

सुप्रभात आह तो अब संभाव्यता के लिए बुनियादी शब्दावली शुरू करने के बाद मैं संभाव्यता की मूल परिभाषा दूंगा, जैसा कि मैंने आपको पहले उल्लेख किया था कि संभाव्यता सिद्धांत का विषय 16 17 वीं शताब्दी यूरोप में उत्पन्न हुआ था और आह जुआ खेलों के माध्यम से मैंने उल्लेख किया था आप के लिए कि विषय उद्यान के प्रवर्तकों में से एक आह कार्डिनो वह वास्तव में एक बाध्यकारी जुआरी था और वास्तव में उसने अपनी आत्मकथा में लिखा है कि मुझे यह कहते हुए शर्म आती है कि मैं हर दिन जुआ खेलता था

इसलिए अब उस जुए के खेल के माध्यम से उन्होंने विभिन्न प्रकार की घटनाओं की संभावनाओं पर विचार करना शुरू कर दिया, उदाहरण के लिए यदि आप दो पासा फेंकते हैं तो संभावना क्या है कि आप इसे अच्छी तरह से प्राप्त करेंगे, उस तरह की 12 फेंकने के लिए आवश्यक फेंकने की अपेक्षित संख्या क्या है,

इसलिए उन्होंने विचार करना शुरू कर दिया विभिन्न प्रकार की संभावनाएं और फिर वे उस समय के विभिन्न अन्य गणितज्ञों के संपर्क में आए, अर्थात् प्रारूप पास्कल जेम्स बर्नौली आह हाइटेस वास्तव में है एक ऐतिहासिक संदर्भ जिसमें कुछ समस्या आइजैक न्यूटन को भी दी गई थी और ऐसा लगता है कि उन्होंने वास्तव में उस समस्या का सही उत्तर दिया था ताकि उस समय यादृच्छिक प्रयोगों की प्रकृति यह थी कि आपके पास परिणामों की एक सीमित संख्या है क्योंकि इस सभी सिक्के में मरने वाले फेंकने में कार्ड सुखाने के खेल वगैरह उन सभी में आपके पास परिणामों की एक सीमित संख्या है और आप यह भी मान सकते हैं कि वे सभी समान रूप से निष्पक्षता ग्रहण कर रहे हैं

इसलिए संभाव्यता की पहली परिभाषा जिसे गणितीय परिभाषा कहा जाता है या संभाव्यता की शास्त्रीय परिभाषा आधारित है इस अवधारणा पर केवल इतना शास्त्रीय या आप कह सकते हैं कि अब की गणितीय परिभाषा ठीक है इस परिभाषा का रूप जो मैं यहां लिख रहा हूँ, वास्तव में फ्रांसीसी गणितज्ञ को लैपलेस के लिए जिम्मेदार ठहराया गया है और यह उनकी पुस्तक में 1813 में प्रकाशित हुआ था, इस पुस्तक में मृत्यु की संभावनाएं इस परिभाषा में प्रकाशित किया गया था, हालांकि लैपलेस से लगभग 100 150 साल पहले परिभाषा के रूप का इस्तेमाल किया जा रहा था,

इसलिए फॉर्म था  $t$  यहाँ दिया गया है और यह आपकी कक्षा 11 और 12 की पाठ्यपुस्तक में भी है,

इसलिए मान लीजिए कि एक यादृच्छिक प्रयोग के  $n$  संभावित परिणाम हैं,

इसलिए मैं यहाँ केवल इस संख्या  $n$  का उल्लेख कर रहा हूँ और आपको इस भाग के बारे में सावधान रहना होगा,

इसलिए जब मैं  $n$  कहता हूँ तो इसका अर्थ है यह एक संख्या है

इसलिए यदि आप एक सिक्के को उछालते हैं तो आपके दो परिणाम होते हैं

इसलिए  $n$  दो के बराबर होता है यदि आप दो सिक्कों को उछालते हैं तो यह चार हो जाता है यदि आप दो पासों को उछालते हैं तो यह छत्तीस वगैरह हो जाता है जिसका मतलब है कि आप यहां परिणामों की संख्या की गणना कर सकते हैं

इसलिए एक यादृच्छिक प्रयोग के संभावित परिणाम हैं और इससे भी महत्वपूर्ण बात यह है कि समान रूप से संभावना है

इसलिए यह फिर से कह रहा है कि हम निष्पक्षता मान रहे हैं

इसलिए मैंने आपको बताया कि इस परिभाषा की उत्पत्ति जुआ खेलों में है

इसलिए जहां स्वाभाविक रूप से यह माना जाता है कि सिक्का उचित है या पासा उचित है या जब आप ताश के पत्तों से एक कार्ड निकालते हैं तो सभी कार्डों के समान रूप से निकाले जाने की संभावना होती है,

इसलिए इस प्रकार का प्रतिबंध इसमें रखा गया था। मूल परिभाषा

इसलिए ये परिणाम जो समान रूप से संभावित हैं और फिर हम इसे थोड़ा और सटीक बनाने के लिए कहते हैं कि हम परस्पर अनन्य हैं जिसका अर्थ है कि परिणामों की गिनती आप सटीक और सटीक कह सकते हैं इसका मतलब है कि कोई संभावना नहीं है कि एक परिणाम दूसरे के साथ भ्रमित हो सकता है परिणाम वगैरह इतने पारस्परिक रूप से अनन्य हैं और फिर कुछ भी इतना संपूर्ण नहीं छोड़ा गया है जिसका अर्थ है कि कुल परिणामों की संख्या हम इस तरह के प्रतिबंध लगाने में सक्षम हैं कि वे समान रूप से होने की संभावना है और अतिव्यापी होने की कोई संभावना नहीं है और उन सभी को अब इस तरह से माना जाता है स्थिति ई को एक घटना होने दें ताकि इन परिणामों में से एम घटना ए के होने के अनुकूल हो तो हम घटना ई की संभावना को परिभाषित करते हैं

