گڈ مارننگ آہ

تو اب امکان کے لیے بنیادی اصطلاحات متعارف کرانے کے بعد میں امکان کی ایک بنیادی تعریف پیش کروں گا تاکہ جیسا کہ میں نے آپ کو پہلے
کا موضوع 16 میں شروع ہوا تھا۔ 17ویں صدی کا یورپ اور یہ کہ جوئے کے کھیل کے ذریعے میں نے آپ کے ah بتایا تھا کہ امکانی نظریہ
سامنے ذکر کیا کہ موضوع گارڈن آہ کارڈونو کے موجدوں میں سے ایک وہ دراصل ایک مجبور جواری تھا اور درحقیقت اس نے اپنی سوانح عمری
میں لکھا ہے کہ مجھے یہ کہتے ہوئے شرم آتی ہے۔ میں ہر روز جوا کھیلتا تھا اس لیے اب کے ذریعے جوئے کے کھیل میں انہوں نے مختلف قسم
کے واقعات کے امکانات پر غور کرنا شروع کر دیا

تو مثال کے طور پر اگر آپ دو ڈائس ٹاس کرتے ہیں

تو اس بات کا کیا امکان ہے کہ آپ کو اچھی طرح مل جائے گا ، م

توقع م

توقع نمبر کیا ہے؟ اس طرح کے ایک 12 کو پھینکنے کے لیے جو تھرو کی ضرورت ہوتی ہے اس لیے انہوں نے مختلف قسم کے امکانات پر غور
کرنا شروع کیا اور پھر وہ اس کے مختلف دوسرے ریاضی دانوں سے رابطے میں آئے۔ وقت آہ یعنی فارمیٹ پاسکل جیمز برنولی آہ کو بڑھاتا ہے
درحقیقت ایک تاریخی سیاق و سباق ہے جس میں کچھ مسئلہ آئزک نیوٹن کو بھی پیش کیا گیا تھا اور ایسا لگتا ہے کہ اس نے درحقیقت اس مسئلے کا
صحیح جواب دیا تھا تاکہ اس وقت بے ترتیب تجربات کی نوعیت یہ تھی کہ آپ کے پاس نتائج کی ایک محدود تعداد کیونکہ اس سارے سکے کو ٹاس
کرنا ڈائی تھرونگ کارڈ ڈرائینگ گیمز وغیرہ ان سب میں آپ کے پاس نتائج کی ایک محدود تعداد ہے اور یہ بھی آپ یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ وہ سب
یکساں طور پر منصفانہ طور پر فرض کر رہے ہیں لہذا امکان کی پہلی تعریف جسے ریاضیاتی تعریف کہا جاتا ہے یا احتمال کی کلاسیکی تعریف
اسی تصور پر مبنی ہے صرف کلاسیکی یا آپ کہہ سکتے ہیں کہ اب کی ریاضی کی تعریف ٹھیک ہے اس تعریف کی شکل جو میں یہاں لکھ رہا ہوں
دراصل فرانسیسی ریاضی دان لاپلاس سے منسوب ہے اور یہ شائع ہوا تھا۔ ان کی کتاب میں 1813 کے نظریات میں موت کے امکانات اس کتاب
میں یہ تعریف شائع کی گئی تھی۔ اگرچہ لاپلیس سے پہلے تقریباً 100 150 سال تک تعریف کی شکل استعمال کی جا رہی تھی لہٰذا جو فارم یہاں دیا
گیا ہے اور وہ آپ کی کلاس 11 اور 12 کی نصابی کتاب میں بھی موجود ہے

تو فرض کریں کہ کسی بے ترتیب تجربے کے ممکنہ نتائج نہیں ہیں

تو میں صرف ہوں۔ یہاں اس نمبر کا ذکر کر رہے ہیں اور آپ کو اس حصے کے بارے میں محتاط رہنا ہوگا لہذا جب میں کہتا ہوں کہ یہ ایک نمبر
ہے

تو اگر آپ کہتے ہیں کہ ایک سکے کو اچھالنا ہے

دو کے برابر ہے سکے پھر یہ چار ہو جاتے ہیں اگر آپ کہتے ہیں کہ دو نرد پھینکنا n تو آپ کے دو نتائج ہیں لہذا اگر آپ کہتے ہیں کہ
تو یہ چھتیس وغیرہ بن جاتا ہے اس کا مطلب ہے کہ آپ یہاں نتائج کی تعداد گن سکتے ہیں لہذا ایک بے ترتیب تجربہ کے ممکنہ نتائج نہیں ہوتے ہیں
اور اس سے بھی اہم بات یہ ہے کہ جس کے اتنے ہی امکانات ہوتے ہیں لہذا یہ دوبارہ کہہ رہا ہے۔ ہم منصفانہ طور پر فرض کر رہے ہیں اس
لیے جیسا کہ میں نے آپ کو بتایا کہ اس تعریف کی اصل جوئے کے کھیلوں میں ہے لہذا جہاں فطری طور پر یہ سمجھا جاتا ہے کہ سکہ منصفانہ
ہے یا ڈائی منصفانہ ہے یا جب آپ کسی سے کارڈ کھینچتے ہیں۔ تاش کا ڈیک پھر تمام کارڈز کے یکساں طور پر تیار کیے جانے کا امکان ہے وغیرہ
اسی لیے اس قسم کی پابندی اس اصل تعریف میں رکھی گئی تھی لہذا یہ نتائج جو اتنے ہی امکانات ہیں اور پھر ہم اسے تھوڑا سا زیادہ درست بنانے
کے لیے کہتے ہیں کہ ہم باہمی طور پر خصوصی ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ نتائج کی گنتی یہ ہے کہ آپ بالکل درست اور درست کہہ سکتے ہیں
اس کا مطلب یہ ہے کہ اس بات کا کوئی امکان نہیں ہے کہ ایک نتیجہ دوسرے نتیجہ کے ساتھ الجھ جائے وغیرہ وغیرہ اتنا باہمی طور پر اور پھر
کچھ بھی اتنا مکمل نہیں چھوڑا جاتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نتائج کی کل تعداد جو ہم کر سکتے ہیں ایسی پابندیاں لگانے پر غور کرنا کہ ان کا
یکساں امکان ہے اور ان کے اوور لیپ ہونے کا کوئی امکان نہیں ہے اور ان سب پر غور کیا جاتا ہے اب ایسی صورتحال میں ایک واقعہ ہونے دیا
کے اس e کے امکان کی وضاحت اس طرح کریں کہ ہم e جائے تاکہ ان نتائج میں سے ایک واقعہ کے ہونے کے لیے سازگار ہو۔ وقوعہ
جو یکساں طور پر mes آؤٹکو کی کل تعداد ہے n کے برابر ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر n کے m کو استعمال کرتے ہیں جو p اشارے
کے امکان کو e کے وقوع پذیر ہونے کے موافق ہیں پھر واقعہ e واقعہ m ممکنہ طور پر باہمی طور پر خصوصی اور مکمل ہیں اس میں سے
سے تعبیر کیا جاتا ہے اور درحقیقت یہ وہ تعریف ہے جو آپ درحقیقت دیے گئے مختلف مسائل کو حل کرنے کے لئے استعمال کرتے n سے m
ہیں۔ آپ کی آہ کلاس کی نصابی کتابوں میں جہاں کہیں سے گیندیں کھینچنے سے متعلق بہت سارے مسائل ہیں

تو کچھ مسئلہ ہوگا جیسے چار کالی گیندیں تین سرخ گیندیں اور دو سفید گیندیں ہیں اور فرض کریں کہ چار گیندیں کھینچیں

تو کیا ہے؟ امکان ہے کہ آہ اس چار گیندوں میں دو سیاہ ایک سرخ اور ایک سفید ہے اس طرح کے مسائل جو آپ حل کر رہے ہوں گے جب آپ ان
مسائل کو حل کر رہے ہوں گے دراصل آپ یہ تعریف استعمال کر رہے ہیں کیونکہ آپ بے ترتیبی کو استعمال کر رہے ہیں تاکہ ان سب کے لیے
یکساں طور پر ممکنہ نتائج کا اندازہ لگایا جا سکے ۔ اب ان کو

