڑتا ہے حقیقت میں بہتر تخمینہ تلاش کرنے کی یہ قیمت لامحدود بہت سے حقیقی اعداد کے مجموعے
کے تصور کی طرف لے جاتی ہے تاہم آئیے تبصرہ کریں کہ جب ہم لامحدود بہت سے حقیقی نمبروں میں سے کچھ سے نمٹتے ہیں تو کچھ مسائل یا
پریشانی ہوتی ہے کہ یہ مسائل کیا ہیں جن میں مندرجہ ذیل میں کچھ مثالوں کی مدد سے ان پریشانیوں کی وضاحت کرنا چاہوں گا سب سے پہلے یہ
نوٹ کریں کہ رقم تلاش کرنے کے سوال سے نمٹنے کے دوران لامحدود بہت سے حقیقی نمبروں کا ہم کر سکتے ہیں ۔ یہ دیکھنے کے لیے جوڑتے
a 2 رہیں کہ کیا نکلتا ہے کیونکہ حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد ہوتی ہے جب ہم حقیقی نمبروں کی محدود تعداد سے نمٹتے ہیں تو کہتے ہیں کہ 1
a3 ہم a 2 وغیرہ اور جب ہم پہلے اس کا مجموعہ تلاش کرنا چاہتے ہیں تو ہم 1 جمع تلاش کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اس رقم میں a 3
کا اضافہ کر سکتے ہیں اور اسی طرح یہ عمل ختم ہو جائے گا جبکہ لامحدود بہت سے حقیقی نمبروں کے مجموعے سے نمٹنے کے دوران ہم

جوڑنا جاری نہیں رکھ سکتے اور دیکھتے ہیں کہ کیا نکلتا ہے یہ ایک چیز ہے جس کے حوالے سے ہمیں ذہن میں رکھنا چاہیے۔ لامحدود بہت سے حقیقی نمبروں میں سے کچھ کو تلاش کرنے کا سوال اب آئیے کچھ خاص مثال کے ساتھ یہ دیکھیں کہ باقی تمام مسائل کیا ہیں فرض کریں کہ ہم اس لامحدود رقم کو تلاش کرنا چاہتے ہیں 1 ضرب 2 جمع 1 4 جمع 1 8 جمع 1 16 جمع وغیرہ مجھے امید ہے کہ آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ یہاں شرائط کے بعد کیا پیٹرن ہے درحقیقت یہاں نویں سمت میں 1 ضرب 2 کی طاقت ہوگی اس رقم میں پہلا نمبر 1 ضرب 2 ہے دوسرا نمبر 1 ضرب 2 مربع تیسرا 1 ضرب 2 مکعب ہے اور تو آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم اس لامحدود رقم کو تلاش کر سکتے ہیں جیسا کہ میں نے کہا کہ آپ فائی نہیں کر سکتے سب سے پہلے 1 ضرب 2 اور 1 بذریعہ 4 کا مجموعہ تلاش کریں پھر اس رقم میں 1 ضرب 8 اور اسی طرح شامل کریں کیونکہ یہ ایک لامحدود عمل ہے لیکن پھر آئیے جیومیٹری کی مدد سے اس مسئلے کو قدرے مختلف انداز میں دیکھیں جس کو آپ ایک یونٹ مربع مربع سمجھتے ہیں۔
سائیڈ کی لمبائی 1 ہے ہم سب جانتے ہیں کہ اس کا رقبہ 1 مربع یونٹ ہے آئیے ہم اس مربع کو نصف کریں پھر پہلے نصف کا رقبہ آدھا مربع یونٹ ہو جائے پھر آدھا دوسرا نصف یہاں کا رقبہ ایک سے چار ہو جائے آئیے اس نصف کو جاری رکھیں اس اعداد و شمار کے عمل کا رقبہ 1 ضرب 8 ہوگا اور اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے اعداد کے علاقے یونٹ مربع کے رقبے کو بھرتے ہیں جس کے ساتھ ہم نے شروع کیا تھا اس طرح ہندسی طور پر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ علاقوں کا مجموعہ یعنی 1 ضرب 2 جمع 1 4 جمع 1 بذریعہ 8 جمع 1 بذریعہ 16 جمع وغیرہ یونٹ مربع کے کل رقبہ کے برابر ہے جس کا آغاز ہم نے یعنی 1 سے کیا تھا۔ اس طرح ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ 1 بذریعہ 2 جمع 1 بذریعہ 4 جمع 1 بذریعہ 8 جمع 16 جمع وغیرہ لامحدود کا مجموعہ حقیقی اعداد کی تعداد 1 کے برابر ہے۔ آئیے ایک اور مثال کے ساتھ آگے بڑھتے ہیں اگر ہم فن یہ لامحدود رقم 1 جمع 2 جمع 3 جمع 4 جمع وغیرہ یہ بالکل واضح ہے کہ جب ہم زیادہ سے زیادہ اصطلاح کو شامل d میں دلچسپی رکھتے ہیں۔