इसलिए हम ई के इस नोटेशन पी का उपयोग करते हैं जो एम बटा एन के बराबर है, इसका मतलब है कि यदि हैं  $n$  परिणामों की कुल संख्या जो समान रूप से पारस्परिक रूप से अनन्य और उस  $m$  में से संपूर्ण हैं, घटना  $e$  की घटना के अनुकूल हैं तो घटना  $e$  की संभावना को  $n$  द्वारा  $m$  के रूप में परिभाषित किया गया है और वास्तव में यह है वह परिभाषा जिसका उपयोग आप वास्तव में अपनी कक्षा की पाठ्य पुस्तकों में दी गई विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए करते हैं, जहाँ कुछ से गेंदों को खींचने से संबंधित बहुत सारी समस्याएँ हैं,

इसलिए कुछ समस्याएँ होंगी जैसे चार काली गेंदें, तीन लाल गेंदें और दो सफेद गेंदें और मान लीजिए कि चार गेंदें खींची जाती हैं, तो क्या संभावना है कि आह इन चार गेंदों में दो काली एक लाल और एक सफेद इस तरह की है, इस तरह की समस्याओं को आप हल कर रहे होंगे जब आप इन समस्याओं को हल कर रहे होंगे वास्तव में आप इस परिभाषा का उपयोग कर रहे हैं क्योंकि आप हैं उन सभी के लिए समान रूप से संभावित परिणाम मानने के लिए यादृच्छिकता का उपयोग करना,

इसलिए मैं कुछ समस्याओं के समाधान को देखूंगा, लेकिन थोड़ी देर बाद लेकिन इससे पहले मुझे इन परिभाषाओं पर व्यापक रूप से चर्चा करने दें, जब मैं कह रहा हूँ कि कोई संभावित परिणाम नहीं है। वास्तव में यह मानते हुए कि मैं सभी परिणामों की गणना करने में सक्षम हूँ और फिर इन सभी प्रतिबंधों को भी अब देखता हूँ, मैं एक बहुत ही सरल प्रश्न पूछता हूँ कि इसकी क्या संभावना है कल बरसात का दिन होगा अब इस प्रश्न का उत्तर यहां से नहीं दिया जा सकता है क्योंकि कल मौसम की क्या संभावनाएं हैं

इसलिए आप कह सकते हैं कि बारिश हो सकती है, धूप हो सकती है या बादल छा सकते हैं

इसलिए तीन संभावित परिणाम प्रत्येक के साथ समान रूप से संभावना है

इसलिए यह उचित नहीं है कि उचित धारणा है कि धूप बरसात और बादल समान रूप से होने की संभावना है क्योंकि पूरे वर्ष में वास्तव में कितने दिन बारिश होती है और कितने दिन धूप होती है और कितने दिन बादल छाए रहते हैं यदि आप इसे पिछले 50 में देखते हैं या 100 साल बाद आप नहीं पाएंगे कि वे समान हैं और

इसलिए इस प्रकार की स्थिति सही नहीं है,

इसलिए जब मैं कहता हूँ तो मुझे यहां नुकसान लिखने दें या आप इस परिभाषा की कमियां कह सकते हैं,

इसलिए एक घटना है या आप कह सकते हैं कि परिणामों की आवश्यकता नहीं है समान रूप से होने की संभावना है, आइए हम इस समान रूप से संभावित चीज़ के अन्य उपयोग को देखें, भले ही मैं केवल एक सिक्का कहूँ ठीक है या मैं एक पासा मानता हूँ तो अगर मैं एक पासे पर विचार कर रहा हूँ और मैं यह मान रहा हूँ कि सभी एक दो तीन चार पांच छह समान हैं जनसंपर्क होने की संभावना का मतलब है कि मैं उनमें से प्रत्येक को अब एक से छह की संभावना आवंटित कर रहा हूँ, क्या यह उचित है मान लीजिए कि मैं मान रहा हूँ कि मैं वास्तव में असली जुए के बारे में बात कर रहा हूँ और असली जुए में ऐसे खिलाड़ी हैं जो किसी ने अब मरने की आपूर्ति की है यदि वह व्यक्ति जो वह मर गया है वह बेईमान है तो शायद वह पार्टियों में से एक या खिलाड़ियों में से एक के साथ लीग में है और वह वास्तव में एक पक्षपातपूर्ण मर सकता है जैसे कि यह उचित होगा यह खिलाड़ियों में से एक के पक्ष में होगा उदाहरण के लिए यह हो सकता है 5 और 6 का भारी पक्षधर है और व्यक्ति इसे दूसरे खिलाड़ी के बारे में जानता है और



