وہ اضافی اصول ہیں اس ah میں نے امکان کی بنیادی تعریفوں اور بعض اصولوں پر تفصیل سے بحث کی ہے جو بنیادی تعریفوں کی بنیاد پر ہیں
کا ایک عمومی ہونا جسے عام کرنا عام اضافی اصول کہا جاتا ہے ہم نے مشروط احتمال ضرب اصول کے تصور کا مطالعہ کیا ۔ کل امکان کا نظریہ
بائیس تھیوریم اور آزاد واقعات کا تصور اب آج میں اپنا وقت آپ کے اسکول کی کتابوں میں احتمال کے کچھ مسائل کو حل کرنے کے لیے وقف کروں
گا آپ نے دیکھا ہوگا کہ بہت سے مسائل ہیں

تو میں بہت سے مسائل حل کروں گا جو ایک جیسے ہیں۔ فطرت اور چند مسائل جو شاید کچھ مسابقتی امتحانات جیسے مشترکہ داخلہ امتحان وغیرہ
میں سامنے آئے ہوں ، اس لیے میں کچھ مسائل کے ساتھ شروعات کرتا ہوں اور یہ بنیادی طور پر ان تمام آہ تھیوریمز اور فارمولوں کا اطلاق ہیں
کو کوئی دو واقعات اور کچھ شرائط دی گئی ہیں جو ایک تکمیل کا b اور a جن کا ہم نے اب تک مطالعہ کیا ہے، لہذا مجھے شروع کرنے دیں۔ لہٰذا
کا امکان پوائنٹ پانچ ہونے کے لیے دیا جاتا ہے اور b احتمال دیا جاتا ہے۔ بی کا تین کا امکان پوائنٹ چار ہونے کے لیے دیا جاتا ہے ایک مائنس
complement کا مشروط امکان پوچھ رہے ہیں۔ b کا تکمیلی ہوتا ہے اس لیے ہم b کا امکان تلاش کرنا ہوتا ہے جو کہ یونین b ہمیں
e کی تکمیل اگر آپ کو b کے امکان کا اظہار کیا ہے ایک یونین b تو آئیے ہم مشروط امکان کے فارمولے کو لاگو کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ
کے امکان کا فارمولا یاد ہے f دیا ہوا

کے امکان سے تقسیم f کا امکان ہے e intersection f تو یہ

کے امکان سے تقسیم کیا جاتا ہے union b complement کو a ununion b complement انقطاع کا امکان بن جاتا ہے b تو یہ
آئیے ہم یہاں عدد کو دیکھتے ہیں

انتفاضہ کے اتحاد کا امکان ہے تاکہ ہم یونینوں کی تقسیمی جائیداد کو لاگو کر سکیں اور b تو آئیے اس کو آسان بناتے ہیں جو کہ دو واقعات کے
انٹرسیکشنز

تکمیلی b انٹرسیکشن b انٹرسیکشن بن جاتا ہے یونین b تو یہ

کچھ بھی نہیں مگر خالی سیٹ s کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔ b complement i انٹرسیکشن b انٹرسیکشن اب b تو ہم اسے
کہہ رہے ہیں phi تو اب آپ یہ یونین

کے امکان کے برابر ہے b کے امکان کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا اس کا مطلب ہے کہ عدد کا امکان اب ایک انٹرسیکشن b تو یہ ایک انٹرسیکشن
ہے جو ہمیں دیا جاتا ہے ہمیں ایک تکمیل کا امکان دیا b پھر یہ ایک تقطیع b اور واقعہ a اگر ہم غور کریں کہ جب یہاں ڈائیگرام کہیں اور واقعہ
جاتا ہے اب اگر تکمیل کا احتمال دیا جائے

کیا ہے آپ آسانی سے دیکھ سکتے b کا امکان مائنس b کے احتمال کا امکان معلوم کر سکتے ہیں اور کیا دیا گیا ہے مائنس b تو آپ آسانی سے
a یونین b مائنس a بھی کہہ سکتے ہیں لہٰذا سیٹ b complement کا امکان ہے جسے آپ ایک انٹرسیکشن b ہیں کہ یہ حصہ مائنس
کا امکان مائنس a جس کا مطلب ہے b لکھ سکتے ہیں۔ مائنس بی یونین ایک چوراہا a کو بطور a کے برابر ہے یعنی ہم intersection b
کا انوس b کے امکان کے برابر ہے ایک مائنس am کا امکان b کا امکان ہے یعنی ایک چوراہے b کے امکان کے برابر ہے اور ایک چوراہا b
کا امکان ایک مائنس پوائنٹ تین بن جائے گا جو پوائنٹ سات ہے a امکان اب ہمیں یہاں دیا گیا ہے تعریف کا امکان پوائنٹ تین ہے لہذا
کا b جو کہ پوائنٹ پانچ ہے یہ قدر پوائنٹ دو نکلتی ہے جس کا مطلب ہے ایک تقطیع b تو یہ پوائنٹ سات مائنس امکان کے برابر ہے مائنس
اب آئیے ہم ڈینومینیٹر کو دیکھتے ہیں ah امکان جو کہ یہ عددی مقدار ہے 0.2

