تو آج میں بے ترتیب متغیرات کے تصور کو متعارف کرانے جا رہا ہوں
تو آئیے ہم اس بات کو دوبارہ بیان کریں کہ ہم نے اب تک کیا کیا ہے ہم نے غور کیا ہے کہ ایک بے ترتیب تجربہ ہے جس کو تمام ممکنہ نتائج کا مجموعہ کہا جاتا ہے۔ نمونہ کی جگہ پھر نمونے کی جگہ کا کوئی بھی ذیلی سیٹ ایک واقعہ ہوتا ہے ہم نے واقعات کے امکانات کا حساب لگانے کے مختلف طریقوں کا مطالعہ کیا ہے جس میں ہم نے ایک غیر متناسب فریم ورک دیا ہے جس میں ہم واقعات کے مختلف مجموعوں کے امکانات کا حساب لگا سکتے ہیں مثال کے طور پر ان کے اتحاد کے لئے ایک فارمولا ہے واقعات مشروط امکان کا امکان کیا ہے ہم نے bayes theorem وغیرہ کی تعریف کی ہے ہم نے آزاد واقعات کے تصور کا بھی مطالعہ کیا ہے اب کیا ہوتا ہے کہ کئی بار ہمیں واقعہ کی مکمل تفصیل میں دلچسپی نہیں ہوتی ہے بلکہ ہم اس سے وابستہ کچھ عددی خصوصیت میں دلچسپی لیتے ہیں۔ اس کے ساتھ آئیے ایک میچ کا کہنا ہے کہ مثال کے طور پر یہ
نتیجہ کو دیکھ سکتا ہے لہذا یہ کچھ سکور کی شکل میں ہے e ایک بیڈمنٹن میچ ہے اب بیڈمنٹن کے میچ میں
تو مثال کے طور پر 21 19 یعنی کسی کھیل میں جیتنے والے کھلاڑی نے 21 پوائنٹس بنائے اور ہارنے والے کھلاڑی نے 19 پوائنٹس بنائے اگر ہم ٹینس کے کھیل پر غور کریں
تو ہم اسے دیکھ سکتے ہیں۔ پوائنٹس
اس لیے اصل میں میچ کا پورا دورانیہ بہت سے r75 تو سیٹ ہیں اور سیٹ کے اسکور دیئے گئے ہیں جیسے 6 4 6 4 6 3 قسم کی چیز پیش کیے گئے کتنے ڈبل فالٹ تھے لیکن بالآخر ہم اسکور کو اسی طرح دیکھتے ہیں AC پہلوؤں پر مشتمل ہو سکتا ہے اس کا مطلب ہے کہ کتنے
اگر آپ کسی کرکٹ میچ کو دیکھتے ہیں
تو ہم کچھ کھلاڑیوں کے اسکور یا مخصوص کھلاڑیوں کی وکٹوں کو دیکھ سکتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ ہم مختلف ایونٹس کے نمبروں کو جوڑ رہے ہیں اس پر آپ دوسرے طریقوں سے غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کچھ حقیقی زندگی کی صورت حال کو دیکھتے ہیں کہ ایک مریض ڈاکٹر کے پاس جاتا ہے اب اسے کچھ دوائیں ملیں گی اس کے بعد دوا لینے کے بعد نتیجہ یہ دیکھنا ہے کہ وہ ٹھیک ہو رہا ہے یا ٹھیک نہیں ہو رہا۔
اسی طرح ڈاکٹر کے نقطہ نظر سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ وہ مریضوں کا علاج کر رہا ہے
تو مثال کے طور پر وہ ایک دن میں 20 مریضوں کا علاج کرتا ہے اب ان 20 مریضوں میں سے کتنے کو فائدہ ہوا کہ شاید 18 کو فائدہ ہوا دو کو فائدہ نہیں ہوا
تو اگر ہم دیکھیں اس قسم کی چیز پر لہذا ہم واقعی واقعات سے وابستہ کچھ اعداد کو دیکھ رہے ہیں اب اس ایسوسی ایشن کو بے ترتیب متغیرات کے تصور سے بیان کیا جاسکتا ہے آئیے ہم سب سے آسان مثال دیکھیں فرض کریں کہ ہم باسکٹ بال کے کھیل پر غور کرتے ہیں اور ہم دیکھتے ہیں
a کہ کتنی کامیاب باسکٹ ہٹ ہوئی ہیں۔ ایک کھلاڑی کی طرف سے
ایک عددی قدر والا متغیر ہے اب میچ کے کھیل کے بعد سے اور وہ کتنے کو کامیابی سے مارے گا کہ بذات خود x تو اس صورت میں پھر یہ نمبر ایک بے ترتیب واقعہ ہے لہذا یہ ہٹ کرنے میں کامیابی کے بعد سے ایک بے ترتیب متغیر بن جاتا ہے۔ ٹوکری بے ترتیب ہے ہم اسے بے ترتیب متغیر کہتے ہیں
تو آئیے غور کریں کہ ہم تین سکوں کو اچھالتے ہیں ٹھیک ہے اب نتائج یہ ہیں نمونے کی جگہ کو تینوں سروں کے طور پر لکھا جا سکتا ہے دو سر کی شکل میں ہو سکتا ہے یا آپ کے پاس دو دم ہو سکتے ہیں یا آپ کے پاس تینوں ایلس ہو سکتے ہیں thh اور hht hth اور ایک دم جو کہ لیکن ہمیں اصل نتیجہ میں کوئی دلچسپی نہیں ہے بلکہ ہم اس میں دلچسپی رکھتے ہیں کہ کتنے سروں کا مشاہدہ کیا گیا ہے یا کتنی دموں کا مشاہدہ یا 3 کی قدر لے سکتا ہے۔ حقیقت میں x 0 1 2 دم کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے پھر x کیا گیا ہے لہذا میں اس تجربے سے وضاحت کرتا ہوں کہ اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میں ایک ڈالنا چاہتا ہوں۔ قیمت نمونے کی جگہ کے ہر عنصر کے مطابق ہے لہذا مثال کے طور پر میں کہہ سکتا ہوں کہ کو دیکھوں x کے hth کا 1 ہے کیونکہ یہاں ایک دم ہے اسی طرح اگر میں x hht ہے کیونکہ یہاں کوئی دم نہیں ہے 0 x کا hh