ही हैं  $d$  ठीक है, तो अब मैं इसका प्रतिनिधित्व करने में सक्षम हूँ, आइए इससे पहले एक देखते हैं इसका मतलब है कि  $4k$  माइनस 1 अब यदि आप यहाँ  $4k$  माइनस 1 देखें तो हेड्स की संख्या वास्तव में  $3k$  है यहाँ देखें यह यहाँ 8 है 7 लेकिन संख्या केवल 6 है इसका मतलब है कि यहाँ भी आप बारह परीक्षणों में से देखते हैं कि ग्यारह में से नौ थे, आप नौ जोड़ते हैं, इसका मतलब है कि यह अनुपात हम लिख सकते हैं कि यह तीन  $k$  को चार  $k$  से विभाजित करके एक घटा है यदि  $n$  का है फॉर्म फोर  $k$  माइनस वन हम अगले एक को देखते हैं मान लीजिए मैं इसे देखता हूँ तो यहाँ यह फोर  $k$  माइनस दो है और यहाँ यह एक कम हो गया है जो कि थ्री  $k$  माइनस एक है जिसे आप यहाँ भी देख सकते हैं और आप यहाँ भी देख सकते हैं इसका मतलब है कि यह तीन  $k$  माइनस एक को चार  $k$  माइनस दो से विभाजित करता है यदि  $n$  चार  $k$  माइनस दो के रूप का है और अगला वाला यदि आप देखते हैं तो यह वास्तव में तीन  $k$  माइनस दो है जो चार  $k$  माइनस तीन से विभाजित है यदि  $n$  है चार  $k$  माइनस तीन  $k$  के लिए एक दो के बराबर है और इसी तरह आप यहाँ देख सकते हैं यह पूरा क्रम  $a$  by  $n$  एक गणितीय रूप में मैं  $wri$  करने में सक्षम हूँ चार बाद के संघ के रूप में ते और अब मेरा उद्देश्य सीमा लेना है क्योंकि  $n$  अब अनंत की ओर जाता है यदि  $n$  अनंत की ओर जाता है तो वास्तव में  $k$  अनंत की ओर जाता है और आइए हम उनमें से प्रत्येक में सीमा पर विचार करें वास्तव में यह शब्द कोई सवाल नहीं है सीमा  $kk$  रद्द हो जाती है, इसलिए वास्तव में यह तीन बटा चार है यह एक है यदि आप विचार करते हैं कि सीमा तीन क्या है यदि आप  $k$  चार घटा एक को  $k$  से विभाजित करते हैं, तो यदि मैं सीमा लेता हूँ क्योंकि  $k$  अनंत की ओर जाता है तो यह सीमा भी तीन से चार है यदि मैं इस शब्द पर विचार करता हूँ यह शब्द भी तीन माइनस एक के द्वारा विभाजित चार माइनस दो से के द्वारा विभाजित है, इसलिए यदि मैं सीमा लेता हूँ तो यह शून्य हो जाता है यह शून्य हो जाता है इसलिए सीमा तीन बटा चार है इसी तरह अगर मैं यहाँ सीमा लेता हूँ तो यह तीन माइनस है दो बटा के को चार घटा तीन से के द्वारा विभाजित किया जाता है,

इसलिए यदि मैं यहाँ सीमा लेता हूँ तो यह तीन बटा चार हो जाता है फलस्वरूप हम यहाँ जो कह रहे हैं वह यह है कि सभी अनुवर्ती तीन बटा चार में अभिसरण करते हैं

इसलिए अनुक्रम की सीमा ए बाय एन तीन बटा चार है

इसलिए सीमा  $a$  बटा  $n$  बराबर तीन बटा चार है जो कि प्रायिकता है सिर की तो इस काल्पनिक प्रयोग में जिसमें मेरे तीन सिर थे और एक पूंछ बार-बार हम उम्मीद करते हैं कि सिर पूंछ की तुलना में तीन गुना अधिक होने की संभावना है और मैंने आपको वास्तव में सापेक्ष आवृत्ति परिभाषा को लागू करके यहाँ दिखाया है जो आपको मिलेगा वास्तव में वही उत्तर

इसलिए इस अभ्यास का उद्देश्य आपको यह दिखाना था कि यह सापेक्ष आवृत्ति परिभाषा संभाव्यता की वास्तविक व्यावहारिक परिभाषा है, इसलिए जब हम ढीले बयान देते हैं तो हम कहते हैं कि इस वर्ष औसत प्रति हेक्टेयर गेहूँ का उत्पादन अधिक होगा पिछले साल तो वास्तव में मैं वर्षों से देख रहा हूँ और वर्षों से हमने देखा है कि इस विशेष प्रकार की जलवायु में या इस विशेष प्रकार की स्थिति में जहाँ सिंचाई की सुविधा अच्छी है या बीज की गुणवत्ता अच्छी है तो प्रति हेक्टेयर औसत उत्पादन है अधिक का अर्थ उच्चतर है

इसलिए यह ढीला कथन वास्तव में आप अनुभव आधारित परिभाषा या अनुभवजन्य परिभाषा या सापेक्ष आवृत्ति परिभाषा कह सकते हैं प्रायिकता और वास्तविक जीवन की स्थितियों में पाठ्यपुस्तक के अलावा ऐसी स्थितियों में जहाँ हम सिक्का उछालने या सूखने पर बात करते हैं, मेरा मतलब है कि गेंदों का सूखना वगैरह सामान्य अभ्यास में हम वास्तव में सापेक्ष आवृत्ति परिभाषा को लागू करते हैं जो नहीं है आपको यह बताने के लिए कि आप कक्षा में या परीक्षा में किसी समस्या का समाधान कैसे करेंगे जब परीक्षा में समस्या दी जाती है तो हम वास्तव में प्रयोग का वर्णन कर रहे हैं

इसलिए आप वास्तव में समान रूप से संभावना वगैरह की शर्तों को लागू कर सकते हैं

इसलिए आप उस पर या कुछ अन्य समस्याओं के आधार पर समस्या को हल कर रहे हैं, कुछ बुनियादी संभावनाएं पहले से ही दी गई हैं, जिसका अर्थ है कि आपको उनकी गणना करने के लिए नहीं कहा जाता है, लेकिन उनके आधार पर आपको एक संघ बी की संभावना या संभावना की गणना करने के लिए कहा जाता है। ए यूनिजन बी यूनिजन सी वगैरह अगर आपको बुनियादी संभावनाएं दी जाती हैं तो ठीक है अब एक और सवाल यह है कि क्या इस परिभाषा को प्रोब की सार्वभौमिक परिभाषा के रूप में अपनाया जा सकता है क्षमता उत्तर फिर से नहीं है क्योंकि गणितीय रूप से सार्वभौमिक परिभाषा होने के लिए इसका मतलब है कि ढांचा हर जगह उपयोगी होना चाहिए या इसका मतलब है कि जो भी समस्या आ रही है, आपको उस ढांचे के भीतर हल करने में सक्षम होना चाहिए, मैं आपको दिखाऊंगा कि इसके साथ समस्याएं हैं परिभाषा भी एक या दो आप आसानी से सराहना कर सकते हैं इसलिए पहली बात यह है कि आपके पास पर्याप्त अनुभवजन्य डेटा होना चाहिए जिसका अर्थ है कि पिछला अनुभव जहाँ से आप वास्तव में संभावना की गणना कर सकते हैं यदि उपलब्ध नहीं है तो सापेक्ष आवृत्ति परिभाषा लागू नहीं की जा सकती है