کرتے ہیں تو نتیجہ بڑھتا ہے جو کہ 1 جمع 2 ہوتا ہے 3 ہوتا ہے جب ہم اس رقم کے ساتھ 3 کو جوڑتے ہیں تو ہمیں 6 ملے گا جب ہم پچھلی رقم یعنی 6 کے ساتھ 4 جوڑیں تو ہمیں 10 ملتا ہے اور اسی طرح جب ہم زیادہ سے زیادہ اصطلاحیں جوڑتے ہیں تو رقم میں اضافہ ہوتا ہے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ اصطلاحات لینے سے رقم کو پہلے سے منتخب کردہ قدر سے بڑا بنایا جا سکتا ہے
اس لیے ہم بدیہی طور پر مشاہدہ کرتے ہیں۔ کہ رقم 1 جمع 2 جمع 3 جمع 4 جمع وغیرہ ایک محدود قدر نہیں ہو سکتی یہ پچھلی مثال کے برعکس ہے لامحدود طور پر بہت سی حقیقی اقدار کا مجموعہ تھا جس سے ایک محدود عدد حاصل ہوتا ہے یعنی 1. ایسا ہوتا ہے جب حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد میں سے کچھ کے ساتھ معاملہ کیا جاتا ہے۔ ہم ہمیشہ اس بات پر زور نہیں دے سکتے کہ بالآخر یہ رقم ایک محدود قدر کے طور پر نکلتی ہے بعض صورتوں میں ہو سکتا ہے کہ یہ فیصلہ بھی نہ کر سکے کہ آیا لامحدود بہت سی حقیقی قدروں میں سے کچھ محدود ہوں گی یا وغیرہ یہ بالکل us لامحدود مشکل ہے مثال کے طور پر اگر ہمارا تعلق ہے یہ رقم 1 جمع 1 بذریعہ 2 جمع 1 بذریعہ 3 جمع 1 بذریعہ 4 پلس واضح نہیں ہے کہ آخر کار یہ لامحدود رقم ایک محدود قدر کے مترادف ہے یا نہیں لہذا ہم جو مشاہدہ کرتے ہیں وہ لامحدود بہت سی حقیقی قدروں کے مجموعے کے برعکس ہے جب ہم لامحدود بہت سی حقیقی اقدار کے مجموعے کے ساتھ کام کر سکتے ہیں یا نہیں محدود قدر یا نہیں بالکل واضح نہیں ہے یہ ایک چیز ہے یا حقیقی اعداد کی محدود تعداد کے مجموعے اور حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد کے مجموعے کے درمیان ایک فرق ہے ہمیں اس نتیجے پر نہیں جانا چاہئے کہ حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد کا مجموعہ ہمیشہ لامحدود نمبر ہوگا۔ ہم کسی وقت محدود قدر بھی رکھ سکتے ہیں تو ایک فطری سوال یہ ہے کہ ہم ایک لامحدود رقم کو ایک قطعی معنی کیسے تفویض کرتے ہیں ہم یہ کیسے دیکھتے ہیں کہ آیا لامحدود رقم ایک محدود قدر کے طور پر نکلتی ہے یا ہم اسے نہیں پا سکتے یہ وہ سوالات ہیں جو ہم نے دیے ہیں۔ میں کچھ اور مثالوں کے ساتھ آگے بڑھتا ہوں تاکہ دوسری پریشانیوں کو دیکھا جا سکے جو حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد کے مجموعے سے نمٹنے کے دوران پیش آ سکتی ہیں آئیے ہم اس مثال پر غور کریں جیسا کہ آپ یہاں دیکھ رہے ہیں کہ ہم لامحدود تعداد کے مجموعے کے ساتھ کام کر رہے ہیں۔ حقیقی اعداد کا جو متبادل طور پر مثبت اور منفی ہے 1 منفی نصف 1 ضرب 3 منفی 1 ضرب 4 اور اسی طرح ایک لمحے کے لئے فرض کریں کہ یہ لامحدود رقم اس مفروضے کے ساتھ ایک محدود قدر کے طور پر نکلتی ہے آئیے ہم یہ تلاش کرنے کے لئے آگے بڑھتے ہیں کہ فرض کریں کہ وہ قدر کیا ہے؟ ہم اس لامحدود رقم کو ایک گروپنگ کے ساتھ تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جیسا کہ اس مخصوص گروپنگ کے ساتھ کوئی بھی یہ مشاہدہ کرسکتا ہے کہ پرانتھیسس میں ہر ایک رقم مثبت ہے لہذا ہم محسوس کرتے ہیں کہ دی گئی لامحدود رقم دوسری طرف مثبت قدر کے برابر ہے۔ تھوڑا سا مختلف انداز میں رقم کو یاد کریں جس لامحدود رقم کے ساتھ ہم کام کر رہے ہیں وہ ہے 1 جمع مائنس نصف جمع 1 از 3 جمع مائنس 1 بذریعہ 4 وغیرہ فرض کریں کہ ہم دی گئی سیریز کی شرائط کو اس طرح دوبارہ ترتیب دیتے ہیں مائنس ایک از دو مائنس ایک از چار مائنس ایک بذریعہ 6 مائنس 1 بائی 8 جمع 1 مائنس بائی 10 مائنس 1 بائی 12 مائنس 1 بائی 14 مائنس 1 بائی 16 مائنس 1 بائی 18 جمع 1 بائی 3 اور اسی طرح نوٹ کریں کہ یہاں دی گئی سیریز 1 سیریز اب ہم ان قوسین میں نمبروں کا مجموعہ ایک n کی ہر مثبت اصطلاح سے پہلے ہم ایک بلاک فراہم کرتے ہیں۔ دینے کے کافی منفی شرائط وقت میں تلاش کرتے ہیں تو یہ واضح رہے کہ دی گئی سیریز کا مجموعہ کبھی بھی مثبت نہیں ہو سکتا
اس لیے اس مثال میں جو ہم دیکھتے ہیں وہ لامحدود رقم کے معاملات میں ظاہر ہونے والی اصطلاحات کی ترتیب ہے۔ کسی خاص ترتیب کے سلسلے میں بہت ساری لامحدود رقم ایک حقیقی عدد کے برابر ہوسکتی ہے اور دوسری ترتیب دینے کے سلسلے میں ایک ہی لامحدود رقم ایک مختلف حقیقی نمبر کی رقم ہوسکتی ہے یہ محدود صورت کے برعکس ہے محدود طور پر بہت سی حقیقی اقدار کا مجموعہ ہوگا ہمیشہ ایک ہی ترتیب سے قطع نظر جس ترتیب میں ہم نے اسے متعدد حقیقی قدروں کے مجموعے کے مقابلے میں شامل کیا جب لامحدود بہت سی حقیقی اقدار کے مجموعے سے نمٹتے ہوئے یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ آخر یہ ایک محدود حقیقی نمبر کی نمائندگی کرتا ہے یا ایک لامحدود حقیقی نمبر نہیں ہے بہت واضح دوسری بات یہ ہے کہ جس ترتیب میں ہم حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد کو شامل کرتے ہیں وہ بہت اہمیت رکھتا ہے لہذا اس مثال کے ساتھ کسی کو یہ سمجھنا چاہئے کہ حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد اور اس کی سمتی کے ساتھ معاملہ کرتے وقت کسی کو ہمیشہ پہلے اصل نمبروں کو ترتیب دینا چاہیے جو دوسرے لفظوں میں اس خلاصے میں ظاہر ہونے والے حقیقی نمبروں کو ترتیب دیں اچھی طرح سے ایک خاص ترتیب ترتیب سے مطابقت رکھتی ہے اس طرح حقیقی اعداد کی لامحدود تعداد کے مجموعے سے نمٹنے کے دوران کسی کو صرف لامحدود تعداد کے سیٹ سے شروع نہیں کرنا چاہیے۔ حقیقی اعداد لیکن ایک بار جب آپ کسی ترتیب کے ساتھ شروع کرتے ہیں تو اصل اعداد کی ترتیب سے شروع کرنا چاہیے ان تمام مثالوں ،اور ریمارکس کو ذہن میں رکھتے ہوئے ایک خاص ترتیب کو ترجیح دی جاتی ہے، ہم شروع کرنے کے لیے کچھ رسمی تعریفیں کرنے جا رہے ہیں وغیرہ کہتے ہیں اور ہم a 2 آئیے کچھ اشارے ٹھیک کریں۔ فرض کریں کہ ہمیں حقیقی اعداد کی ایک محدود تعداد فراہم کی گئی ہے، آئیے ہم ایک 1 جمع وغیرہ کے علاوہ اس محدود رقم سے نمٹنا چاہیں گے جو ہمیشہ عام اضافے سے پایا جا سکتا ہے اور جو ہمیشہ ایک a 2 جمع a 1 رقم محدود قدر کے برابر ہوتی ہے اسے سگما اشارے کا استعمال کرتے ہوئے کمپیکٹ انداز میں پیش کیا جا سکتا ہے جو کہ بڑے یونانی خط سگما کا کو sigma aii 1 استعمال کرتے ہوئے ہم ایک 1 جمع ایک 2 جمع وغیرہ کی نشاندہی کرتے ہیں اور ایک زیادہ کمپیکٹ میں فیشن مندرجہ ذیل ہے اس متغیر n کے برابر 1 سے aii جمع وغیرہ وغیرہ لکھنے کی بجائے ہم سمیشن یا سگما a 2 کے برابر لکھنے کے بجائے 1 پلس n سے جمع وغیرہ a 2 جمع sum a 1 کا استعمال کرتے ہوئے اس کی نمائندگی کر سکتے ہیں ۔ سمیشن کا اشاریہ مندرجہ ذیل معنی میں ڈمی ہے کے طور aj j کے برابر to n اشارے کو sigma 1 کے برابر یا aii 1 to n کو کمپیکٹ انداز میں سگما اشارے an وغیرہ جمع کے برابر ہے جو اس سمیشن میں پہلی اصطلاح کی n پر استعمال کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔ یا بطور سمیشن آر آر انڈیکس کی قدر 1 سے کے برابر ہے جسے نچلی حد کہا جاتا ہے اور انڈیکس کی قدر جو اس رقم میں حتمی اصطلاح کی نمائندگی کرتی ہے i نشاندہی کرتا ہے یہاں اوپری حد تھوڑی زیادہ ہے عام طور پر اگر ہمیں 1 سے لامحدودیت کے n اسے اوپری حد کہا جاتا ہے ۔ یہ سگما اشارے ایک نچلی حد ہے اور کی am a ترتیب کے ساتھ فراہم کی جاتی ہے اور اسی طرح آپ کو دیا جاتا ہے فرض کریں کہ ہم a1 a2 a3 a4 برابر ایک ترتیب

am جمع am جمع 1 اور اسی طرح ایک ہم ان اصطلاحات کو جمع کرنا چاہتے ہیں جو کہ ہم m اصطلاحات کا مجموعہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔
جمع 1 جمع وغیرہ تلاش کرنا چاہتے ہیں اور درحقیقت ہم حقیقی اعداد کی محدود تعداد کے ساتھ کام کر رہے ہیں لہذا عام اضافے سے ہم اس رقم کو نچلی حد کو اس رقم میں پہلی اصطلاح کے مساوی n کے برابر aii m تلاش کر سکتے ہیں کومپیکٹ انداز میں پیش کیا جائے کیونکہ سمیشن ہونا چاہئے اور اوپری حد اس رقم میں آخری اصطلاح کے مساوی ہونی چاہئے یہ صرف ایک اشارے کو ٹھیک کرنے کے لئے ہے جو سہولت فراہم کا خلاصہ یاد j مربع j کرے گا۔ وقت اور جگہ کی بچت کرتے ہیں آئیے مثال کے طور پر اس اشارے سے واضح کریں کہ 1 سے 5 کے برابر کریں کہ یہ یونانی خط سگما کا استعمال کرتے ہوئے کمپیکٹ انداز میں بیان کیا گیا خلاصہ ہے اور اس کا مطلب 1 مربع جمع 2 مربع جمع 3 مربع j ہے اور آپ تلاش کر رہے ہیں j ہے اوپری حد کا اشاریہ phi مربع کیا آپ اسے دیکھتے ہیں 1 ہے نچلی حد phi ہے۔ جمع 4 مربع جمع کا مجموعہ 1 سے 5 تک ہے اور یہ 1 جمع 4 جمع 9 جمع 16 جمع 25 ہے جو آپ کے ذہن میں اس اشارے کو ٹھیک کرنے کے لئے j مربع تلاش کریں جو 1 سے 8 کے برابر ہے یاد رکھیں کہ یہ rr ایک اور مثال کے ساتھ سمیشن مائنس 1 پاور d دوبارہ 55 ہے آئیے آگے بڑھیں۔