تو میں کچھ مسائل کا آہ حل دیکھوں گا لیکن تھوڑی دیر بعد لیکن اس سے پہلے میں ان تعریفوں پر جامع بحث کرتا ہوں جب میں کہہ رہا ہوں کہ
وہاں ممکنہ نتائج ہیں میں اصل میں یہ فرض کر رہا ہوں کہ میں تمام نتائج کو شمار کرنے کے قابل ہوں اور پھر ان تمام پابندیوں کو بھی اب یہ دیکھو
میں ایک بہت ہی آسان سوال پوچھتا ہوں کہ کل بارش ہونے کا کیا امکان ہے؟ یہاں سے سوال کا جواب نہیں دیا جا سکتا کیونکہ کل موسم کے کیا
امکانات ہیں اس لیے آپ کہہ سکتے ہیں کہ بارش ہبتی ہو سکتی ہے دھوپ ہو سکتی ہے یا ابر آلود ہو سکتا ہے لہٰذا تین ممکنہ نتائج ہر ایک کے ساتھ
آہ کے برابر ہونے کا امکان ہے لہٰذا یہ کوئی معقول بات نہیں ہے۔ معقول مفروضہ کہ دھوپ والی بارش اور ابر آلود ہونے کا یکساں امکان ہے
کیونکہ پورے سال میں کتنے دن بارش ہوتی ہے اور کتنے دن دھوپ ہوتی ہے اور کتنے دن ابر آلود رہتے ہیں اگر آپ پچھلے 50 یا 100 سالوں پر
نظر ڈالیں

تو آپ کو پتہ نہیں چلے گا۔ کہ وہ یکساں ہیں اور اس لیے اس قسم کی شرط درست نہیں ہے اس لیے جب میں کہتا ہوں

تو مجھے یہاں نقصانات لکھنے دیں یا آپ اس تعریف کی خامیاں کہہ سکتے ہیں

یا آپ کہہ سکتے ہیں کہ نتائج کے مساوی امکانات کی ضرورت نہیں ہے آئیے ہم اس یکساں امکان والی چیز کے دوسرے ents تو ایک یہ ہے
استعمال پر نظر ڈالیں یہاں تک کہ اگر میں صرف ایک سکہ ٹھیک کہوں یا میں ڈائی پر غور کروں

تو اگر میں ڈائی پر غور کر رہا ہوں اور میں فرض کر رہا ہوں کہ سب ایک دو تین چار پانچ چھ کے ہونے کا ایک ہی امکان ہے اس کا مطلب ہے کہ
میں ان میں سے ہر ایک کو چھ ایک کرکے امکان مختص کر رہا ہوں اب کیا یہ مناسب ہے فرض کریں کہ میں اس بات پر غور کر رہا ہوں کہ میں
اصل میں جوئے کے بارے میں بات کر رہا ہوں اور ایک حقیقی جوئے میں ایسے کھلاڑی ہوتے ہیں جو کسی کے پاس ہوتے ہیں۔ ڈائی سپلائی کر دی
اب اگر وہ شخص جس نے ڈائی دی ہے وہ بے ایمان ہے

تو ہو سکتا ہے کہ وہ کسی ایک پارٹی یا کسی ایک کھلاڑی کے ساتھ لیگ میں ہو اور وہ درحقیقت جانبدارانہ موت اس طرح دے کہ یہ کسی کے حق
میں ہو گا مثال کے طور پر کھلاڑیوں میں سے یہ ہو سکتا ہے کہ یہ 5 اور 6 کو بہت زیادہ پسند کر رہا ہے اور وہ شخص دوسرے کھلاڑی کو جانتا
ہے اور اس لیے وہ پانچ اور چھ سے زیادہ بار کال کرے گا اور وہ اس پر شرط لگائے گا اور اگر آپ کو آہ سوم یاد ہے

تو وہ جیت جائے گا۔ مہابھارت میں اس طرح کی افسانوی کہانی تھی اس لیے کوارواس اور پانڈووں کے درمیان جوا کھیلا جاتا تھا اور پھر