इसलिए हम पर्याप्त संख्या में परीक्षण और उनके परिणाम होने चाहिए,

इसलिए यदि आपके सामने अचानक कोई समस्या आ जाती है जिसके लिए आपके पास यह जानने का कोई तरीका नहीं है कि परीक्षण क्या थे और परिणाम क्या थे तो आप इस परिभाषा को लागू नहीं कर पाएंगे

इसलिए उदाहरण के लिए आप एक कमरे में बैठे हैं, जहाँ बड़ी संख्या में कुर्सियाँ हैं, आप एक कुर्सी पर बैठते हैं और सवाल यह है कि प्रोबा क्या है काबिलियत है कि जब आप कुर्सी पर बैठे होंगे तो कुर्सी टूट जाएगी तो स्वाभाविक रूप से इस प्रकार का प्रश्न हमें इस पर हंसने का मन कर सकता है लेकिन यह एक वैध प्रश्न है लेकिन इसका उत्तर नहीं दिया जा सकता है क्योंकि आपके पास डेटा नहीं है जिसका मतलब है कि पहले जब इतने सारे छात्र कुर्सियों पर बैठ गए कि कितनी कुर्सियाँ टूट गईं

इसलिए इस प्रश्न का उत्तर इस विशेष प्रश्न में नहीं दिया जा सकता है

इसलिए कई बार लोग सवाल करते हैं और लोगों को उन सवालों पर हंसने का मन कर सकता है लेकिन वे पूरी तरह से मान्य सांख्यिकीय प्रश्न हैं, बात यह है कि हम चूंकि हम नहीं करते हैं आपके पास अपने सिद्धांत को लागू करने के लिए पर्याप्त डेटा है

इसलिए आप उन सवालों का जवाब नहीं दे सकते इसका मतलब यह नहीं है कि संभाव्यता का सिद्धांत अमान्य है या यह अधूरा है या ऐसी कोई बात नहीं है वास्तव में सिद्धांत उचित है लेकिन आप सभी प्रश्नों का उत्तर तब तक नहीं दे सकते जब तक कि पर्याप्त मात्रा में सबूत के या आप कह सकते हैं कि डेटा आपके लिए उपलब्ध है आह यह सवाल भी कई बार उठाया जाता है उदाहरण के लिए ए ओ ओपिनियन पोल क्या वहाँ एग्जिट पोल होते हैं जब आप आम चुनाव करा रहे हैं या अन्य प्रकार के चुनाव हैं और फिर प्रश्न पूछे जाते हैं कि किसी विशेष राजनीतिक दल के जीतने की क्या संभावना है अब आपने देखा होगा कि ऐसे उत्तर होंगे जो अलग-अलग होंगे क्योंकि वहाँ होगा कई एजेंसियाँ जो वही दे रही होंगी जो एक ही प्रश्न का उत्तर दे रही होंगी, लेकिन उनके उत्तर थोड़े भिन्न हो सकते हैं, यह वोटों के प्रतिशत के मामले में भिन्न होगा, यह सीटों की संख्या में भिन्न होगा, एक बात यह है कि प्रत्येक में इन मामलों में आपका नमूना स्थान स्वयं बदल जाता है उदाहरण के लिए यदि आप सीटों की संख्या देख रहे हैं तो नमूना स्थान अलग है यदि आप बल के प्रतिशत को देख रहे हैं तो आपका नमूना स्थान अलग है,

इसलिए यह निर्भर करता है कि उन एजेंसियों ने किस पद्धति का संचालन किया है सर्वेक्षण के आधार पर उत्तर अलग-अलग होंगे और यही कारण है कि आपके पास काफी होगा आप काफी अलग उत्तर कह सकते हैं इसका मतलब प्रोब का सिद्धांत नहीं है योग्यता यहाँ लागू नहीं है यह लागू है लेकिन व्यावहारिक अनुप्रयोग के लिए बड़ी संख्या में शर्तों के लिए पर्याप्त डेटा की आवश्यकता होती है और क्या इसे सही तरीके से लागू किया गया है या नहीं, यदि यह उस तरह से नहीं किया जाता है तो समस्याएं होंगी

इसलिए हमारे पास पर्याप्त संख्या में परीक्षण होने चाहिए और उनके परिणाम दर्ज किए गए उदाहरण के लिए उद्योग आमतौर पर यह विनिर्माण उद्योग इसलिए वे नियमित रूप से इस अनुभवजन्य परिभाषा को लागू करेंगे उदाहरण के लिए वे कहते हैं कि दोषों की संख्या क्या है इसलिए उत्पाद के प्रत्येक 100 उत्पाद में से 100 इकाइयों में से वे 10 का नमूना लेंगे उसमें से वे जाँच करेंगे कि कितने ठीक हैं या नहीं, तो मान लीजिए कि 10 में से सभी ठीक हैं, तो मान लीजिए कि वे एक घंटे की अवधि में दस बार परीक्षण करते हैं, इसलिए एक घंटे की अवधि में उम से बाहर उदाहरण के लिए उन्होंने दस का उत्पादन किया होगा हजार चीजें और हर सौ में से उन्होंने दस ले लिए हैं और वे अच्छे लोगों की संख्या या बुरे लोगों की संख्या दर्ज कर रहे हैं, इसलिए दस हजार में से मान लीजिए कि आपने सौ नमूने लिए हैं  $t$  सौ नमूने का मतलब है कि कुल एक हजार इकाइयाँ जो आपने अभी ली हैं 1000 इकाइयों में से मान लीजिए कि केवल 3 खराब हैं तो आप बता सकते हैं कि 1003 में से खराब हैं यानी खराब होने की संभावना शून्य है 3 आप यह नहीं कहेंगे कि यह है दस हजार में से क्योंकि आपने इसे दस हजार तक सामान्यीकृत करने के लिए केवल हजार की जाँच की है, आप संभावना बिंदु शून्य तीन दे रहे हैं