ڈالوں thh کا x تو یہ اس کے برابر ہے 1 اگر میں
ڈالوں htt کا x تو یہ 1 ہے پھر اگر میں
کے برابر ہے 3 x کا tt کے برابر ہے اور 2 x کا 2 tth ہے یعنی x کا tht تو دو دم ہیں جو
تو ہمارے پاس کیا ہے نمونے کی جگہ کے ہر عنصر کے ساتھ کیا گیا ہم نے ایک حقیقی نمبر کو منسلک کیا ہے اس طرح ایک فنکشن کا استعمال نمونے کی جگہ کے ہر x کو بے ترتیب متغیر کہا جاتا ہے اس طرح x استعمال کر رہے ہیں اس x کرتے ہوئے دستخط کریں ہم یہاں فنکشن کو بے ترتیب متغیر کہا جاتا ہے لہذا میں بے ترتیب متغیر کی رسمی تعریف دیتا ہوں۔ ایک x عنصر کو ایک حقیقی نمبر تفویض کرتا ہے اس لئے ایک حقیقی قابل قدر فنکشن ہے جس کی وضاحت نمونے کی جگہ پر کی گئی ہے آئیے ہم اس مقبول اصطلاح کی پیروی کریں جو آپ x رینڈم متغیر قسم کی چیز ہے لہذا اس کا b سے f a ریاضی میں استعمال کرتے ہیں آپ ایک فنکشن کو کیسے لکھتے ہیں آپ ایک فنکشن لکھتے ہیں جیسے دراصل x تمام حقیقی نمبروں کا مجموعہ ہے لہذا r ایک نمونہ کی جگہ ہے اور s سے حقیقی اعداد کے سیٹ تک ہے s سے x مطلب یہاں
ٹھیک ہے ah ہے لیکن امکانی اصطلاح میں کنونشن اسے بے ترتیب متغیر کہنا ہے ah ایک فنکشن
تو نام بھی ہو سکتا ہے۔ وضاحت کی جائے کہ یہ ایک متغیر ہے کیونکہ مختلف نتائج پر منحصر ہے اس کی مختلف قدریں ہوتی ہیں اور وہ نتائج بے ترتیب تجربے سے آتے ہیں اس لیے اسے ریاضی کے لحاظ سے بے ترتیب متغیر کہا جاتا ہے یہ ایک فنکشن ہے۔ آئن جس کا مطلب ہے کہ sx سے تعلق رکھنے والے ہر اومیگا ایک حقیقی نمبر ہے لہذا بے ترتیب متغیرات کی مثالیں ہو سکتی ہیں مثال کے طور پر اگر میں کسی بالغ omega
مرد کی اونچائی کو دیکھتا ہوں
تو یہ کچھ تعداد ہو گی لہذا انتہائی معاملے کو دیکھتے ہوئے کہ کسی کو چار فٹ کہا جا سکتا ہے
تو اس کا مطلب ہے کہ تقریباً 120 سینٹی میٹر اور کوئی اتنا اونچا ہو سکتا ہے جتنا کہ آٹھ میٹر لے رہا ہے انتہائی اہ کیس اہ آٹھ فٹ
تو ہو سکتا ہے آہ 240 سینٹی میٹر قسم کی چیز ہو اس لیے ہمارے پاس 120 سے 240 کے درمیان کی قدروں کا سیٹ ہو سکتا ہے سینٹی میٹر فرض کریں کہ میں کسی شخص کی عمر پر غور کرتا ہوں
تو ایک شخص کی عمر 0 سے کس بھی ہوسکتی ہے
تو رض کریں کہ میں اعداد پر غور کر رہا ہوں
تو و کتا ہے کہ سب سے بوڑھے شخص کی عمر زیادہ سے زیادہ 120 ال ہو س لیے آپ کوششوں کی تعداد 0 سے 125 سال رکھ سکتے ہی . کسی ہدف کو نشانہ بنانے کے لیے ضروری ہے کہ اس کی ممکنہ قدریں کیا ہیں یہ ایک قدر لے سکتا ہے جیسے آپ ایک میں مار سکتے ہیں آپ دو میں 3 r میں نہیں مار سکتے اور اسی طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میں نے ایک مثال دی ہے جس میں بے ترتیب متغیر اقدار 0 1 لے رہا ہے۔ 2 نے یہاں ایک مثال دی ہے جہاں لی گئی قدریں ایک وقفہ میں ہیں جس کا مطلب ہے کہ قدروں کی بے حساب لامحدود تعداد یہاں آپ کوششوں کی تعداد دیکھ سکتے ہیں
تو 1 2 3 اور اسی طرح یہ قدروں کی لامحدود تعداد ہے لہذا ایک بے ترتیب متغیر کی بنیاد پر اس تفصیل پر اسے یا
nr 1 تو وہ کہا جا سکتا ہے جو ایک محدود یا بے شمار لامحدود قدروں کو لیتا ہے جس کا مطلب ہے کہ آپ 1 2 3 لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح تک لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح لامحدود بہت سے اس کا مطلب ہے کہ آپ گنتی لامحدود کہہ سکتے ہیں۔ اقدار کی تعداد یا اگر آپ کہتے ہیں 3 2

کہ اونچائی کی عمر کا وزن لائف ٹائم وغیرہ
تو یہ سب مسلسل بے ترتیب متغیرات کی مثالیں ہیں کیونکہ بے ترتیب متغیر آپ کی کلاس 11 اور 12 میں وقفہ کے ساتھ قدریں لیتا ہے جو آپ کے