تکمیل پر ہم اضافی اصول لاگو کرتے ہیں۔ b اور a کا امکان ہے b تو ڈینومینیٹر ایک یونین

کے اس لیے آپ intersection b complement کے مائنس احتمال ایک b complement تو یہ ایک جمع کے امکان کے برابر ہے
ہے۔ تکمیل b کی جگہ b کا فارمولا احتمال لکھا ہے لہذا یہاں b اصل میں دیکھ سکتے ہیں کہ اضافی اصول کے فارمولے میں میں نے یونین
کریں تاکہ اس اصطلاح کو لکھنے میں کوئی دقت نہ ہو اس لیے ایک بار پھر آپ دیکھیں کہ وہ کون سی اقدار ہیں جن کے بارے میں ہمیں یہاں لکھنا
کا ایک مائنس امکان ہے b کا امکان ہے جو b تاکہ یہ پوائنٹ سات جمع y ہے کہ ایک مائنس کا امکان ہے ایک تعریف کا

کا کیا امکان ہے اب آپ وین ڈایاگرام سے intersection b complement تو یہ ایک مائنس پوائنٹ چار ہے جو کہ پوائنٹ چھ ہے اب ایک
کے b کی تکمیل کا تقطیع بالکل وہی حصہ ہے جسے میں نے مائنس b کے ساتھ a کی تکمیل یہ پورا حصہ ہے اور b کر سکتے ہیں دیکھیں
طور پر لکھا ہے

تکمیل وہ ایک جیسے ہیں لہذا یہ پوائنٹ پانچ کے برابر ہے لہذا آپ اس کا اندازہ کر سکتے intersection b اور ایک b مائنس a تو یہ
کا امکان ہے جو کہ b کی تکمیل دی گئی ہے عدد ایک انقطاع b کے امکان کے اظہار میں ایک یونین b ہیں کہ یہ پوائنٹ آٹھ کے برابر ہے لہذا
کی قدر کا امکان حاصل کرنے کے لیے ہم یہاں بدلتے ہیں جو b تکمیل کا امکان ہے پوائنٹ آٹھ ہے b پوائنٹ دو ہے اور ڈینومیٹر جو کہ یونین
تکمیل کے طور پر پوائنٹ دو کو پوائنٹ آٹھ سے تقسیم کیا جاتا ہے جو ایک سے چار یا پوائنٹ دو پانچ کے برابر ہے اب آپ دیکھیں b کہ ایک یونین
کہ اصول کیا ہیں میں نے اس مسئلے میں جو امکان استعمال کیا ہے اس میں پہلے مشروط امکان کی تعریف ہے پھر عدد کو حل کرنے میں میں نے
کے احتمال کا حساب لگایا b سیٹ تھیوری کے تقسیمی قوانین کا استعمال کیا ہے اور پھر ہم نے خالی سیٹ وغیرہ حاصل کیے ہیں تاکہ ایک انحراف
کا امکان درکار ہے جو یہاں نہیں دیا گیا ہے لیکن جو کچھ یہاں دیا گیا ہے میں نے b جا سکے۔ امکان کی اضافی خاصیت کیونکہ مجھے ایک انقطاع
b کا امکان ہے اور ہمیں دیا گیا ہے جو ایک مائنس کا امکان ہے a صرف اس خاکہ کے ذریعے دیکھا کہ ہمیں وہ دیا گیا ہے جو
کے امکان کا حساب لگا سکتے ہیں لہذا یہ قیمت ڈینومینیٹر کا حساب لگانے کے b تو یہاں سے ہم آسانی سے اس مخصوص انداز میں ایک چوراہا
لئے نکل رہی ہے میں اضافی اصول استعمال کرتا ہوں اور یہ آپ کو 0.8 کی قدر دیتا ہے لہذا اس مسئلے کو حل کرنے کا مقصد یہ ظاہر کرنا تھا
کہ اگر بعض واقعات کے امکانات دیے جائیں

کوئی بھی دو b اور a تو اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم مختلف متعلقہ واقعات کے امکانات کا اندازہ لگا سکتے ہیں اسی طرح کا مسئلہ پھر چلیں
کا امکان پوائنٹ تین کے برابر ah b کا امکان پوائنٹ پانچ کے برابر ہے اور a کا امکان پوائنٹ سات کے برابر ہے b واقعات ہوں جن میں اتحاد
تکمیل کے امکان کو تلاش کرنے کے b کی تکمیل کا امکان تلاش کریں اس حل کو دیکھیں جو ہمیں دیے گئے b ہے کہنے کے لئے دیئے گئے
لیے درکار ہے اگر ہم مشروط امکان کو لاگو کرتے ہیں