इसलिए अब बड़ी मात्रा में उत्पादन में कंपनी को पता है कि मोटे तौर पर शून्य तीन प्रतिशत आइटम समान रूप से खराब हो सकते हैं यदि वे एएच आइटम के जीवन को देख रहे हैं, इसलिए यह एक और गुणवत्ता पैरामीटर है उदाहरण के लिए वे वारंटी अवधि देना पसंद कर सकते हैं, फिर उन्हें यह जानने की जरूरत है कि औसत जीवन क्या है और वह जीवन क्या है जिसके आगे नब्बे प्रतिशत वस्तुएँ हैं काम करना जीवन क्या है जिसके आगे दस प्रतिशत वस्तुएँ काम कर रही हैं वगैरह निर्मित वस्तु के लिए आह पर अलग-अलग समय बिंदु हैं, इसलिए यदि वे पाते हैं कि नब्बे प्रतिशत आइटम वे तीन से परे काम करते हैं उदाहरण के लिए यह एक बिजली का पंखा है तो वे दो साल की वारंटी या एक साल की वारंटी देने के लिए बहुत सुरक्षित हैं क्योंकि तब उन्हें पता चल जाएगा कि लगभग सभी पंखे वास्तव में एक घंटे एक साल से अधिक काम कर रहे होंगे क्योंकि औसत जीवन तीन साल है इसलिए अधिकांश चीजें वास्तव में उससे आगे काम कर रही होंगी, इसलिए वे उस विशेष उत्पाद के लिए एक वर्ष की वारंटी अवधि देने के लिए बहुत सुरक्षित हैं, इसलिए यह संभावना की अनुभवजन्य परिभाषा के सभी वास्तविक अनुप्रयोग हैं, वही बात लागू होती है जब कोई कंपनी बीमा कंपनी कहती है एक उत्पाद लॉन्च कर रहा है, इसलिए वे कहेंगे कि यह विशेष नीति सेवा वर्ग के लिए है, इसका मतलब है कि वे लोग जो सेवा वर्ग में हैं और फिर वे कहेंगे कि परिपक्वता राशि 60 वर्ष की आयु में दी जाएगी, ऐसा कुछ वे देंगे एक बयान अब कुछ प्रीमियम तय किया गया है ताकि प्रीमियम की गणना उस विशेष वर्ग के लोगों की अपेक्षित जीवन प्रत्याशा के आधार पर की जा सके क्योंकि अगर वे पाते हैं कि 95 प्रतिशत लोग कहते हैं वे 60 वर्ष की आयु से अधिक जीवित रहेंगे, इसका मतलब है कि उन्हें मृत्यु पर लाभ नहीं देना है, आकस्मिक मृत्यु वगैरह हैं क्योंकि तब लोगों के 60 से अधिक जीवित रहने की संभावना है, जिसका अर्थ है कि उनकी राशि उन्हें पूर्ण प्रीमियम मिल रही है और फिर वे भुगतान कर रहे हैं केवल इतना ही कि बीमा कंपनियाँ बाजार में जीवित रहती हैं यदि वे एक अवास्तविक छोटा प्रीमियम डालती हैं और वे बहुत सारे परिपक्वता लाभ देने की कोशिश करती हैं तो कंपनियाँ घाटे में चलेंगी क्योंकि तब यदि अधिक लोग कहते हैं कि पहले लाभ का दावा कर रहे हैं पॉलिसी की परिपक्वता के बाद वे इस सापेक्ष आवृत्ति परिभाषा को लागू करने के लिए आह के लिए नुकसान में होंगे कि पहली बात यह है कि हमारे पास पर्याप्त मात्रा में डेटा होना चाहिए पर्याप्त मात्रा में परीक्षण किए जाने चाहिए और फिर उनके परिणाम दर्ज किए जाने चाहिए और दूसरा बात यह है कि यह एक विश्वसनीय तरीके से किया जाना चाहिए, जिसका अर्थ है कि हमारे पास कुछ ऐसा नहीं होना चाहिए जो विश्वसनीय न हो यानी जब डेटा रिकॉर्ड किया जाता है और इसे गलत तरीके से रिपोर्ट किया जाता है। आर इसे ठीक से एकत्र नहीं किया गया है, इसका मतलब है कि जब प्रयोग देखे जा रहे हैं तो डेटा सही ढंग से दर्ज नहीं किया गया है, तो आप भी गलत होंगे, इसलिए इसका ज्यादातर श्रेय ठीक है कि ओह संभाव्यता सिद्धांत सही ढंग से लागू नहीं होता है या आह संभाव्यता सिद्धांत इन समस्याओं का समाधान नहीं देता है यह बात नहीं है कि लोग इसे ठीक से लागू नहीं कर रहे हैं दूसरी बात यह है कि कुछ प्रयोग प्रकृति में विनाशकारी हैं इसलिए उस स्थिति में संपत्ति का नुकसान होता है उदाहरण के लिए आप विचार कर रहे हैं कि कैसे 50 स्टिक्स के एक माचिस की डिब्बी में कई माचिस की तीलियाँ ठीक हैं इसलिए यदि वास्तविक प्रयोग किया जाता है तो प्रत्येक 50 में से आप सभी 50 को प्रकाश देने की कोशिश करेंगे यदि आप सभी 50 को जलाते हैं तो पूरे बक्से नष्ट हो जाते हैं इसलिए ऐसे प्रयोग हैं जो वास्तव में विनाशकारी हैं दूसरी बात यह है कि ऐसे प्रयोग हो सकते हैं जो बहुत महंगे हैं उदाहरण के लिए उपग्रहों का प्रक्षेपण ठीक है, इसलिए आप लॉन्च करना जारी नहीं रख सकते हैं और देखते हैं कि सफलता की संभावना क्या है ये वास्तव में उस समय के दौरान किए जाते हैं जब आप पिछले डेटा को रिकॉर्ड करते हैं और उसके आधार पर आप संभावनाओं की गणना करते हैं और कुछ काउंटर सहज ज्ञान युक्त भी हो सकता है उदाहरण के लिए अगर मुझे लगता है कि ए एन के वर्गमूल के बराबर है ठीक है कि इसका मतलब है कि प्रत्येक  $n$  परीक्षणों में से  $n$  गुणा का वर्गमूल,  $ah$  घटना  $e$  के अनुकूल है, इसलिए यदि मैं  $n$  द्वारा  $n$  पर विचार करता हूँ तो वह  $n$  द्वारा  $n$  है और यदि मैं उस सीमा को लेता हूँ जो अब शून्य हो जाती है तो स्वाभाविक रूप से हम समझते हैं कि यदि प्रायिकता 0 है इसका मतलब है कि संभाव्यता घटना घटित नहीं होती है यह असंभव भी नहीं है लेकिन वास्तव में घटना असंभव नहीं है केवल यही हो रहा है कि  $n$  की तुलना में परीक्षणों की संख्या बहुत कम है जहां घटना देखी जाती है आइए देखें यह 4 परीक्षणों में से 2 बार आपको सफलता मिलती है यदि आपके पास 9 है तो आपके पास तीन गुना है यदि आपके पास सोलह है तो आपके पास चार गुना है इसलिए घटना वास्तव में हो रही है लेकिन घटना दुर्लभ और दुर्लभ होती जा रही है क्योंकि परीक्षणों की संख्या बढ़ जाती है ई संभाव्यता शून्य का मतलब असंभव नहीं है इसका मतलब है कि घटना दुर्लभ घटना है इसलिए यह थोड़ा सा उल्टा है यदि आप बहुत सख्त गणितीय शब्दों में बात कर रहे हैं तो हम कहते हैं कि घटना असंभव है तो हम संभावना शून्य आवंटित करते हैं लेकिन यहां हमारे पास संभावना शून्य घटना हो सकती है असंभव नहीं है इसलिए यहां इसका मतलब है कि दुर्लभ घटना की संभावना ठीक है 0 है लेकिन इसका मतलब यह नहीं है कि घटना नहीं होती है आह इसका उल्टा भी सच है हम कह सकते हैं कि एन बराबर है एन माइनस एन को पावर वन बाय तीन ठीक है तो यहाँ एक बटा  $n$  बराबर  $n$  माइनस  $n$  के बराबर घात एक बटा तीन को  $n$  से विभाजित किया जाता है जो कि एक माइनस एक बटा  $n$  से घात दो बटा तीन है जो एक में परिवर्तित हो जाता है इसलिए आप यहां देख सकते हैं कि घटना निश्चित नहीं है यहां तक कि क्योंकि कभी-कभी घटना नहीं होती है, लेकिन फिर से इसका मतलब है कि जिस समय ऐसा नहीं होता है वह दुर्लभ होता है जिसका मतलब है कि लगभग आप लगभग निश्चित रूप से कह सकते हैं कि घटना होती है यह निश्चितता के साथ लगभग निश्चितता के साथ नहीं है, इसलिए आप संभावना कह सकते हैं घटनाएँ जो मा  $y$  नहीं होता है कभी-कभी एक भी होता है इसलिए यह फिर से थोड़ा सा सहज ज्ञान युक्त होता है लेकिन फिर भी यह प्रायिकता की परिभाषा को थोड़ा और बढ़ा रहा है अब मैंने आपको प्रायिकता