نصاب میں موجود ہے اس لیے میں اس کی وضاحت کروں گا ۔ ایک مجرد بے ترتیب متغیر کی امکانی تقسیم کی تفصیل اس کی
توقع یا وسط وغیرہ کو کیسے معلوم کیا جائے لہذا اگر کوئی بے ترتیب متغیر ایک محدود لیتا ہے
تو گنتی کے لحاظ سے لامحدود تعداد ہوتی ہے۔ قدریں
تو اسے ایک مجرد بے ترتیب متغیر کہا جاتا ہے اگر بے ترتیب متغیر محور کی قدریں وقفہ سے زیادہ ہوتی ہیں
تو اسے مسلسل بے ترتیب متغیر کہا جاتا ہے درحقیقت امکانی تقسیم کی نمائندگی کی بنیاد پر بہتر امتیازات ہوتے ہیں لیکن اس مرحلے پر ہم ان
تعریفوں کو لیں گے۔ مجرد اور مسلسل بے ترتیب متغیرات کی تعریف جب آپ اعلی درجے کی کلاسوں میں جائیں گے
تو آپ بے ترتیب متغیر کی مزید سخت تعریفیں سیکھیں گے مثال کے طور پر یہ ایک قابل پیمائش فنکشن ہے لیکن کلاس گیارہویں اور بارہویں درجے
لہذا آپ کو اپنے نصاب میں موجود مجرد بے ترتیب متغیر کے امکانات کی تقسیم کا پتہ لگانے کے uh میں ہم اس کا مطالعہ نہیں کرتے گہرائی
طریقہ کار کو سمجھنا چاہئے لہذا ہم اس پر کچھ وقت گزاریں گے اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مجرد بے ترتیب متغیر کے لئے ہر ممکن سیٹ
کہنے کے برابر اور اسی طرح x 1 x 2 ہے e قدروں کو بذریعہ بیان کیا جا سکتا ہے اس لیے میں کچھ اشارے استعمال کروں گا کہ x
اور اسی طرح یا x 1 x 2 ہیں xn
عناصر کہتے ہیں یا آپ کے پاس عناصر کی لامحدود تعداد ہے لیکن ان کو شمار کیا جا n تو آپ کے پاس عناصر کی ایک محدود تعداد ہے جسے
کی وضاحت کی بنیاد پر مختلف واقعات یا مختلف نتائج کا تجربہ uh سکتا ہے لہذا یہ اب اصل بے ترتیب تجربے میں بے شمار لامحدود تعداد ہے
کریں اب کچھ امکانات مختص کیے جاتے ہیں جب وہ واقعات قدروں میں تبدیل ہو جاتے ہیں
تو ہر عنصر بے ترتیب متغیر کا استعمال کرتے ہوئے ایک قدر میں تبدیل ہو جاتا ہے پھر متعلقہ امکانات ان اقدار کے ساتھ منسلک ہو سکتے ہیں جو
ایک مجرد امکان کو جنم دیتے ہیں ۔ ڈسٹری بیوشن
تو میں اس کے بارے میں بات کرتا ہوں ایک ڈسکریٹ رینڈم متغیر کی امکانی تقسیم ہر ایک قدر کے لیے امکانات کی ایک تفویض ہے جو بے ترتیب
لے سکتا ہے اس لیے میں اس شیٹ کو یہاں رکھنے دیتا ہوں تاکہ اس بات پر غور کیا جا سکے کہ کیا امکانات ہیں تاکہ اگر میں بے ترتیب x متغیر
مختص کرتا ہوں p کا امکان x1 کی قدریں لے رہا ہوں پھر اگر میں x x1 x2 xn متغیر پر غور کروں
دو کے برابر ہے p دو کے برابر ہے x کا ایک امکان x کا کہنا ہے کہ p کے برابر ہے x1 برابر ہے ity x تو ہم احتمال لکھ سکتے ہیں
کے برابر ہے اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بے ترتیب کے تمام امکانات نمونے کو اب اصل pn کے برابر ہے xn کا امکان x اور اسی طرح
کی قدریں مختص کی گئی ہیں جب احتمالات کی تخصیص کی گئی تھی x 1 x 2 xn نمونے کی جگہ میں
p 2 میں تبدیل ہو گئے ہیں۔ p 1 تو وہاں کچھ شرائط نہیں جو مطمئن تھیں مثال کے طور پر تمام امکانات کا مجموعہ 1 ہے۔ اب وہ احتمالات
کا مجموعہ 1 کے برابر ہونا چاہیے یہ تمام امکانات ہیں اس لیے تمام احتمالات غیر منفی ہونے چاہئیں اب ڈسکریٹ رینڈم متغیر pi اس لیے pn
میں ہم بالکل ان اقدار کے بارے میں بات کریں گے جو تفویض کی گئی ہیں اس کا مطلب ہے کہ امکانات ہیں اصل میں مثبت
کے برابر 1 کے برابر ہے n سے pii 1 کے لیے مثبت ہے اور سگما i تمام pi تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ
کی احتمالی تقسیم کہا جاتا ہے x کو بے ترتیب متغیر p 1 p 2 pn تو اس
کے امکانات تفویض کر رہا x 2 en 2 xn کو x 1 p 2 سے p 1 کے ساتھ کام کر رہے ہیں اور میں x تو یہاں ہم مجرد رینڈم متغیر
کی امکانی تقسیم کہا جاتا ہے مجھے ایک کے لیے اس کا حساب لگانے دو صورت میں تین x کو بے ترتیب متغیر p 1 p 2 pn ہوں پھر اس
سکوں کے پھینکنے کی اس مثال پر غور کریں اگر میں سکوں کو منصفانہ سمجھتا ہوں