یودھیستھرا ہارتا تھا کیونکہ شکونی دوریودھن کے ساتھ کھیلتا تھا اور کہا جاتا ہے کہ اس نے آہ کا متعصبانہ سیٹ استعمال کیا تھا اس وقت ان کے پاس جو کچھ تھا وہ آہ نہیں مرتا تھا۔ اس چیز کو استعمال کیا جاتا تھا جسے وہ ان دنوں پاسا کہتے تھے لہذا گیم نے فریقین میں سے ایک کو پسند کیا
اب ایسی صورت میں آپ کلاسیکی تعریف کی تعریف کو لاگو نہیں کرسکتے ہیں کیونکہ مساوی طور پر ممکنہ شرط کی خلاف ورزی کی جاتی ہے لہذا پہلی چیز یہ ہے کہ نتائج کی ضرورت نہیں ہے۔ یکساں طور پر ایک اور نکتہ جو کہ منطقی طور پر بھی غلط ہے وہ یہ ہے کہ ہم اصل میں امکان کی تعریف کر رہے ہیں جس کا مطلب ہے کہ میں یہ کہہ رہا ہوں کہ اس طریقے سے ہم اصل میں امکان کو تلاش کر رہے ہیں جب میں کہتا ہوں کہ اتنا ہی امکان ہے کہ میں پہلے ہی تعریف میں احتمال کی تعریف ڈال رہا ہوں۔ بذات خود جو کہ سرکلر لاجک ہے لہٰذا منطقی نقطہ نظر سے بھی یہ تعریف اس اکاؤنٹ پر ناکام ہو رہی ہے۔ آئیے ایک اور عام مسئلہ پر غور کریں جس میں میں نے الیکٹرانک آلات کی زندگی کے بارے میں بات کی تھی ٹھیک ہے فرض کریں کہ ہم ایک الیکٹرانک آلات کی زندگی پر غور کر رہے ہیں ٹھیک ہے
تو عام طور پر شاید ہم ایک اچھے معیار کا لیپ ٹاپ جانتے ہوں
تو اگر میں شمار کر رہا ہوں کہ آپ مہینوں میں زندگی جانتے ہیں
تو ہم کہیں گے کہ لیپ ٹاپ کی زندگی صفر کے درمیان ہے ساٹھ ٹھیک ہے
کی وضاحت نہیں n اب یہاں ہے n تو اس کا مطلب ہے کہ آپ پانچ سال تک کہہ سکتے ہیں لیکن اگر آپ دیکھیں کہ کتنے امکانات ہیں جو یہاں کی جا سکتی کیونکہ یہ حقیقت میں محدود ہے۔ میں ایک وقفہ لے رہا ہوں لہذا 0 سے 60 کے درمیان تمام قدریں موجود ہیں لہذا ضروری نہیں کہ ہم کچھ بتانے کے قابل ہو جائیں گے بھی غلط ہے اس کا مطلب ہے کہ ہر حالت میں اس سرمائے n صرف عددی مہینے ہی ہوں لہذا اگلا قیاس کہ کی ضرورت نہیں ہے ممکن ہے ٹھیک ہے
ان چیزوں پر قابو پانے کے لئے ابھی محدود نہیں ہے اعداد و شمار کے ماہرین اور دوسرے سائنسوں میں مثال کے طور پر طبیعیات یا n تو یہاں تعریف جو کہ نتائج کے مشاہدے پر مبنی ہے جس کا مطلب ہے کہ ایک ea معاشیات وغیرہ میں وہ سوچنے لگے کہ ہم حاصل کر سکتے ہیں طویل عرصے کے دوران اگر آپ مشاہدہ کرتے ہیں اور پھر آپ دیکھتے ہیں کہ رونما ہونے والے واقعات کی تعداد کا تناسب کیا ہے
تو ہم اسے امکان کے اشارے کے طور پر سمجھتے ہیں تاکہ تجرباتی تعریف کہلاتی ہے جس کا مطلب ہے کہ تعریف تجربے پر مبنی ہے ٹھیک ہے لہذا یہ دوسری تعریف جسے رشتہ دار تعدد یا امکان کی تجرباتی تعریف کہا جاتا ہے یہ اصل میں فون کے چوہوں سے منسوب ہے تعریف مندرجہ ذیل ہے فرض کریں کہ ایک ہے ترتیب تجربہ بڑی تعداد میں کیا جاتا ہے۔ اوقات آزادانہ طور پر یکساں حالات میں فرض کریں کہ تجربے کے n ایک بار پیش آتا ہے e ٹرائلز میں ایک واقعہ
تو میں اسے یہاں سب اسکرپٹ نوٹیشن کے طور پر صرف یہ بتانے کے لیے رکھ رہا ہوں کہ اگر میں 10 ٹرائلز کر رہا ہوں کتنی بار ہو رہا ہے میں اسے ایک کہوں گا۔ 10. فرض کریں کہ میں 20 میں سے 20 بار ٹرائل کرتا ہوں کہ کتنی بار ہوا ہے فرض e تو واقعہ کہ اعداد کچھ بھی ہو سکتے ہیں یہ تین سات گیارہ یا کچھ بھی ہو سکتے ہیں t کریں کہ میں اس نمبر پر کال کرتا ہوں 8 1
کے n کی حد n ٹرائلز میں یہ کتنی بار ہوتا ہے میں اسے ٹھیک کہتا ہوں پھر اگر n تو ان نمبروں کو ایک کے طور پر ریکارڈ کیا جاتا ہے یعنی لامحدودیت کی n کی حد ہونے کی وضاحت کرتے ہیں کیونکہ n سے n کے امکان کو e انفینٹی کی طرف جاتا ہے۔ موجود ہے ہم n طور پر طرف جاتا ہے لہذا جسمانی طور پر یہ کیا بتاتا ہے کہ آزمائشوں کی کل تعداد میں سے یہ کیا ظاہر کر رہا ہے کہ آپ کا خاص واقعہ کتنی بار پیش سے زیادہ طویل مدتی پھر اس کی تعریف اس واقعہ کے امکان کے طور پر کی جاتی ہے a آرہا ہے اگر اس تناسب کی حد ہے جس کا مطلب ہے لہذا مثال کے طور پر ہم کہتے ہیں کہ جب ایک نیا بچہ پیدا ہونا ہے
تو ہم لڑکے کے لئے یا لڑکی کے لئے مساوی امکان مختص کرتے ہیں
تو ہم ایسا کیوں کرتے ہیں کیونکہ ہزاروں سے زیادہ برسوں سے دیکھا گیا ہے کہ برز کی کل تعداد میں سے تقریباً 50 فیصد خریدار اور 50 فیصد لڑکیاں ہیں لہٰذا اگر ہم پرندوں کی کل تعداد کے مقابلے لڑکوں کی تعداد کے تناسب پر غور کریں ہم نصف امکان کو اسی طرح مختص کرتے ہیں اگر میں یہ کہوں کہ اگلے سال مون سون کے معمول کے wh y تو یہ تناسب تقریباً نصف ہے۔ مطابق ہونے کے امکان کا مطلب ہے کہ وہ یقینی طور پر اس بات کی وضاحت کر رہے ہیں کہ اتنی زیادہ بارش ہونے کا امکان پوائنٹ نو ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ہم اس قسم کا کہتے ہیں۔ بیان کی وجہ یہ ہے کہ پچھلے سو یا دو سو سالوں میں یہ دیکھا گیا ہے کہ اگر آپ بیس سال کا مشاہدہ کریں
تو بیس سالوں میں سے دو بار مانسون معمول کے مطابق نہیں ہوتا اگر ہم چالیس بار کہیں
تو ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ تقریباً چار بار اگر ہم سو سال کا مشاہدہ کرتے ہیں
تو مانسون معمول کے مطابق نہیں ہے
تو ہم دیکھتے ہیں کہ پچھلے سو سالوں میں تقریباً نو سے دس بار مون سون معمول کے مطابق نہیں رہا ہے، جس سے اس بیان کی ساکھ ملتی ہے کہ مانسون کے آنے کے 90 فیصد امکانات ہیں۔ اگلے سال میں نارمل کیونکہ یہ تجربے پر مبنی ہے اس لیے ہم دیکھ رہے ہیں کہ کل تجربات کی ایک خاص واقعہ جس میں ہماری دلچسپی ہے وہ آپ کو یہ بتانے کے لیے پیش آیا ہے کہ اس قسم کی ti mes کل تعداد اور اس میں سے کتنے چیز عملی طور پر کس طرح لاگو ہوتی ہے، میں ایک آہ نظریاتی مثال لیتا ہوں ٹھیک ہے نظریاتی مطلب بنیادی طور پر فرضی تجربہ ٹھیک ہے فرض کریں کہ سکے کے ٹاس کرنے کی فرضی ترتیب کا نتیجہ نکلتا ہے۔ مندرجہ ذیل نتائج ٹھیک ہیں لہذا میں اسے فرضی طور پر ڈال رہا ہوں لہذا فرض کریں کہ ہیڈ ہیڈ ٹیل ہیڈ ہیڈ ٹیل ہیڈ ہیڈ ہیڈ ٹیل وغیرہ
تو میں نے بتایا کہ یہ عملی طور پر فرضی ہے یہ تھوڑا سا مختلف ہوگا لیکن یہاں میں ایک بہت عمدہ ڈھانچہ ڈال رہا ہوں۔ آئیے دیکھتے ہیں کہ سر کا امکان کیا ہے لہذا اگر ہم سر کے امکان کا حساب لگانا چاہتے ہیں
آئیے دیکھتے ہیں کہ تناسب کیا ہے یہاں میں پہلی آزمائش میں اس مخصوص ترتیب میں لکھوں گا۔ سر n تو مجھے تناسب پر غور کرنا ہوگا اور ہے لکھ رہا ہوں جب دوسرے ٹرائل میں دوبارہ کیا گیا by ni تو تناسب ایک ایک کرکے ہے جو کہ ایک
تو ہمیں سر ملا
تو تناسب دو سے دو ہے تیسری بار پھر سر آیا
تو تناسب تین سے تین ہو جاتا ہے اگلے ایک میں ایک دم آیا
تو اس کا مطلب ہے کہ کل چار آزمائشوں میں سے تین سر آئے ہیں
تو تناسب تین بائے چار ہو جاتا ہے آپ اسے ایک ایک دو دو تین تین کر کے دیکھیں تین سے چار، آئیے اگلے ایک پر پھر سے ایک سر کا مشاہدہ کیا گیا ہے
تو پانچ آزمائشوں میں سے آپ کے پاس چھ آزمائشوں میں سے چار سر ہیں آپ کے پاس سات آزمائشوں میں سے پانچ سر ہیں آپ کے پاس چھ سر ہیں پھر ایک دم کا مشاہدہ کیا گیا ہے
تو اس میں سے آٹھ ٹرائلز آپ کے پاس چھ سر ہیں مجھے تھوڑا سا مزید جاری رہنے دیں اگلی مدت سات ضرب نو ہے آپ کے پاس 8 ضرب 10 چاہے n ہے آپ کے پاس 9 ضرب 11 اور پھر آپ کے پاس 9 ضرب 12 ہے اور اسی طرح اب میں حد معلوم کرنا چاہتا ہوں اس کا ایک بذریعہ حد موجود ہے کیونکہ اگر حد موجود ہے