की दो परिभाषाएँ दी हैं जो बहुत पहले विकसित हुई थीं और फिर क्या हुआ कि जब हम जब अन्य गणितज्ञों को इस बारे में पता चला कि परिभाषाओं में समस्याएँ हैं, जिसका अर्थ है कि सैद्धांतिक ढांचे पर ये परिभाषाएँ सार्वभौमिक नहीं हैं, तो उन्होंने सोचा कि शायद विषय नींव में बहुत मजबूत नहीं है, उसी समय के आसपास डेविड हिल्बर द्वारा लाए गए गणित में संपूर्ण गणित को औपचारिक रूप देने के लिए एक रूपरेखा तैयार की और इसलिए संभाव्यता की परिभाषा को भी औपचारिक रूप देने की आवश्यकता थी,

इसलिए 1933 में कलमोगोरोव में रूसी गणितज्ञ वे संभाव्यता के लिए एक बाहरी आधार प्रदान करने में सफल रहे,

इसलिए मैं इस परिभाषा को यहां स्वयंसिद्ध परिभाषा देता हूँ। यह था कि यह केवल एक ढांचा है जो आपको यह नहीं बताता है कि संभाव्यता की गणना कैसे करें  $b$  ut यदि कोई प्रायिकता है तो उस प्रायिकता की वैधता और कुछ नियम भी होंगे जो प्रायिकता की गणना के लिए दिए जा सकते हैं, इसलिए मान लीजिए कि हम  $s$  को एक नमूना स्थान मानते हैं और आइए हम विचार करें कि घटनाएँ वास्तव में इसके उपसमुच्चय हैं तो आइए विचार करें एक वर्ग जिसका अर्थ है ओके के सबसेट का एक सेट, आइए हम इसे कुछ नाम दें, आइए हम इसे कुछ नोटेशन कहकर निरूपित करें, मैं सीआई का उपयोग करूंगा, कुछ अलग नोटेशन का उपयोग कर रहा हूँ क्योंकि इस सबसेफ वगैरह को हम घटनाओं के लिए उपयोग कर रहे हैं ठीक है अभी मैं घटनाओं के सेट पर विचार कर रहा हूँ

इसलिए मैं थोड़ा अलग नोटेशन दे रहा हूँ

इसलिए मैं इस स्क्रिप्ट नोटेशन स्क्रिप्ट का उपयोग कर रहा हूँ सी कभी-कभी इसे स्क्रिप्ट बी वगैरह के रूप में लिखा जाता है,

इसलिए कोई भी नोटेशन जो आप उपयोग कर सकते हैं मुझे यहां डालने दें सी अब इस वर्ग को निम्नलिखित दो को संतुष्ट करने दें शर्तें एक अगर ई सी से संबंधित है तो इसका मतलब है कि ई पूरक सी से संबंधित है इसका क्या मतलब है तो इसका मतलब है कि मैं इस नोटेशन का उपयोग कर सकता हूँ मैं इस नोटेशन का उपयोग कर सकता हूँ मैं इस नोटेशन का उपयोग कर सकता हूँ