دم کی تعداد ہے x تو ہم یہاں ہر قیمت کے امکانات کا حساب لگا سکتے ہیں تین فیئر سککوں کے پھینکنے کے تجربے پر غور کریں اور یہاں
صفر کے برابر ہے اس کے مساوی ہے جب تینوں سروں x صفر کے برابر ہے اب x تو آئیے امکان کا حساب لگاتے ہیں۔ تقسیم کیا امکان ہے کہ
کا مشاہدہ کیا جائے
hhh تو یہ اصل میں امکان کے امکان کے برابر ہے
کا امکان ایک کے برابر ہے x ہے۔ اسی طرح اگر میں دیکھتا ہوں اس وقت 8 x تو یہ 1
برابر 1 ہے جب ایک دم دیکھا جائے x تو تجربے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ
hhthth اور thh تو
لکھ سکتے ہیں۔ thh اور hhthth تو ہم اسے
کا امکان 2 کے x کا امکان 1 کے برابر ہے اسی طرح اگر میں یہ دیکھتا ہوں کہ x ہے۔ لہذا ہم نے حساب لگایا ہے کہ 8 x تو یہ امکان 3
برابر ہے
htttht کے مساوی ہے لہذا یہ tth اور htttht کی قدر 2 ہوتی ہے جب دو دموں کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ x تو آپ دیکھ سکتے ہیں کہ
x 3 دیکھ سکتے ہیں کہ امکان p 3 کا امکان دوبارہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ امکان 3 ضرب 8 کے برابر ہے اسی طرح آپ tth اور
کے برابر ہے جب تمام 3 دم موجود ہیں x 3 کے برابر ہے لہذا
ہے۔ by 8 کا امکان ہے جو کہ ttt 1 تو یہ
کے لیے بے ترتیب متغیر کی تمام ممکنہ قدروں سے مطابقت رکھنے والے احتمالات کا حساب لگایا ہے x تو اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میں نے
برابر ہے دو کے برابر تین x دو یعنی امکان p برابر ایک کے برابر ہے تین ضرب آٹھ x ایک جو امکان ہے p صفر کے برابر ہے p صفر
برابر ہے 3 کے برابر 1 ضرب 8۔ لہذا اگر آپ رقم کو دیکھیں ان میں سے یہ 1 ضرب 1 جمع 3 جمع 3 جمع x یعنی امکان p 3 ضرب 8 اور
برابر ہے p 3 1 جمع p 2 جمع p 1 جمع p 0 ہے۔ یعنی 1 آپ کے پاس t 8 x 8 تھا کے برابر ہے۔ 1
تو یہ ایک درست امکانی تقسیم ہے یہاں میں ایک اور مثال دیتا ہوں فرض کریں کہ ایک پیک آؤٹ میں 10 بلب ہیں ۔ جن میں سے تین ناقص ہیں ایک
صارف ان میں سے دو کو بے ترتیب طور پر خریدتا ہے ٹھیک ہے بلب کے ایک پیکٹ میں دس بلب ہوتے ہیں جن میں سے تین خراب ہوتے ہیں اور
ایک صارف ان میں سے دو کو بے ترتیب خریدتا ہے اب یقینی طور پر جب وہ دو خرید رہا ہے
کی ممکنہ قدریں کیا xx تو اس میں کچھ خرابیاں ہوسکتی ہیں۔ اس طرح ایکس کو کسٹمر کے ذریعہ خریدے گئے نقائص کی تعداد ہونے دیں پھر
ہوسکتی ہیں اس لئے دو میں سے شاید سب اچھے ہوں اس کا مطلب ہے کہ صفر کے نقائص میں سے ایک عیب دار ہو سکتا ہے یا دونوں عیب دار ہو
سکتے ہیں
کے x 0 کی امکانی تقسیم کا حساب لگانا چاہتے ہیں اس کا مطلب یہ ہے کہ کیا امکان ہے x ایک مجرد بے ترتیب متغیر ہے اب ہم x تو یہ ہے
کے برابر ہے x 2 کے برابر ہے اور کیا امکان ہے x 1 برابر کیا امکان
کا حساب لگانے کے لیے آئیے ہم مختلف امکانات کے حساب کتاب کو دیکھتے ہیں اگر ہم دس بلبوں کے پیکٹ میں سے دو بلبوں کو منتخب thi تو
کرنے پر غور کر رہے ہیں
تو امکانات کی کل تعداد دس سی دو ہے اب اگر میں کہوں کہ ان میں سے کوئی بھی خراب نہیں ہے

تو اس کا مطلب ہے کہ صارف نے 2 کا انتخاب کیا اور اسے دونوں اچھے مل گئے اب اس 10 بلب میں سے 7 اچھے ہیں یعنی اس کا انتخاب ان 7 میں سے ہے
ہے اب اسے c 2 ہے اور مقدمات کی کل تعداد 10 c 2 سے تقسیم کیا گیا ہے یعنی مقدمات کی سازگار تعداد 7 c 2 کو 10 c 2 تو یہ 7 دے رہا ہے اسے مزید آسان بنایا جا سکتا ہے میں نے جان بوجھ کر آسان نہیں کیا ah 45 by آسانی سے آسان کیا جا سکتا ہے اس لیے یہ 21 کے برابر ہونے کا کیا امکان ہے ایک بار پھر x پر غور کرتے ہیں کہ p1 صرف یہ دکھانے کے لیے کہ رقم بالکل ٹھیک ہے اسی طرح ہم امکانات کی کل تعداد دس سی دو ہے اب اگر کوئی عیب دار ہے
تو اس کا مطلب ہے کہ ایک غیر عیب دار ہے
تو اس کا مطلب ہے کہ اسے سات میں سے ایک اچھا ملتا ہے اور تین نقائص میں سے وہ ایک کا انتخاب کرتا ہے