تو یہاں سر کا امکان ہوگا ٹھیک ہے لہذا اس مقصد کے لئے میں یہاں تھوڑا سا ریاضیاتی فارمولیشن پر غور کروں گا لہذا آپ تنقیدی طور پر مشاہدہ کریں کہ ترتیب کیسا نظر آرہا ہے اگر آپ دیکھیں چوتھی مدت h اگر آپ آٹھویں ٹرم کو دیکھیں
تو یہ تین بائی چار ہے اگر آپ آٹھویں ٹرم کو دیکھیں
تو آٹھویں ٹرم ہے آہ سکس بائی آٹھ جو کہ اصل میں تین بائی چار ہے پھر اگر آپ بارہویں ٹرم کو دیکھیں جو دوبارہ نو بائی بارہ ہے جو کہ تین بائی چار ہے
ظاہر کر سکیں کیا میں n تو میں کر سکتا ہوں اسے تھوڑا سا اور ریاضی کی شکل میں ڈالیں اس طرح میں اس طرح ڈالتا ہوں تاکہ ہم ایک بذریعہ لکھ سکتا ہوں شروع میں دیکھیں یہ تین سے چار ہے پھر یہ تین میں دو سے چار میں دو ہے پھر یہ تین سے تین میں k اسے تین کے بذریعہ چار ہے k کی شکل چار n چار سے تین میں تقسیم ہوتا ہے اس کا مطلب ہے کہ اگر
kٹرائلز ٹھیک ہیں لہذا اس کی میں نمائندگی کرنے کے قابل ہوں اب ہم اس سے پہلے ایک دیکھتے ہیں۔ یعنی 4 k ٹرائلز میں سے 3 k تو 4 مائنس 1 دیکھیں kمائنس 1 اب اگر آپ یہاں 4
ہے یہاں دیکھیں یہ 8 ہے یہاں یہ 7 ہے لیکن نمبر صرف 6 ہے اس کا مطلب ہے کہ یہاں بھی آپ بارہ آزمائشوں kتو سروں کی تعداد درحقیقت 3 میں سے دیکھیں گے۔ گیارہ میں سے نو تھے آپ بھی نو کا اضافہ کریں
مائنس ایک k کی شکل چار n مائنس ایک اگر by four k تو اس کا مطلب ہے کہ یہ تناسب ہم لکھ سکتے ہیں اسے تین ک تقسیم کیا گیا ہے۔ ہے
تو آئیے اگلی کو دیکھتے ہیں فرض کریں میں اسے دیکھتا ہوں
مائنس ایک آپ یہاں بھی مشاہدہ کر سکتے ہیں اور آپ یہاں بھی مشاہدہ k مائنس ٹو ہے اور یہاں یہ ایک کم ہو گیا ہے یعنی تین k تو یہاں یہ چار شکل فور ک مائنس ٹو کا ہے اور اگلا اگر n کر سکتے ہیں اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ تین ک مائنس ون کی شکل میں ہے چار ک مائنس دو سے اگر آپ دیکھیں
کے برابر ایک دو k مائنس تین کے لیے k کی شکل ہے چار n تو یہ اصل میں تین ک مائنس ہے۔ دو کو چار ک مائنس تین سے تقسیم کیا گیا اگر ریاضی کی شکل میں دیکھ سکتے ہیں میں اس کے اتحاد کے طور پر لکھ سکتا ہوں۔ چار بعد n اور اسی طرح آپ یہاں یہ مکمل ترتیب ایک بذریعہ اصل میں لامحدودیت کی طرف جاتا ہے اور آئیے یہاں ان میں n اب لامحدود کی طرف جاتا ہے اگر n اور اب میرا مقصد حد کو لینا ہے جیسا کہ سے ہر ایک میں حد پر غور کریں اصل میں یہ اصطلاح ہے کہ حد کے کے منسوخ ہونے کا سوال ہی پیدا نہیں ہوتا ہے۔
سے تقسیم کرتے ہیں k سے چار مائنس ایک کو k تو درحقیقت یہ تین سے چار ہے اگر آپ غور کریں کہ ایل کیا ہے۔ تین کی تقلید کریں اگر آپ لامحدود ہوتا ہے k تو اگر میں حد لیتا ہوں جیسا کہ
تو یہ حد بھی تین سے چار ہوتی ہے اگر میں اس اصطلاح پر غور کرتا ہوں
لہذا اگر میں حد لیتا ہوں k سے چار منفی دو سے k تو یہ اصطلاح بھی تین مائنس ایک سے تقسیم
تو یہ صفر ہو جاتا ہے یہ صفر ہو جاتا ہے
تو حد تین سے چار ہوتی ہے اسی طرح اگر میں یہاں حد لیتا ہوں
کو تقسیم کرتا ہوں k کو چار منفی تین سے k تو یہ تین منفی دو سے
تو اگر میں یہاں حد لیتا ہوں
تو یہ تین سے ہو جاتا ہے۔ چار نتیجے کے طور پر ہم یہاں جو کہہ رہے ہیں وہ یہ ہے کہ تمام بعد والے تین سے چار ہو جاتے ہیں اس لیے ترتیب تین ضرب چار ہے n کی حد ایک بذریعہ
برابر تین ضرب چار کے برابر ہے جو کہ سر کا احتمال ہے n تو حد ایک بذریعہ
تو اس میں فرضی تجربہ جس میں میرے پاس تین سر تھے جس کے بعد ایک دم بار بار ہوتا ہے ہم توقع کرتے ہیں کہ سر کے ہونے کا امکان دم سے تین گنا زیادہ ہے اور میں نے یہاں درحقیقت متعلقہ تعدد کی تعریف کا اطلاق کرکے دکھایا ہے کہ آپ کو حقیقت میں وہی جواب ملے گا۔ لہذا اس مشق کا مقصد آپ کو یہ بتانا تھا کہ یہ متعلقہ تعدد کی تعریف امکان کی اصل عملی تعریف ہے لہذا جب ہم ڈھیلے بیانات دیتے ہیں
تو ہم کہتے ہیں کہ اس سال گندم کی اوسط فی ہیکٹر پیداوار پچھلے سال سے زیادہ ہوگی میں سالوں سے مشاہدہ کر رہا ہوں اور سالوں کے دوران ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ اس خاص قسم کی آب و ہوا میں یا اس خاص قسم کی صورتحال میں جہاں آبپاشی کی سہولتیں اچھی ہیں یا بیجوں کا معیار اچھا ہے
تو فی ہیکٹر اوسط پیداوار زیادہ ہوتی ہے۔ اس کا مطلب زیادہ ہے لہذا یہ ڈھیلا بیان درحقیقت یہ ہے کہ آپ تجربہ پر مبنی تعریف یا تجرباتی تعریف یا امکان کی نسبتہ تعدد تعریف کہہ سکتے ہیں اور حقیقی زندگی کے حالات میں سوائے نصابی کتاب کے اس قسم کے حالات کے جہاں ہم آہ کوائن ٹاسنگ ڈائی پھینکنے یا خشک ہونے کے بارے میں بات کرتے ہیں۔ میرا مطلب ہے کہ گیندوں کے خشک ہونے وغیرہ کے مسائل معمول کی مشق میں یعنی آہ کہنا نہیں ہے آپ کو یہ بتانے کے لیے کہ آپ کلاس روم میں یا امتحان ah تعریف y ہم اصل میں رشتہ دار تعدد کا اطلاق کرتے ہیں۔ میں کوئی مسئلہ کیسے کریں گے جب امتحان میں مسئلہ دیا جائے گا
تو ہم اصل میں تجربہ بیان کر رہے ہیں اس لیے آپ اصل میں شرائط کو لاگو کر سکتے ہیں ۔ اس لیے آپ اس کی بنیاد پر مسئلہ حل کر رہے ہیں یا کچھ اور مسائل میں کچھ بنیادی امکانات پہلے ہی دے دیے گئے ہیں اس کا مطلب ہے کہ آپ سے ان کا حساب لگانے کے لیے نہیں کہا گیا ہے بلکہ کا امکان وغیرہ اگر بنیادی احتمالات آپ کو a union b یا union b union c ان کی بنیاد پر آپ سے حساب لگانے کے لیے کہا گیا ہے دیے جائیں
تو ٹھیک ہے اب دوسرا سوال یہ ہے کہ کیا اس تعریف کو امکان کی عالمگیر تعریف کے طور پر اپنایا جا سکتا ہے اس کا جواب پھر نہیں ہے کیونکہ ایک ریاضیاتی طور پر عالمگیر تعریف ہے جس کا مطلب ہے کہ فریم ورک ہر جگہ کارآمد ہونا چاہئے یا اس کا مطلب ہے کہ جو بھی مسئلہ آرہا ہے پھر سے میں آپ کو دکھاؤں گا کہ اس تعریف میں بھی مسائل ہیں اس hat framework کے اندر حل کرنے کے قابل ہونا چاہئے۔ t آپ کو لیے ایک یا دو آپ آسانی سے تعریف کر سکتے ہیں اس لیے پہلی بات یہ ہے کہ آپ کے پاس کافی تجرباتی ڈیٹا ہونا چاہیے جس کا مطلب ہے کہ پچھلا تجربہ جہاں سے آپ حقیقت میں امکان کا حساب لگا سکتے ہیں۔ دستیاب نہیں ہے
تو رشتہ دار تعدد کی تعریف کا اطلاق نہیں کیا جا سکتا اس لیے ہمارے پاس کافی تعداد میں ٹرائلز اور ان کے نتائج ہونے چاہئیں، اس لیے اگر آپ کو اچانک کوئی مسئلہ درپیش ہو جس کے لیے آپ کے پاس یہ جاننے کا کوئی طریقہ نہیں ہے کہ آزمائشیں کیا تھیں اور کیا تھیں۔ نتائج تھے
تو آپ اس تعریف کو لاگو نہیں کر پائیں گے اس لیے مثال کے طور پر آپ ایک کمرے میں بیٹھے ہیں جہاں بڑی تعداد میں کرسیاں ہیں آپ ایک کرسی پر بیٹھ جاتے ہیں اور سوال یہ ہے کہ جب آپ بیٹھے ہوں
تو اس بات کا کیا امکان ہے؟ کرسی پر بیٹھ کر کرسی ٹوٹ جائے گی
تو قدرتی طور پر اس قسم کے سوال پر ہمیں ہنسنے کی طرح محسوس ہو سکتا ہے لیکن یہ درست سوال ہے لیکن جواب درست نہیں ہو سکتا۔ کیونکہ آپ کے پاس ڈیٹا نہیں ہے جس کا مطلب ہے کہ پہلے جب اتنے طلباء کرسیوں پر بیٹھے تھے vided