इसलिए ये सभी समान हैं इसका मतलब वर्ग है सेटों के लिए इसे लिखने के विभिन्न तरीके हैं इसका मतलब है कि यदि ई एक घटना पर विचार किया जाना है तो इसका पूरक भी एक वैध घटना है, दूसरी बात अगर मैं ई 1 ई 2 कहने पर विचार कर रहा हूँ और

इसलिए ये सभी वैध घटनाएँ हैं तो इसका मतलब है कि ईआई का संघ भी एक वैध घटना है, अब आप सोच सकते हैं कि मैं इस तरह क्यों विचार कर रहा हूँ इसका कारण यह है कि पहले मैंने चर्चा की जब मैं सेट की घटनाओं के बारे में बात करता हूँ तो मुझे उनके यूनियनों के बारे में बात करने में सक्षम होना चाहिए चौराहों के पूरक मतभेद क्योंकि वे हैं सभी विभिन्न प्रकार की घटनाओं को निरूपित करते हैं,

इसलिए जब मैं एक संभाव्यता संरचना को परिभाषित कर रहा हूँ, तो ये सभी मान्य होने चाहिए,

इसलिए जैसा कि मैंने उल्लेख किया है, यह परिभाषा संभाव्यता के सिद्धांत को औपचारिक बनाने के लिए है,

इसलिए इसे इस तरह के सेट का एक वर्ग माना जाता है जैसे कि जब भी कोई घटना होती है माना जाता है तो ऐसी सभी चीजें भी होनी चाहिए जो कि संघों के चौराहों के पूरक अंतर हैं जो घटना होगी

इसलिए यह संरचना वास्तव में गणित में इसे संतुष्ट कर रही है। इसे सिग्मा क्षेत्र कहा जाता है, लेकिन आपके स्तर पर मुझे सिग्मा क्षेत्र की औपचारिक परिभाषा के बारे में बात करने की आवश्यकता नहीं है, लेकिन ये बुनियादी शर्तें हैं जो यहां संतुष्ट हैं,

इसलिए अब हम मान लें कि  $ah$  एक नमूना स्थान है और फिर एक वर्ग है इसके उपसमुच्चय के बाद प्रायिकता को एक फलन के रूप में परिभाषित किया जाता है,

इसलिए हम इसे संकेतन कहते हैं, यह  $c$  से शून्य से एक सेट पर परिभाषित है प्रायिकता शून्य से एक के बीच की संख्या है जो निम्नलिखित तीन स्वयंसिद्धों को संतुष्ट करती है। हमेशा गैर नकारात्मक होता है दूसरा पूर्ण नमूना स्थान की संभावना एक के बराबर है और तीसरा स्वयंसिद्ध यह है कि ई एक ई दो और इसी तरह जोड़ीदार असंबद्ध हो मैंने आपको पहले परिभाषित किया था कि जोड़ीवार असंबद्ध का अर्थ क्या है इसका मतलब है कि अगर मैं उनमें से कोई भी दो लेता हूँ तो वे असंबद्ध होते हैं तो संघ की संभावना  $e_i$  अनंत के बराबर होती है जो कि  $e_i$  की सिग्मा संभावना के बराबर होती है जिसका अर्थ है कि यदि घटनाएं असंबद्ध हैं तो उनमें से कम से कम एक के होने की संभावना नहीं है हिंग लेकिन संभावनाओं का योग यह संकेत हो सकता है यदि आप बहुत परिचित नहीं हैं तो मुझे इसे इस तरह लिखने दें, वास्तव में इसका मतलब कुछ ऐसा होगा मान लीजिए कि मैं दो पर विचार कर रहा हूँ तो एक संघ बी की संभावना बी की प्लस संभावना बन जाएगी अगर मैं एक यूनियन बी यूनियन सी की संभावना पर विचार कर रहा हूँ तो वह बी की प्लस संभावना की संभावना बन जाएगी और सी की संभावना है,

इसलिए यहां एबीसी वगैरह वे असंबद्ध घटनाएँ हैं ठीक है अब आप सोच सकते हैं कि यह परिभाषा क्यों दी गई थी

इसलिए पहली बात यह है कि यह गैर नकारात्मक है, पूर्ण स्थान की संभावना एक होगी जिसका अर्थ है कि जब भी आप किसी घटना की संभावना की गणना कर रहे हैं तो यह शून्य और एक के बीच का अनुपात है और तीसरा यह है कि संभाव्यता एक योगात्मक कार्य है जिसका अर्थ है कि यदि मैं किसी घटना पर विचार कर रहा हूँ फिर एक और घटना फिर एक और घटना अगर मैं व्यक्तिगत संभावनाओं को जानता हूँ और मुझे पता है कि वे असंबद्ध हैं तो संघ की संभावना कुछ संभावनाएँ होंगी  $n$  यहाँ से ओउ तो इसे वास्तव में संभाव्यता की स्वयंसिद्ध परिभाषा कहा जाता है इस कलमोगोरोव की बात इसे संभाव्यता की बाहरी परिभाषा कहा जाता है अब इसके आधार पर संभाव्यता के कई अन्य नियम आसानी से स्थापित किए जा सकते हैं, उदाहरण के लिए हम स्वयंसिद्ध के कुछ परिणाम स्थापित कर सकते हैं एक असंभव घटना की परिभाषा की संभावना हमेशा शून्य होती है

इसलिए इसे स्वयंसिद्ध तीन में साबित करना बहुत आसान है आइए हम घटना ई को एस और ई 2 ई 3 के रूप में लेते हैं और इसी तरह फाई के बराबर है तो मैं यहां क्या कथन प्राप्त करूंगा ईआई के इस मिलन में बायां हाथ ईआई का संघ है पहला सेट एस है और अन्य सेट फाई हैं तो संघ स्वयं बन जाएगा दाहिने हाथ की ओर ई की संभावना है जो एस की संभावना है और ई दो की संभावना है कि फी प्लस ई थ्री की प्रायिकता है जो कि फी की प्रायिकता है और इसी तरह आप इस कथन को ध्यान से देखें कि मैंने जो लिखा है वह पीएस एक है