سے تقسیم کیا c 2 میں 10 c 1 کو 3 c 1 تو مقدمات کی سازگار تعداد ہے سات
برابر 2 کا x یعنی یہ امکان ہے کہ p 2 اور 15 by لکھ سکیں یہ بھی 7 15 by ہے تاکہ آپ اصل میں 7 45 by تو یہ دوبارہ 21 سے تقسیم کیا گیا جو 3 کے برابر 45 کے برابر ہے جو کہ 1 ضرب 15 c 2 کو 10 c 2 مطلب یہاں ہے دونوں عیب دار مل گئے لہذا 3 کے برابر ہے یہ عیب داروں کی تعداد کی امکانی تقسیم ہے جیسے آپ یہاں 7 ضرب 15 جمع 7 بذریعہ 15 جمع دیکھ سکتے ہیں 1 بذریعہ 15 رقم کی ایک درست امکانی تقسیم ہے جس کی تعریف گاہک کی طرف سے خریداری میں نقائص کی x کے برابر ہے لہذا یہ مجرد ہے ترتیب متغیر 1 تعداد کے طور پر کی گئی ہے ، مجھے یہاں ایک اور مثال لینے دو یہاں ایک کارڈ ہے ترتیب سے تیار کیا گیا ہے ۔ 52 کارڈوں کی ایک اچھی طرح سے بدلی ہوئی ڈیک جس کا مطلب ہے کہ مکمل سیٹ 52 کارڈوں کا ہے وہاں سے ایک کارڈ ہے ترتیب طور پر تیار کیا جاتا ہے اگر تیار کردہ کارڈ 2 سے 10 کے درمیان کوئی بھی نمبر ہے
تو اس کا سکور وہ نمبر ہے جس کا مطلب ہے کہ اگر ہم ایک 2 کھینچتے ہیں
تو اسکور کو 2 کے طور پر مختص کیا جاتا ہے۔ اگر ہم 5 نکالتے ہیں
ہے 5. اگر نکالا گیا کارڈ کنگ کوئین ہے یا جیک ہے ed تو اسکور مختص ہوتا ہے۔
تو اس کا سکور 15 ہے۔ اگر ایک ایس ڈرا ہوا ہے
تو اس کا سکور 18 ٹھیک ہے
اسکور کو ظاہر کرتا ہے x تو آئیے ہے ترتیب متغیر کو دیکھتے ہیں کہ
کی ممکنہ قدریں 2 3 سے لے کر 10 تک ہیں اگر کنگ کوئین یا جیک نکالا جاتا ہے x کی ممکنہ قدریں کیا ہیں؟ x تو
تو مختص کردہ سکور 15 ہوتا ہے اور اگر ایک اکس نکالا جاتا ہے
جو قدریں لے سکتا ہے وہ 2 3 سے لے کر 10 تک ہے۔ 15 اور 18۔ x تو مختص کردہ سکور 18 ہوتا ہے۔ اس طرح
تو یہ ایک مجرد ہے ترتیب متغیر ہے آئیے ہم اس کی امکانی تقسیم کا حساب لگاتے ہیں
کے برابر ہونے کا امکان 4 کارڈز ہیں جن کی قدر دو ہے x 2 کیا ہے یعنی p 2 تو
تو چار ضرب باون جو کہ برابر ہے اسی طرح اگر میں پی تھری کو دوبارہ دیکھتا ہوں
تو چار کارڈز ہیں جن کی قیمت 3 ہے
پر غور کروں 15 p تک آپ کی وہی قدر ہوگی اگر میں 10 p تو یہ 4 ضرب 52 ہے جو کہ 1 ضرب 13 کے برابر ہے۔
کے برابر اب 15 ریکارڈ کیا گیا 15 x تو یہ ہے امکان
تو 3 کارڈز کنگ کوئین ہیں اور جیک وہاں اے آر اس طرح کے 12 کارڈز
کے برابر ہے 18 x ah 1 x تو آپ کو 12 کو 52 سے تقسیم کیا جائے گا جو کہ 3 سے 13 کے برابر ہے اور 18 کا امکان جو کہ امکان ہے کو دیکھا جائے گا s کے برابر ہے جب ایک
ہے۔ 13 x تو یہ دوبارہ 1
x جمع 1 13 x جمع 3 13 x آپ اس رقم کو دیکھ سکتے ہیں آپ کے پاس یہاں 9 قدریں ہیں 9 x تو یہ اس رینڈم متغیر کی امکانی تقسیم ہے جو کہ 1 کے برابر ہے ۔ اب اگر ایک ہے ترتیب متغیر امکانی تقسیم ہے مختلف احتمالات کا حساب لگا سکتا ہے لہذا مثال کے طور پر اگر میں 13 دم کی تعداد کو دیکھ رہا ہوں
تو میں پوچھ سکتا ہوں کہ اس بات کا کیا امکان ہے کہ ایک طاق تعداد میں دم کا مشاہدہ کیا جاتا ہے
برابر ہوگا 3 یعنی 3 بہ 8 جمع 1 بذریعہ 8 میں پوچھ سکتا ہوں کہ x برابر 1 کے علاوہ امکان x تو مثال کے طور پر دم کی طاق تعداد کا امکان سے کم یا اس کے برابر ہے 2 x کیا امکان ہے کہ
سے کم یا اس کے برابر ہے 2 x تو اگر میں کہوں کہ احتمال
جمع lus three by eight p دو کے برابر جو کہ ایک از آٹھ x برابر ایک جمع امکان x برابر ہے 0 کے علاوہ امکان x تو یہ امکان جو کہ سات ضرب آٹھ ہے وہ نکتہ جو میں بنانے کی کوشش کر رہا ہوں وہ یہ ہے کہ امکانی تقسیم کو دیکھتے ہوئے ہم اس ہے 3 by eight ترتیب متغیر کے مطابق امکانات کے بیانات کو حل کر سکتے ہیں