تو کتنی کرسیاں ٹوٹیں اس لیے اس سوال کا جواب اس مخصوص سوال میں نہیں دیا جا سکتا اس لیے کئی بار لوگ سوال اٹھاتے ہیں اور لوگوں کو ان
سوالات پر ہنسنے کا احساس ہوتا ہے لیکن وہ بالکل درست شماریاتی سوالات ہیں بات یہ ہے کہ ہمارے پاس چونکہ آپ کے نظریہ کو لاگو کرنے
کے لیے کافی ڈیٹا نہیں ہے اس لیے آپ ان سوالوں کے جواب نہیں دے سکتے اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ نظریہ امکان غلط ہے یا یہ نامکمل ہے
یا ایسی کوئی چیز حقیقت میں موجود نہیں ہے۔ نظریہ درست ہے لیکن آپ تمام سوالوں کے جواب نہیں دے سکتے جب تک کہ کافی مقدار میں ثبوت
نہ ہوں یا آپ یہ کہہ سکتے ہیں کہ آپ کے پاس ڈیٹا دستیاب ہے آہ یہ سوال بھی کئی بار اٹھایا جاتا ہے مثال کے طور پر رائے عامہ کے انتخابات
جب آپ جنرل کر رہے ہوتے ہیں
تو کیا ایگزٹ پول ہوتے ہیں؟ انتخابات ہوں یا دوسری قسم کے انتخابات ہوں اور پھر سوال کیا جاتا ہے کہ کسی خاص سیاسی حصے کا کیا امکان
اب جیتنے والا ہے آپ نے دیکھا ہو گا کہ جوابات ہوں گے جو مختلف ہوں گے کیونکہ کئی ایجنسیاں ایسی ہوں گی جو ایک ہی دے رہی ہوں y ہے۔
گی جو ایک ہی سوال کا جواب دے رہی ہوں گی لیکن ان کے جوابات تھوڑا مختلف ہوں گے ووٹوں کے فیصد کے لحاظ سے مختلف نشس
توں کی تعداد میں فرق ہوگا ایک بات یہ ہے کہ ان میں سے ہر ایک صورت میں آپ کے نمونے کی جگہ خود بدل جاتی ہے مثال کے طور پر اگر آپ
سیٹوں کی تعداد کو دیکھ رہے ہیں
تو نمونہ کی جگہ مختلف ہے اگر آپ طاقت کے فیصد کو دیکھ رہے ہیں
تو آپ کے نمونے کی جگہ مختلف ہے لہذا اس طریقہ کار پر منحصر ہے کہ وہ ایجنسیاں جنہوں نے سروے کیا ہے اس کی بنیاد پر جوابات مختلف
ہوں گے اور اسی وجہ سے آپ کے پاس کافی مختلف جوابات ہوں گے جو آپ کہہ سکتے ہیں کہ ایسا نہیں ہے۔ یعنی تھیوری آف پربیبلٹی یہاں
اور آیا اس کا اطلاق صحیح ata لاگو نہیں ہے یہ قابل اطلاق ہے لیکن عملی اطلاق کے لیے کافی تعداد میں شرائط کی ضرورت ہوتی ہے۔
طریقے سے ہوا ہے یا نہیں اگر اس طریقے سے نہیں کیا گیا
تو مسائل ہوں گے اس لیے ہمارے پاس کافی تعداد میں ٹرائلز اور ان کے نتائج درج ہونے چاہئیں مثال کے طور پر صنعتیں عام طور پر یہ
مینوفیکچرنگ انڈسٹریز اس لیے وہ اسے معمول کے مطابق لاگو کریں گی۔ تجرباتی تعریف مثال کے طور پر وہ کہتے ہیں کہ نقائص کی تعداد کیا
ہے
تو ہر 100 پروڈکٹ کے 100 یونٹس میں سے وہ 10 کا نمونہ لیں گے جس میں سے وہ چیک کریں گے کہ کتنے ٹھیک ہیں یا نہیں
تو فرض کریں کہ 10 میں سے سب ہیں ٹھیک ہے
تو فرض کریں کہ اس طرح وہ ایک گھنٹے کی مدت میں دس بار ٹرائل کرتے ہیں
تو ایک گھنٹے کے عرصے میں ام میں سے مثال کے طور پر انہوں نے دس ہزار چیزیں پیش کی ہوں گی اور ہر سو میں سے دس لے لی ہیں اور وہ
تعداد ریکارڈ کر رہے ہیں ۔ اچھے یا برے کی تعداد
تو دس ہزار میں سے فرض کریں کہ آپ نے سو نمونوں میں سے سو نمونے لیے ہیں یعنی اب آپ نے 1000 میں سے کل ایک ہزار یونٹ لیے ہیں۔
فرض کریں کہ صرف 3 خراب ہیں nits
تو آپ یہ بتانے کے قابل ہیں کہ 1003 میں سے خراب ہیں یعنی برے کا امکان صفر تین ہے آپ یہ نہیں کہیں گے کہ یہ دس ہزار میں سے ہے
کیونکہ آپ نے اسے دس ہزار کرنے کے لیے اب صرف ہزار کو چیک کیا ہے۔ آپ امکانی پوائنٹ صفر تین دے رہے ہیں لہذا اب بڑی مقدار میں
پیداوار میں کمپنی جانتی ہے کہ تقریبا پوائنٹ صفر تین فیصد آئٹمز اسی طرح خراب ہوسکتے ہیں اگر وہ آہ آئٹم کی زندگی کو دیکھ رہے ہیں
تو یہ ایک اور معیار کا پیرامیٹر ہے۔ مثال کے طور پر وہ وارنٹی مدت دینا پسند کر سکتے ہیں پھر انہیں یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ اوسط زندگی
کیا ہے اور وہ کون سی زندگی ہے جس سے آگے نوے فیصد اشیاء کام کر رہی ہیں وہ زندگی کیا ہے جس سے آگے دس فیصد اشیاء کام کر رہی ہیں