इसलिए मैं लिख रहा हूँ एक प्लस पी फी प्लस पी फी के बराबर है और इसी तरह अब कब क्या यह संभव है कि यह दोनों तरफ से रद्द हो जाए, तो आप क्या कह रहे हैं यदि मैं पी पांच पी पांच पी पांच और उस पर शून्य है जिसका मतलब है कि पी पांच शून्य होना चाहिए तो दूसरा परिणाम यह है कि अगर मैं विचार कर रहा हूँ ई को एफ का सबसेट होने के लिए कहें तो यह कैसे माना जाता है कि मैं नस आरेख का उपयोग करता हूँ,

इसलिए यह मेरा सेट ई है और यह एक घटना एफ है तो यह हिस्सा क्या है यह हिस्सा ई माइनस एफ सॉरी मैंने गलत लिखा है यह आह है तो यहां वास्तव में यह एफ ई का एक सबसेट है

इसलिए यह ई है जो बाहरी सेट है और यह अंदर का सेट एफ है

इसलिए मैं यहां इस सेट ई को एफ यूनियन ई माइनस एफ के रूप में लिख सकता हूँ,

इसलिए यह ई एफ यूनियन ई माइनस एफ के बराबर है। सेट ई को दो अलग-अलग सेटों के मिलन के रूप में लिखा जाता है,

इसलिए ई की संभावना एफ की संभावना बन जाएगी और ई माइनस एफ की संभावना होगी क्योंकि एफ और ई माइनस एफ असंबद्ध हैं

इसलिए अब हमने जो लिखा है वह हर सेट के लिए है कि संभावना गैर नकारात्मक संभावना है ई का शून्य से बड़ा या उसके बराबर है

इसलिए यदि हम इसका उपयोग करते हैं तो यह शब्द गैर-ऋणात्मक है जिसका अर्थ है प्रायिकता  $f$  का हमेशा  $e$  की प्रायिकता से कम या बराबर होता है,

इसलिए सबसे पहले हम यहाँ से कई कथन प्राप्त कर सकते हैं, हम लिख सकते हैं कि  $e$  घटा  $f$  की प्रायिकता  $e - e$  की प्रायिकता के बराबर  $f$  की

प्रायिकता है,

इसलिए यह वह कथन है जो हमें मिल रहा है कि यदि  $f$ ,  $e$  का एक उपसमुच्चय है तो  $e$  घटा  $f$  की प्रायिकता को  $f$  की प्रायिकता  $e$  घटाकर प्रायिकता के रूप में लिखा जा सकता है और यह शून्य से अधिक या उसके बराबर है इसका अर्थ है कि  $e$  की प्रायिकता हमेशा  $f$  की प्रायिकता से अधिक या बराबर होती है। यह एक महत्वपूर्ण कथन है जो हमने दिया है यदि  $f$ ,  $e$  का उपसमुच्चय है, तो इसका क्या अर्थ है कि घटना  $f$  के घटित होने की संभावना घटना  $f$  से अधिक है और फिर  $e$  की प्रायिकता  $f$  की प्रायिकता से अधिक या उसके बराबर होगी।

इसलिए यह मूल को संतुष्ट कर रहा है जिसे आप संभाव्यता की एकरसता संपत्ति कह सकते हैं, जिसका अर्थ है कि यदि किसी घटना के होने की अधिक संभावना है तो उसके अधिक अनुकूल परिणाम हैं तो उसके होने की संभावना अधिक होनी चाहिए जो कि संभाव्यता एक मोनोटोन फ़ंक्शन संभावना है एक मोनोटोन फ़ंक्शन है हम एक और आह उपयोगी संपत्ति भी साबित कर सकते हैं यदि मैं ई यूनिन ई तारीफ कहता हूं तो वह पूर्ण स्थान के बराबर है इसलिए यदि मैं आवेदन करता हूं तो वह पीएस के बराबर है जो कि एक के बराबर है जिसका मतलब है कि ई तारीफ की संभावना है हमेशा ई की एक माइनस प्रायिकता का मतलब है कि पूरक घटना की संभावना एक माइनस मूल घटना की संभावना है कि हम अब इसका उपयोग करके साबित करने में सक्षम हैं, ये कुछ प्राथमिक नियम हैं जो तुरंत पालन करते हैं ताकि हम क्या कर सकें संभाव्यता साबित करने के लिए एक सेट फ़ंक्शन है जिसका अर्थ है कि प्रत्येक घटना के लिए यह परिभाषित कर रहा है कि शून्य और एक के बीच एक संख्या आवंटित कर रहे हैं यह मोनोटोनिक फ़ंक्शन पूर्ण नमूना स्थान की संभावना है जो निश्चित घटना है असंभव घटना की संभावना है जो फाई शून्य है

इसलिए अन्य सभी संभावनाएं इन दो चरम सीमाओं के बीच स्थित हैं, संभावना योगात्मक है इसका मतलब है कि अगर मेरे पास असंबद्ध घटनाएं हैं और संघ की संभावना कुछ संभावनाओं के बराबर है तो संभावना है मोनोटोन जिसका अर्थ है कि यदि कोई घटना होने की अधिक संभावना है तो इसकी संभावना अधिक होगी ये कुछ हैं जिन्हें आप बुनियादी ढांचा कह सकते हैं जिसके तहत यह बाहरी परिभाषा दी गई थी और इसके आधार पर कुछ अन्य नियम होंगे जो अगले में प्राप्त किए जा सकते हैं व्याख्यान मैं इन सभी नियमों को दूंगा और फिर हम देखेंगे कि हम विभिन्न व्यावहारिक समस्याओं को हल करने के लिए इसे कैसे लागू कर सकते हैं धन्यवाद