تو مجھے یہاں ان میں سے چند احتمالات کا حساب لگانے دیں جو ہم چاہتے ہیں امکان یہ ہے کہ سکور کم از کم 10 ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ کیا کے برابر ہے پندرہ کے علاوہ x کے برابر ہے جمع امکان 10 x سے زیادہ یا اس کے برابر ہے جو کہ امکان کے برابر ہے 10 x امکان ہے کے برابر ہے یہ وہ ممکنہ اقدار ہیں جو رینڈم متغیر لے سکتا ہے جو دس سے کم نہیں ہے لہذا یہ برابر ہے 1 ضرب 13 جمع 3 ضرب x امکان جمع 1 بذریعہ 13 یعنی 1 بذریعہ اہ یعنی 5 ضرب 13. ہے ترتیب متغیر کی مختلف اقدار کے امکانات کا حساب لگانے کے علاوہ کوئی بھی اس 13 کہہ سکتے ہیں اگر آپ کو اپنے اعدادوشمار کا حصہ یاد ہے جس نمونے میں آپ ah کے اوسط کا حساب لگا سکتا ہے یا آپ تقسیم کا مرکزی نقطہ کے ذریعے دیکھ کر n کو xn جمع x 2 جمع x 1 ریاضی کا مطلب جسے آپ x 1 x 2 xn حساب کر رہے ہیں اس میں دی گئی اقدار کے لیے دی گئی ہے x1 حساب کر رہے ہیں یا اگر تعدد کی تقسیم
ہے fn ہے، آپ کے پاس تعدد F2 کے لیے xn ہے، آپ کے پاس f1 کے لیے فریکوئنسی x2 تو آپ کے پاس
کو سگما فائی سے تقسیم کیا گیا اور اس کا مقصد کیا تھا کہ یہ آپ کو اس x2 f2 plus xn fn پلس کا حساب لگا رہے ہیں x1 f1 تو آپ کی قدریں لے x 1 x 2 xn کے ساتھ p 1 p 2 pn ڈیٹا کے لیے مرکزی رجحان کا ایک پیمانہ فراہم کرتا ہے اسی طرح جب رینڈم متغیر کی مجرد تقسیم کا اوسط x یہ ہے ترتیب متغیر x 1 in p 1 plus x 2 p 2 plus xn in pn رہا ہے ہم حساب کر سکتے ہیں ہے۔ x1 x2 xn میں ممکنہ اقدار ہیں جو کہ e ایک مجرد ہے ترتیب متغیر ہے جس میں x کہلاتا ہے آئیے ہم اس کی وضاحت کرتے ہیں کہ کی x کا اوسط x p 1 p 2 pn اور متعلقہ امکانی تقسیم
کی ہماری م x توقع ہے
توقع قدر کی وضاحت کی گئی ہے لہذا یہ اشارے کی
جو pn میں n پلس ہے اور اسی طرح ایکس پر p 2 پلس 2 میں p1 میں x1 توقع کی قدر کو سابق کے طور پر بہتر کیا جاتا ہے جو

کے برابر ہے لہذا آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ترتیب متغیر کون سی قدریں لیتا ہے ہم ان اقدار n کے برابر ہے 1 سے pii میں xi سگما
پر غور کرتے ہیں اور ان کو متعلقہ احتمالات سے ضرب دیتے ہیں اور اس کا مجموعہ کرتے ہیں
تو یہ بن جاتا ہے۔ مطلب یا یہ ترتیب متغیر کی
توقع
تو آئیے ہم ان تقسیموں کو دیکھتے ہیں جو ہم نے کی ہیں
تو ہمارے پاس ایک سکے کے تین ٹاسز میں دم کی تعداد کی یہ تقسیم تھی آئیے دیکھتے ہیں کہ یہاں دم کی تعداد کی اوسط تقسیم کیا ہے
تو آپ کے حوالہ کے لیے میں یہاں دوبارہ لکھوں گا کہ یہ p 0 1 تھا x 8 p 1 3 تھا x 8 p 2 3 تھا x 8 اور p 3 1 تھا x .8
تو اوسط یا م
توقع قدر 0 سے 1 بذریعہ ہے۔ 8 جمع 1 میں 3 ضرب 8 جمع 2 میں 3 ضرب 8 جمع 3 میں 1 ضرب 8 جو کہ بارہ ضرب آٹھ کے برابر ہے جو
کہ تین ضرب دو آہ کے برابر ہے اب کوئی سوچ سکتا ہے کہ اہ کا کیا مطلب ہے یہ مجھے مل رہا ہے؟ کسر درحقیقت دم کی تعداد 0 1 2 r 3
ہے لہذا یہ ایک عددی قدر ہے م
توقع قدر یا مطلب کا مطلب یہ نہیں ہے کہ اسے ان اقدار میں سے ایک ہونا چاہئے لیکن یہ کچھ درمیانی قدر ہے یہاں قدریں 0 1 2 ہیں اصل میں
آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں اگر میں یہاں پلاٹ پر غور کروں
ڈال رہے ہیں pi تو فرض کریں کہ میں یہاں 0 یہاں 1 یہاں 2 رکھتا ہوں۔ اور 3 یہاں پھر اس طرف ہم
آٹھ ہے x آٹھ ہے اور یہ ایک x آٹھ ہے پھر یہ تین x اور یہ تین x 8 تو 1
آٹھ ہے اور یہ ایک بار پھر آٹھ ٹھیک ہے x آٹھ ہے یہ تین x آٹھ ہے یہ تین x تو یہ ایک
تو آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں کہ مجھے جو قدر حاصل ہو رہی ہے وہ 3 بائی 2 ہے جو یہاں آ رہی ہے جو کہ درمیانی قدر کی طرح ہے اور یہ اس
لیے ہو رہا ہے کیونکہ یہ ایک تقسیم ہے جو کہ ہم آہنگ ہے۔ مطلب دونوں سروں سے میں 0 اور 3 کو مساوی امکان اور 1 اور 2 کو مساوی امکان
دے رہا ہوں۔ اس لیے اوسط قدر درمیان میں نکل رہی ہے، آئیے ناقص بلب کی تعداد کی دوسری مثال دیکھیں۔ خراب بلبوں کی تعداد
تھا۔ بذریعہ 15 اور پی 2 برابر 1 بذریعہ 15. p 0 7 تھا x 15 p 1 7 تو یہاں
کی x تو