وغیرہ وغیرہ۔ تیار کردہ آئٹم کے لیے وقت آہ کی طرف اشارہ کرتا ہے اس لیے اگر انہیں معلوم ہوتا ہے کہ نوے فیصد آئٹمز جن پر وہ کام کرتے ہیں
وہ تین سال سے آگے کہتے ہیں مثال کے طور پر یہ الیکٹرک پنکھا ہے
دو سال کی وارنٹی یا ایک سال کی وارنٹی دینا محفوظ ہے کیونکہ تب انہیں معلوم ہو جائے گا کہ تقریباً تمام پرستار درحقیقت y تو وہ درست ہیں۔
ایک سال میں ایک گھنٹے سے زیادہ کام کر رہے ہوں گے کیونکہ اوسط زندگی تین سال ہے اس لیے زیادہ تر چیزیں درحقیقت اس سے آگے کام کر
رہی ہوں گی۔ اس مخصوص پروڈکٹ کے لیے ایک سال کی وارنٹی مدت دینے کے لیے بہت محفوظ ہیں لہذا یہ امکان کی تجرباتی تعریف کے تمام
حقیقی اطلاقات ہیں جب کوئی کمپنی یہ کہے کہ انشورنس کمپنی کوئی پروڈکٹ لانچ کر رہی ہے
تو وہ یہ کہے گی پالیسی سروس کلاس کے لیے ہے اس کا مطلب ہے کہ وہ لوگ جو سروس کلاس میں ہیں اور پھر کہیں گے کہ میچورٹی کی رقم
سال کی عمر میں دی جائے گی کچھ اس طرح کہ وہ بیان دیں گے اب کچھ پریمیم مقرر ہے تاکہ پریمیم اس مخصوص طبقے کے لوگوں کی م 60
توقع عمر کی بنیاد پر شمار کیا جاتا ہے کیونکہ اگر وہ یہ کہتے ہیں کہ 95 فیصد لوگ زندہ رہیں گے 60 سال کی عمر میں اس کا مطلب ہے کہ
انہیں موت کے وقت فوائد دینے کی ضرورت نہیں ہے حادثاتی موت وغیرہ ہیں کیونکہ اس کے بعد لوگوں کے 60 سال سے زیادہ زندہ رہنے کا
امکان ہے یعنی ان کی رقم انہیں پورا پریمیم مل رہا ہے اور پھر وہ اس سے ادا کر رہے ہیں۔ اس طرح انشورنس کمپنیاں مارکیٹ میں زندہ رہتی ہیں
اگر وہ غیر حقیقی چھوٹا پریمیم ڈالتی ہیں اور وہ میچورٹی کے بہت سے فوائد دینے کی کوشش کرتی ہیں
تو کمپنیاں خسارے میں چلی جائیں گی کیونکہ پھر اگر زیادہ لوگ کہتے ہیں کہ پالیسی کی میچورٹی سے پہلے فوائد کا دعویٰ کرنا ہے۔ پھر وہ
نقصان میں ہوں گے تاکہ اس رشتہ دار تعدد کی تعریف کو لاگو کرنے کے لیے پہلی بات یہ ہے کہ ہمارے پاس کافی مقدار میں ڈیٹا ہونا چاہیے اور
اس کے بعد ان کے نتائج کو ریکارڈ کیا جانا چاہیے اور دوسری بات یہ ہے کہ یہ ایک قابل اعتماد انداز میں کیا جانا چاہئے جس کا مطلب ہے کہ
ہمارے پاس کوئی ایسی چیز نہیں ہونی چاہئے جو قابل اعتماد نہ ہو یعنی جب ڈیٹا ریکارڈ کیا جاتا ہے اور اس کی اطلاع دی جاتی ہے ۔ یا پھر اسے
صحیح طریقے سے اکٹھا نہیں کیا گیا یعنی جب تجربات کا مشاہدہ کیا جا رہا ہے
تو ڈیٹا درست طریقے سے ریکارڈ نہیں کیا گیا
تھیوری صحیح طریقے oh probability سے منسوب کیا گیا ہے کہ ok اس لیے زیادہ تر ah تو پھر آپ کے نتائج بھی غلط ہوں گے
نظریہ ان مسائل کا حل نہیں بتاتا کہ بات یہ نہیں ہے کہ لوگ اسے صحیح طریقے سے لاگو نہیں ah probability سے لاگو نہیں ہوئی یا
کر رہے ہیں دوسری بات یہ ہے کہ کچھ تجربات فطرت میں تباہ کن ہوتے ہیں
تو ایسی صورت میں جائیداد کا نقصان ہوتا ہے مثال کے طور پر آپ غور کر رہے ہیں۔ 50 چھڑیوں کے ایک ماچس کے ڈبے میں کتنی ماچس کی
لاٹھیاں ٹھیک ہیں لہذا اگر اصل تجربہ کیا جائے
تو کیا آپ ہر 50 میں سے تمام 50 کو روشن کرنے کی کوشش کریں گے اگر آپ تمام 50 کو روشن کر دیں
تو سارے ڈبے تباہ ہو جائیں گے
تو ایسے تجربات ہیں جو حقیقت میں ہیں۔ تباہ کن دوسری بات یہ ہے کہ ایسے تجربات ہوسکتے ہیں جو بہت مہنگے ہوتے ہیں مثال کے طور پر
سیٹلائٹ لانچ کرنا ٹھیک ہے لہذا آپ لانچنگ جاری نہیں رکھ سکتے اور دیکھتے ہیں کہ کیسے کامیابی کا کیا امکان ہے یہ درحقیقت مقررہ وقت میں
کیے جاتے ہیں آپ پچھلے اعداد و شمار کو ریکارڈ کرتے ہیں اور اس کی بنیاد پر آپ احتمالات کا حساب لگاتے ہیں اور اس کے علاوہ کوئی چیز
ٹرائلز n کے مربع جڑ میں ٹھیک ہے اس کا مطلب ہے کہ ہر n متضاد بھی ہو سکتی ہے مثال کے طور پر اگر میں سمجھتا ہوں کہ ایک برابر ہے
کے موافق ہے e واقعہ ah کا مربع جڑ اوقات n میں سے