نچلی حد ہے 1 اوپری حد 8 ہے اور r اشارے حقیقی نمبروں کی محدود تعداد کے مجموعے کے لیے استعمال ہوتا ہے اس مثال میں انڈیکس سمیشن کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ مائنس 1 پاور 1 یہ پہلی اصطلاح ہے جو مائنس 1 پلس مائنس 1 پاور 2 ہے جو 1 پلس مائنس پاور 3 ہے جو مائنس 1 پلس مائنس 1 پاور 4 ہے جو 1 ہے اور اسی طرح اوپری حد آٹھ ہے نچلی حد ایک ہے لہذا آپ آٹھ اصطلاحات کے ساتھ 1 کام کر رہے ہیں آخری اصطلاح مائنس ایک پاور آٹھ ہے جو ایک ہے کیونکہ ہم حقیقی اعداد کی محدود تعداد کے ساتھ کام کر رہے ہیں اس رقم کو کسی بھی ترتیب میں پایا جا سکتا ہے جو بھی ہمارے لئے آسان ہو تو آئیے اس طریقے سے گروپ بنائیں آخر میں ہمیں 0 ملے گا اب ہم ایک تعریف کے ساتھ آگے بڑھتے ہیں یہ تعریف ان مثالوں سے حوصلہ افزائی کرتی ہے جو ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں اور جو ریمارکس ہم نے ایک بات کی ہے وہ یہ ہے کہ لامحدود بہت سے حقیقی اعداد کے مجموعہ سے نمٹنے کے دوران ایک ترتیب ہونی چاہئے جس میں ہم حقیقی اعداد کو شامل کریں۔ یہ ہے کہ ہمیں شروع کرنا چاہئے صرف ایک لامحدود سیٹ کے بجائے ایک ترتیب دوسری بات یہ کہ ہم جوڑنا جاری نہیں رکھ سکتے اور یہ نہیں دیکھ سکتے کہ جب ہم لامحدود رقم کے ساتھ کام کر رہے ہیں تو ان سب کو ذہن میں رکھتے ہوئے آئیے ہم کچھ تعریفیں ترتیب دیتے ہیں جس کا اظہار یہاں ایک سیریز کی تعریف ہے جس کو ہم نے a وغیرہ ہے ۔ تسلسل کے ساتھ منسلک ایک سلسلہ کہلاتا ہے a1 plus a2 plus a3 plus
بتایا ہے کہ ترتیب اور سیریز روزمرہ کی زندگی میں ایک دوسرے کے بدلے استعمال ہوتی ہیں ان دونوں کا مطلب یکے بعد دیگرے واقعات یا اشیاء ہیں جبکہ ریاضی میں ترتیب ترتیب شدہ فہرست کے لیے استعمال ہوتی ہے ۔ یہ نہیں دیکھا کہ یہاں سیریز کا کیا مطلب ہے ایک ترتیب دی گئی تعریف ہے اور آپ اظہار کو 1 جمع ایک 2 جمع ایک 3 جمع وغیرہ پر غور کرتے ہیں اس اظہار کا مطلب وہی ہے جو ہم سیریز سے کرتے ہیں اس طرح غیر رسمی طور پر ترتیب اور سیریز کے درمیان فرق وہ ترتیب ہے نمبروں کی فہرست ترتیب دی گئی ہے جبکہ سیریز ایک مجموعہ ہے یہاں بہت سارے سوالات باقی ہیں کیونکہ ہم ایک لامحدود رقم سے نمٹ سکتے ہیں یہ واضح نہیں ہے کہ آیا اس اظہار کا کوئی معنی ہے یا نہیں معنی بالآخر ایک محدود قدر دے گا یا نہیں ان سوالوں کا جواب بعد میں دیا جا سکتا ہے لیکن اس لمحے کے لیے میں چاہوں گا کہ آپ ایک su m میں یہ سلسلہ کی تعریف کو سمجھیں جو ایک ترتیب کے پیش نظر اس کی اصطلاحات کا مجموعہ ہے جسے ہم ایک سلسلہ کے طور پر کہتے ہیں ہم آگے بڑھیں گے۔ اگلی چند کلاسوں میں سیریز کا تصور آپ کا بہت بہت شکریہ