توقع صفر ہو جاتی ہے سات ضرب پندرہ جمع ایک میں سات بذریعہ پندرہ جمع دو میں ایک بذریعہ پندرہ جو کہ 9 ضرب 15 کے برابر ہے جو کہ 3
ضرب 5 کے برابر ہے دوبارہ آپ خرابیوں کی تعداد دیکھ سکتے ہیں 0 1 یا 2 لیکن اوسط قدر یا اوسط قدر ایک عدد صحیح نہیں ہے اصل میں یہ
ایک حصہ ہے جو اس سے نیچے ہے اگر آپ یہاں تقسیم کو 0 پر پلاٹ کرتے ہیں
تو آپ کے پاس 1 پر 7 ضرب 15 ہے سات سے پندرہ اور دو پر آپ کے پاس پندرہ سے ایک ہو رہا ہے
تو یہ اوسط یہاں کہیں آ رہی ہے جو کہ تین سے پانچ ہے یہاں آپ کو مل رہا ہے آئیے ہم کارڈ کے اسکور کی ایک اور مثال دیکھیں
تو یہاں ہمارے پاس یہ امکانی تقسیم ہے۔ آئیے کارڈ کے اوسط اسکور کو دیکھتے ہیں
برابر 15 تھا 3 x برابر 2 تک 10 امکان i کے لئے 13 x 1 i برابر ہے x تو یہاں تقسیم مجھے دوبارہ لکھنے دیں تقسیم کا امکان x 13
کی x 13. اس لیے x برابر ہے 18 تھا 1 x اور امکان
یہ رقم آپ مثبت ah برابر ہے 2 سے 10 جمع 15 میں 3 ضرب 13 جمع 18 میں 1 ضرب 13 i سے 13 میں بن جاتی ہے کیونکہ i 1 توقع
جمع 1 بذریعہ 2 ہے لہذا یہ 10 n میں n انٹیجرز فارمولے کے مجموعے سے کر سکتے ہیں جیسے کہ رقم 1 سے 10 آپ جانتے ہیں کہ یہ
میں 11 میں 2 بذریعہ 15 ہے اور پہلی اصطلاح وہاں نہیں ہے
تو یہ 54 بن جائے گا۔ لہذا 54 جمع 45 جمع 18 بذریعہ 13.
تو یہ برابر ہے۔ نو
کے برابر ہے نو جو کہ کارڈ کا م x توقع
توقع سکور نو ہے اب میں ایک اور مقدار بھی متعارف کرواتا ہوں جسے تغیر کہا جاتا ہے
تو میں نے وضاحت کی ہے کہ
توقع اوسط قدر یا اوسط قدر کی طرح ہے لیکن ہم یہ بھی پسند کر سکتے ہیں۔ یہ دیکھنے کے لیے کہ آیا قدروں کو زیادہ تقسیم کیا گیا ہے اس کا
مطلب ہے کہ ان میں بہت زیادہ تغیر ہے یا ان میں کم تغیر ہے آئیے ہم تغیر کے تصور پر غور کریں
تو آئیے لیتے ہیں probability x is equal to minus 1 is equal to probability x 0 برابر is equal to
کے برابر ہے یہ 1 بائے کہنے کے برابر ہے۔ 3 ٹھیک ہے اس کا مطلب ہے کہ مائنس 1 0 اور 1 ان میں سے ہر ایک probability x 1
ٹھیک ہے by 3 کا برابر امکان ہے 1
کی x تو اگر آپ
آئیے ایک اور مثال لیتے ah توقع کو دیکھیں جو کہ مائنس 1 کے برابر ہے 1 سے 3 جمع 0 میں 1 سے 3 جمع 1 میں 1 3 جو 0 کے برابر ہے۔
کی x کے برابر 2 ہے 1 کے برابر 3 دوبارہ آپ x کے برابر امکان 0 x برابر ہے مائنس 2 ہے امکان کے برابر x ہیں امکان
توقع دیکھ سکتے ہیں۔ مائنس 2 میں 1 بائی 3 جمع 0 میں 1 بائی تھری جمع دو میں ایک بائے تین کے برابر جو کہ دوبارہ صفر ہے لیکن اگر آپ اسے
پلاٹ کرتے ہیں
تو آپ مائنس ٹو اور پلس ٹو ایک بائے تھری ایک بائی تھری کی طرح دکھائی دیتے ہیں
اقدار لیتا ہے جس میں اس رینڈم متغیر کے مقابلے میں زیادہ x تو اگر میں ان دو گرافس کا موازنہ کریں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں رینڈم متغیر
تغیر ہے مجھے ان متغیرات کا نام تبدیل کرنے دیں
تو میں اسے x1 x1 random variable کہوں اور اس random variable کو میں x2 random variable کہوں
کی x 1 تو کیا ہوگا؟ ہم مشاہدہ کر رہے ہیں کہ
کی x توقع اور
مائنس 2 0 اور 2 کی قدروں x 2 مائنس 1 0 اور 1 کے برابر امکان فراہم کرتا ہے یہ ترتیب متغیر x 1 توقع 2 0 ہے اور یہ ترتیب متغیر
کو مساوی امکانات دیتا ہے۔ یہاں ایک اور تغیر ہے اس کی پیمائش کرنے کے لیے کہ ہم ایک تصور متعارف کراتے ہیں جس کا نام ویریئنس ہے
یا کبھی x کے تغیر کی وضاحت کی گئی ہے اس لیے ہم اسے کہتے ہیں کہ کہاں کا x تو میں اس کی وضاحت کرتا ہوں کہ یہ ترتیب متغیر
لکھا جاتا ہے ٹھیک ہے یہ کچھ نہیں ہے۔ لیکن v کا x کبھی اسے
توقع
تو
توقع کی اصطلاحات میں نے پہلے ہی متعارف کرائی ہے
مربع کی mu مائنس so x تو آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا

کی x کو mu توقع ہے لہذا میں اس کی وضاحت کرتا ہوں کہ