سے سمجھتا ہوں n تو پھر اگر میں ایک کو
ہے اور اگر میں صفر پر جانے کی حد لیتا ہوں اب ہم فطری طور پر سمجھتے ہیں کہ اگر احتمال 0 ہے n بذریعہ n تو وہ جڑ
تو اس کا مطلب یہ ہے کہ امکان واقعہ رونما نہیں ہوتا یہ ناممکن بھی ہے لیکن حقیقت میں واقعہ ناممکن نہیں ہے صرف بات یہ ہے کہ جو ہو رہا
کے مقابلے میں آزمائشوں کی تعداد بہت کم ہے جہاں واقعہ کا مشاہدہ کیا جاتا ہے آئیے ہم اسے دیکھتے ہیں 4 آزمائشوں میں n ہے وہ یہ ہے کہ
سے 2 بار آپ کو کامیابی ملی اگر آپ کے پاس 9 ہیں
تو آپ کے پاس تین بار ہیں اگر آپ کے پاس سولہ ہیں
نایاب اور نایاب ہوتا جارہا ہے کیونکہ آزمائشوں کی تعداد میں ence تو آپ کے پاس چار بار ہے لہذا واقعہ واقعتا واقع ہو رہا ہے لیکن واقع
اضافہ ہوتا ہے لہذا امکان صفر کا مطلب ناممکن نہیں ہے اس کا مطلب ہے کہ واقعہ نایاب واقعہ ہے لہذا یہ تھوڑا سا متضاد ہے اگر آپ بہت سخت
ریاضیاتی اصطلاحات میں بات کر رہے ہیں ہم کہتے ہیں کہ واقعہ ناممکن ہے
تو ہم مختص کرتے ہیں۔ امکان صفر ہے لیکن یہاں ہمارے پاس احتمال صفر ہے واقعہ ناممکن نہیں ہے
تو یہاں اس کا مطلب ہے نایاب واقعہ کا امکان 0 ہے ٹھیک ہے لیکن اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ واقعہ رونما نہیں ہوتا آہ اس کے الٹ بھی درست
کو پاور ایک بائے تھری ٹھیک ہے n مائنس n ہے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کہنے کے برابر ہے
طاقت دو سے تین جو کہ کنورج n یعنی ایک مائنس ایک بذریعہ n کے پاور ایک سے تین تقسیم n مائنس n برابر ہے n تو یہاں ایک بذریعہ
ہوتا ہے ایک بار پھر آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں کہ واقعہ یقینی نہیں ہے یہاں تک کہ کبھی کبھی واقعہ نہیں ہوتا ہے لیکن پھر اس کا مطلب یہ ہے کہ
جب یہ واقع نہیں ہوتا ہے
واقعہ رونما ہوتا ہے یہ تقریباً یقین کے ساتھ نہیں nty تو وہ وقت نایاب ہوتا ہے جس کا مطلب ہے کہ آپ تقریباً تصدیق کے ساتھ کہہ سکتے ہیں۔
ہوتا ہے اس لیے آپ کہہ سکتے ہیں کہ ایسے واقعات کا امکان جو کبھی کبھی پیش نہیں آتا بھی ایک ہوتا ہے اس لیے یہ پھر سے تھوڑا سا جوابی
بدیہی ہے لیکن اس کے باوجود اب یہ امکان کی تعریف کو تھوڑا سا مزید بڑھا رہا ہے۔ میں نے آپ کو احتمال کی دو تعریفیں دی ہیں جو بہت پہلے
تیار کی گئی تھیں اور پھر کیا ہوا کہ جب ہم دوسرے ریاضی دانوں کو یہ معلوم ہوا کہ تعریفوں میں مسائل ہیں یعنی نظریاتی فریم ورک پر یہ تعریفیں
آفاقی نہیں ہیں
تو انہوں نے سوچا۔ غالباً یہ موضوع بنیادوں میں زیادہ مضبوط نہیں ہے اسی زمانے میں ریاضی میں ڈیوڈ ہلبرٹ نے پورے ریاضی کو باقاعدہ
بنانے کے لیے ایک فریم ورک بنایا تھا اور اس لیے امکان کی تعریف کو بھی باقاعدہ بنانے کی ضرورت تھی اس لیے 1933 میں روسی ریاضی دان
کلموگوروف نے امکانی بنیاد فراہم کرنے میں کامیاب رہا۔
تو میں یہاں یہ تعریف پیش کرتا ہوں کہ محوری تعریف یہ تھی کہ یہ ایک فریم ورک ہے صرف یہ آپ کو یہ نہیں بتاتا کہ احتمال کا حساب کیسے
لگایا جائے لیکن اگر کوئی احتمال ہے
s تو اس احتمال کی درستگی اور اس کے ساتھ ساتھ کچھ اصول ہوں گے جو دیئے جاسکتے ہیں۔ احتمالات کے حساب کے لیے فرض کریں کہ ہم
کو ایک نمونہ کی جگہ سمجھتے ہیں اور آئیے اس پر غور کریں کہ واقعات درحقیقت اس کے ذیلی سیٹ ہیں
کے ذیلی سیٹوں کا ایک سیٹ آئیے اس کو کچھ نام دیں آئیے اس کی نشاندہی کریں۔ s ok ah تو آئیے ہم ایک کلاس پر غور کریں جس کا مطلب ہے
میں تھوڑا سا مختلف نوٹیشن استعمال کر رہا ہوں کیونکہ دیکھیں یہ سبسیف وغیرہ ہم ایونٹس کے ci یہ کہہ کر کچھ نوٹیشن میں استعمال کروں گا
لیے استعمال کر رہے ہیں ٹھیک ہے اب میں ایونٹس کے سیٹ پر غور کر رہا ہوں اس لیے میں تھوڑا سا مختلف نوٹیشن دے رہا ہوں اس لیے میں یہ
وغیرہ کے طور پر لکھا جاتا ہے لہذا آپ جو بھی اشارے استعمال b بعض اوقات اسے اسکرپٹ c اسکرپٹ نوٹیشن اسکرپٹ استعمال کر رہا ہوں
سے ہے۔ پھر اس کا c کا تعلق e اب اس کلاس کو درج ذیل دو شرائط کو پورا کرنے دیں ایک اگر c کرسکتے ہیں مجھے یہاں رکھنے دیں
سے ہے اس کا کیا مطلب ہے c کا تعلق e complement مطلب یہ ہے کہ
تو اس کا مطلب یہ ہے کہ دیکھیں میں اس اشارے کو استعمال کرسکتا ہوں میں اس اشارے کو استعمال کرسکتا ہوں میں اس اشارے کو استعمال
کرسکتا ہوں
تو یہ سب ملتے جلتے ہیں اس کا مطلب ہے سیٹوں کی کلاس اس لیے اس کے مختلف طریقے ہیں۔ اس کو لکھنے کا مطلب یہ ہے کہ اگر ای ایک
واقعہ ہے جس پر غور کیا جائے
کہنے پر غور کر رہا ہوں اور اسی طرح یہ تمام صحیح واقعات ہیں e1 e2 تو اس کی تکمیل بھی ایک درست واقعہ ہے دوسری اگر میں
کا ملاپ بھی ایک درست واقعہ ہے۔ اب آپ سوچیں گے کہ میں اس طرح کیوں غور کر رہا ہوں اس کی وجہ یہ ہے کہ ei تو اس کا مطلب ہے کہ
پہلے میں نے بحث کی تھی جب میں واقعات کو سیٹ کے طور پر سیٹ کرنے کے بارے میں بات کرتا ہوں
تو مجھے ان کی یونینوں کے چوراہوں کے تکمیلی اختلافات کے بارے میں بات کرنے کے قابل ہونا چاہئے کیونکہ وہ سب مختلف قسم کے واقعات
کی نشاندہی کر رہے ہیں
تو پھر کیونکہ جب میں امکان کے ڈھانچے کی وضاحت کر رہا ہوں
تو یہ سب درست ہونے چاہئیں اس لیے یہ تعریف جیسا کہ میں نے ذکر کیا ہے کہ یہ نظریہ امکان کو باقاعدہ بنانے کے لیے ہے اس لیے اس نے
سمجھی سیٹوں کا گدا اس طرح کہ جب بھی کسی واقعہ پر غور کیا جائے cl اس طرح کی
تو اس طرح کی تمام چیزیں بھی ہونی چاہئیں جو کہ یونینوں کے تقاطع کے تکمیلی فرق ہیں جو کہ واقعہ ہوں گے
سگما فیلڈ کی اس رسمی تعریف i تو یہ ڈھانچہ درحقیقت اس کو مطمئن کرتا ہے ریاضی میں اسے سگما فیلڈ کہا جاتا ہے لیکن آپ کی سطح پر
پر غور کرتے ہیں ah کے بارے میں بات کرنے کی ضرورت نہیں ہے لیکن یہ وہ بنیادی شرائط ہیں جو یہاں پوری ہوتی ہیں لہذا اب ہم
ایک نمونہ کی جگہ ہے اور پھر اس کے ذیلی سیٹوں کی ایک کلاس ہے پھر احتمال کو ایک کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ فنکشن لہذا ہم اسے s تو
سے صفر سے ایک سیٹ کے امکان پر بیان کیا جاتا ہے صفر سے ایک کے درمیان ایک عدد ہے جو درج ذیل تین c کہتے ہیں یہ p نوٹیشن
محوروں کو مطمئن کرتا ہے پہلا محور یہ ہے کہ ہر واقعہ کا امکان ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے دوسرا مکمل کا امکان ہوتا ہے۔ سیمپل اسپیس ایک کے
برابر ہے اور تیسرا محور یہ ہے کہ ای ایک ای ٹو اور اسی طرح جوڑے کے لحاظ سے منقطع ہونے دیں میں نے آپ کو پہلے بیان کیا تھا کہ پائی
کا مطلب ہے کہ اگر میں ان میں سے کسی دو کو لوں r wise disjoint کا کیا مطلب ہے
تو وہ منقطع ہیں
کے سگما امکان کے برابر ہے یعنی اگر واقعات منقطع ہیں ei کا امکان ایک سے لامحدود کے برابر ہے جو union eii تو
تو کم از کم ہونے کا امکان ان میں سے ایک احتمالات کے مجموعہ کے علاوہ کچھ نہیں ہے یہ اشارے اگر آپ زیادہ واقف نہیں ہیں
تو مجھے اسے اس طرح لکھنے دیں اصل میں اس کا مطلب کچھ اس طرح ہوگا فرض کریں کہ میں دو پر غور کر رہا ہوں
کے امکان پر غور کر رہا ہوں c یونین b کا امکان اگر میں یونین b کا امکان بن جائے گا۔ جمع a کا امکان b تو اتحاد
کا امکان ہے c کے جمع کا امکان بن جائے گا اور b تو یہ
واقعات ہیں ٹھیک ہے اب آپ سوچیں گے کہ یہ تعریف کیوں دی گئی؟ disjoint disjoint وغیرہ وہ abc تو یہاں
تو پہلی بات یہ ہے کہ یہ غیر منفی ہے دوسری بات یہ ہے کہ پوری جگہ کا امکان ایک ہوگا جس کا مطلب ہے کہ جب بھی آپ کسی واقعہ کے

prutor@iitk

امکان کا حساب لگا رہے ہیں یہ صفر اور ایک کے درمیان ایک تناسب ہے اور تیسرا یہ ہے کہ احتمال ایک اضافی فعل ہے جس کا مطلب ہے کہ اگر میں کسی واقعہ پر غور کر رہا ہوں
تو ایک اور واقعہ پھر ایک اور واقعہ اگر میں انفرادی امکانات کو جانتا ہوں اور میں جانتا ہوں کہ وہ متضاد ہیں
تو اس کا امکان اب یہاں سے کچھ احتمالات کا اتحاد ہو جائے گا اس لیے اسے اصل میں احتمال کی محوری تعریف کہا جاتا ہے اس کلموگوروس چیز کو اب احتمال کی خارجی تعریف کہا جاتا ہے اس کی بنیاد پر احتمال کے کئی دوسرے اصول آسانی سے قائم کیے جا سکتے ہیں اس لیے مثال کے طور پر ہم محوری تعریف کے کچھ نتائج مرتب کر سکتے ہیں ایک ناممکن واقعہ کا امکان ہمیشہ صفر ہوتا ہے اس لیے اسے محوری [موسیقی]
آئیے ہم واقعہ phi لیتے ہیں اور اسی طرح برابر ہے۔ e 2 e 3 اور s ایک کو e تین میں ثابت کرنا بہت آسان ہے
ہے اور دوسرے سیٹ s کے اس اتحاد میں پہلا سیٹ ei کی یونین ہے ei تو پھر بیان کیا ہے میں یہاں حاصل کروں گا بائیں ہاتھ کی طرف کا امکان ہے phi دو کا امکان ہے e جمع کا امکان ہے s کا امکان ہے جو e بن جائے گی دائیں ہاتھ کی طرف s ہیں پھر یونین خود phi لکھا ہے وہ ایک ہے ps کا امکان ہے اور اسی طرح آپ اس بیان کو دیکھیں احتیاط سے جو میں نے phi تین کا امکان ہے جو e جمع
اور اسی طرح اب یہ کب ممکن ہے کہ یہ دونوں طرف سے منسوخ ہو جائے p phi جمع p phi تو میں لکھ رہا ہوں ایک برابر ہے ایک جمع پانچ کا صفر ہونا ضروری ہے p پانچ اور اسی طرح صفر ہے یعنی p پانچ p کا خلاصہ کر رہا ہوں پانچ p تو آپ کیا کہہ رہے ہیں اگر میں کا ذیلی سیٹ کہنے پر غور کر رہا ہوں f کو e تو دوسرا نتیجہ یہ ہے کہ اگر میں
تو یہ کیسے ہے کہ میں رگ ڈایاگرام استعمال کرتا ہوں
ہے ah بن جاتا ہے معذرت میں نے غلط لکھا یہ f مائنس e ہے پھر یہ حصہ کیا ہے یہ حصہ f اور یہ ایک واقعہ e تو یہ میرا ہے سیٹ کا سب سیٹ ہے e ہے f تو یہاں اصل میں
f ہے جو بیرونی سیٹ ہے اور یہ اندرونی سیٹ ہے e تو یہ
f مائنس e یونین f بطور e تو میں یہاں یہ سیٹ لکھ سکتا ہوں
کا امکان e کو دو متضاد سیٹوں کے اتحاد کے طور پر لکھا گیا ہے لہذا e کے برابر ہے یہ مکمل سیٹ e f union e minus f تو یہ متضاد ہیں لہذا اب ہر سیٹ کے لئے کیا ہے ہم نے لکھا ہے کہ f مائنس e اور f کا امکان بن جائے گا کیونکہ f مائنس e کا احتمال اور f کا امکان صفر سے زیادہ یا اس کے برابر ہے لہذا اگر ہم اسے استعمال کرتے ہیں e امکان غیر منفی ہے
کے امکان سے کم یا برابر ہوتا ہے لہذا پہلے ہم یہاں سے کئی سٹیٹمنٹس حاصل کر e کا امکان ہمیشہ f تو یہ اصطلاح غیر منفی ہے یعنی مائنس امکان کے برابر ہے e کے f کا امکان لکھ سکتے ہیں f مائنس e سکتے ہیں ہم
کا سب سیٹ ہے f e تو یہ وہ بیان ہے جو ہمیں مل رہا ہے کہ اگر
مائنس امکان کے طور پر لکھا جائے اور یہ صفر سے زیادہ یا اس کے برابر ہے اس e کے احتمال f کا احتمال ہو سکتا ہے۔ f مائنس e تو ذیلی ہے f کے امکان سے زیادہ یا اس کے برابر ہوتا ہے اب یہ ایک اہم بیان ہے جو ہم نے بنایا ہے اگر f کا امکان ہمیشہ e کا مطلب ہے کہ کے f کا امکان e کے ہونے کا امکان زیادہ ہے اور پھر e کے مقابلے میں f کا سیٹ اس کا کیا مطلب ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ واقعہ e پراپرٹی امکان کا monotonicity امکان سے زیادہ یا اس کے برابر ہوگا لہذا یہ اس بنیادی کو مطمئن کر رہا ہے جسے آپ کہہ سکتے ہیں مطلب ہے کہ اگر کسی واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کے زیادہ امکانات ہیں
تو اس کے زیادہ سازگار نتائج ہیں
تو اس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان زیادہ ہونا چاہئے جو کہ امکان ہے ایک مونوٹون فنکشن ہے امکان ایک مونوٹون فنکشن ہے ہم ایک اور مفید پھر وہ پوری جگہ کے برابر ہے لہذا اگر میں union e compliment کہنے پر غور کروں۔ e خاصیت کو بھی ثابت کر سکتے ہیں اگر میں اپلائی کرتا ہوں
کا ایک مائنس امکان ہے یعنی تکمیلی واقعہ کا e کا امکان ہمیشہ e compliment کے برابر ہے جو کہ ایک کے برابر ہے یعنی ps تو وہ امکان ایک مائنس ہے یہاں اصل واقعہ کا امکان بھی ہے کہ ہم اسے اب استعمال کرتے ہوئے ثابت کرنے کے قابل ہیں آہ یہ کچھ ابتدائی قواعد ہیں جو کو ثابت کرنے کے قابل ایک سیٹ فنکشن ہے جس کا مطلب ہے کہ ہر واقعہ e probability فوری طور پر پیروی کرتے ہیں لہذا ہم کیا ہیں ہے مکمل نمونے کی جگہ کا امکان جو یقینی واقعہ monotonic function کے لیے یہ صفر اور ایک کے درمیان نمبر مختص کر رہا ہے یہ ہے۔ صفر ہے لہذا دیگر تمام احتمالات ان دو انتہاؤں کے درمیان موجود ہیں امکان اضافی ہے اس کا مطلب phi ہے ناممکن واقعہ کا امکان ہے جو ہے کہ اگر میرے پاس غیر منسلک واقعات ہیں اور اتحاد کا امکان کچھ احتمالات کے برابر ہے احتمال یکجہتی ہے اس کا مطلب ہے کہ اگر واقعہ ہونے کا امکان زیادہ ہے
تعریف دی گئی تھی اور اس کی بنیاد پر exomatic تو اس کا امکان زیادہ ہوں گے یہ کچھ آپ بنیادی فریم ورک کہہ سکتے ہیں جس کے تحت یہ کچھ اور اصول ہوں گے جو اخذ کیے جاسکتے ہیں لہذا اگلے لیکچر میں میں یہ تمام اصول دوں گا اور پھر ہم دیکھیں گے کہ ہم کیسے مختلف عملی مسائل کو حل کرنے کے لیے اس کا اطلاق کر سکتے ہیں شکریہ

Prutor@IITK