x mu توقع کے لئے اشارے کے طور پر کہاں استعمال کیا جاتا ہے لہذا اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا دیکھنے کی کوشش کر رہا ہوں اگر کا اوسط ہے
تو میں دیکھ رہا ہوں کہ اوسط قدر سے بے ترتیب متغیر میں کتنا تغیر ہے یہ وہی ہے جو ان دو مثالوں میں تھوڑا سا دلچسپ تھا اگر آپ یہاں دیکھیں کہ اوسط 0 ہے اور دوسری قدریں 1 اور مائنس ہیں 1 یہاں اوسط 0 ہے اور دوسری قدریں 2 اور مائنس 2 ہیں۔
تو ظاہر ہے کہ یہ قدریں اس کے مقابلے میں اوسط قدر سے کہیں زیادہ دور ہیں
کی mu one ایک مائنس x ایک کا تغیر x دو کے تغیر کو دیکھتے ہیں تاکہ x ایک کے اس تغیر اور x تو آئیے ہم
کی mu one x x1 توقع ہے کہو جہاں
ہے mu 1 0 توقع ہے ظاہر ہے یہاں
مائنس 0 مربع کی x 1 تو یہ قیمت
مربع کی x 1 توقع کے برابر ہے جو
توقع ہے میں نے پہلے ہی اس کے لئے فارمولا متعارف کرایا ہے۔
توقع یہ ہے کہ قدر کو احتمال سے ضرب دیا جائے
مائنس 1 کی قدریں کیا ہیں x 1 تو
تو مائنس ایک مربع ایک ہو جائے گا امکان ہے ایک سے تین صفر ایک سے تین جمع ایک
تو ایک مربع ایک ایک سے تین ہے
کے لیے دیکھتے ہیں x2 کا تغیر ہے آئیے ہم اسی چیز کو بے ترتیب متغیر x1 تو یہ قدر برابر ہے دو سے تین جو کہ
دو مربع کی mu دو مائنس x کے تغیر کے لیے جو کہ x2 تو ایکس ٹو کے بے ترتیب متغیر
کچھ نہیں ہے مگر اس کی mu two توقع ہے جہاں
دو کی a x دو ایک بار x توقع
توقع صفر ہے
دو کی x دو مربع x تو یہ
دو کے امکان میں مائنس دو کے برابر ہے جو کہ ایک سے تین x توقع بن جاتی ہے مائنس دو کی قدریں لے رہا ہے لہذا مائنس دو مربع چار ہے
جمع صفر ہے احتمال جمع میں دو دو مربع چار میں ایک سے تین ہو جاتا ہے یہ آٹھ سے تین بنتا ہے
دو کا تغیر آٹھ بائے تین قدرتی x ایک کا تغیر دو بائے تین اور x دو کے تغیر کا موازنہ کریں تاکہ آپ یہاں x ایک کے تغیر اور x تو آئیے ہم کے مقابلے میں زیادہ تغیر ہے لہذا یہ دیکھنے کا تصور ہے کہ بے ترتیب متغیرات میں کچھ تغیرات ہیں لہذا آیا کم تغیر x1 دو میں x طور پر کے x1 کا تغیر x2 ہے یا زیادہ تغیر ہے اس تصور کا باضابطہ طور پر اصطلاح تغیر کا استعمال کرتے ہوئے مطالعہ کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح سے زیادہ تغیر ہے لہذا ہم مختلف مثالوں میں x1 میں بے ترتیب متغیر x2 تغیر سے زیادہ ہے اس طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ بے ترتیب متغیر تغیر کا حساب لگا سکتے ہیں جو ہم نے اتنی تعداد میں کیا ہے۔ دم کا
mu جسے ہم expectation x اور 8 x تھا 1 p3 اور 8 x تھا 3 2 p 8 x تھا 3 1 p 8 x تھا 1 0 p تو ہمارے یہاں کے برابر تھا 2 x کہتے ہیں جو 3
مربع کی mu مائنس x کا تغیر x تو آئیے ہم یہاں تغیر کا حساب لگاتے ہیں۔ لہذا
مربع کی 2 x مائنس 3 x توقع کے برابر ہے جو
جمع 1 ہے۔ مائنس 3 بائی 2 اسکوائر میں 3 8 x مربع اس امکان میں ہو جو 1 2 x کی قدروں کو بدلنا ہوگا تاکہ 0 مائنس 3 x توقع ہے ہمیں بائی 8 جمع 2 مائنس 3 بائی 2 اسکوائر میں 3 بائی 8 پلس 1 بائی 8 معذرت 3 مائنس 3 بائی 2 مربع میں 1 بائی 8۔ اس طرح آپ آسانی سے حساب لگا سکتے ہیں کہ یہ 9 بائی 4 میں 1 بائی ہے 8 جمع 1 بذریعہ 4 بذریعہ 3 بذریعہ 8 جمع 1 بذریعہ 4 بذریعہ 3 بذریعہ 8 جمع 9 بذریعہ 4 بذریعہ 1
تو یہ قدریں 24 ضرب 32 بنتی ہیں جو کہ 3 ضرب 4 کے برابر ہے۔
تو میں نے مثال دی ہے کہ کیسے تقسیم کی تغیرات کا حساب لگایا جا سکتا ہے ہم نے مجرد بے ترتیب متغیرات متعارف کرائے ہیں بے ترتیب متغیرات جو کہ ایک محدود یا قابل شمار لامحدود قدریں لیتے ہیں حالانکہ تمام میں نے جو مثالیں لی ہیں وہاں ہم نے قدروں کی محدود تعداد لی ہے میں کچھ دوسری مثالوں پر تفصیل سے بات کروں گا جہاں لامحدود قدروں کی بھی اجازت ہے اور میں نے اگلی کلاس میں
کا spatial discrete random variable کہلانے والے binomial you توقع یا وسط اور تغیر کا تصور متعارف کرایا ہے ۔
استعمال کرکے اس تصور کو مزید بہتر بنائیں

Prutor@IITK