تکمیلی کا امکان b دوبارہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ah تکمیل کے امکان سے تقسیم ہو جاتا ہے b تکمیل کا امکان ہے جو b تو یہ ایک انحراف
تکمیل کا احتمال ہے ایک وین intersection b آئیے ہم یہاں اس عدد کو دیکھتے ہیں اب عدد ایک b ah کے امکان سے دستیاب ہے۔
ہے b ڈایاگرام کے ذریعے ہم آسانی سے سمجھ سکتے ہیں کہ اگر یہ واقعہ یہ واقعہ

کو دیکھ b دیا گیا ہے لہذا اگر ہم ایک چوراہے b اور ba ہے۔ ہمیں ایک یونین b تکمیلی یہ حصہ ہے جو دراصل ایک مائنس b تو ایک تقطیع
سکتے ہیں

کے مائنس کا احتمال ایک b کا امکان برابر ہے ایک جمع کا امکان b تو ہم اضافی اصول کا استعمال کرتے ہوئے حساب لگا سکتے ہیں ایک یونین
میں نے b ah کے مائنس امکان کے اتحاد b کے جمع کا امکان b کا امکان مل جائے b کا امکان ہے تاکہ ہمیں ایک چوراہے کا b چوراہے
کی قدریں اور یونین بی ہمارے لیے دستیاب ہے اس لیے ہم اسے یہاں تبدیل کرتے ہیں اور پوائنٹ پانچ جمع ab یہ فارم لکھا ہے کیونکہ احتمال
پوائنٹ تین مائنس پوائنٹ سات حاصل کرتے ہیں جو پوائنٹ ون کے برابر ہے

کا مجھے دیا گیا ہے ہم فرق کو لے کر ایک a تو ایک انحطاط بی کا امکان پوائنٹ ون کے برابر ہے جو کہ یہ حصہ ہے لہذا اب امکان کے بعد
کے امکان کے b کا امکان ایک تقطیع a تکمیل کے امکان کا حساب لگا سکتے ہیں لہذا اب ہم ایک اور فارمولہ استعمال کرتے ہیں جو کہ b تقطیع
کے مائنس امکان کے امکان کے برابر b کی تکمیل کا امکان ایک تقطیع b تکمیل کا امکان ہے ایک تقطیع intersection b برابر ہے اور ایک
کا امکان ہم نے پوائنٹ ون کے حساب سے لگایا b اور ایک چوراہا ty کی a ہے اب اس میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ پانچ امکان ہے
تکمیل کے امکان کو بدلتے ہیں b تو یہ پوائنٹ چار کے برابر ہے لہذا اگر ہم دیے ہوئے
تکمیل کا امکان شمار کیا ہے۔ ہم قدروں کو بدل دیتے intersection b کے امکان سے تقسیم کرکے ایک b complement تو ہم نے اسے
ہیں 0.7 کو ب تکملہ کے امکان سے تقسیم کرنے کا پوائنٹ سات ہے
تو یہ پوائنٹ ہے
تو یہ چار ضرب سات کے برابر ہے پھر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس خاص مسئلے میں میں نے مشروط امکان کا فارمولا استعمال کیا ہے اور اندازہ
b اور ایک تقطیع b کو ہم نے بطور تقطیع a کرنے کے لیے تناسب میں شامل شرائط ہم نے اضافی اصول کا استعمال کیا ہے کیونکہ واقعہ
دو b اور let a تکمیل کے لئے ہم نے براہ راست حساب لگایا ہے آئیے ایک اور مثال لیتے ہیں b تکمیل کے طور پر تقسیم کیا ہے اور پھر
po تکمیل کا امکان b کا امکان پوائنٹ دو کے برابر ہے اور دیئے گئے b کا امکان پانچ پوائنٹ کے برابر ہے ایک انقطاع a واقعات ہوں جن میں
کا امکان کیا ہے لہذا ہم یہاں مساوات کو استعمال کرنے کی کوشش کریں گے b چار میں ہم یہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ int کے برابر ہے۔
تکمیل کے امکان سے تقسیم کیا گیا ہے ہم نے b تکمیل کے امکان کے برابر ہے جس کو b تکمیل کا امکان جو کہ ایک تقطیع b ایک دیئے گئے
کا امکان ایک مائنس امکان ہے لہذا یہ اقدار ہمیں دی گئی ہیں ہم b کی تکمیل کا احتمال کچھ نہیں ہے لیکن ایک تقطیع b ابھی دیکھا ہے کہ ایک تقطیع
کا ایک مائنس امکان ہے لہذا یہ مساوات پھر بائیں ہاتھ کی طرف پوائنٹ بن جاتی ہے چار امکان b تکمیل کا امکان b ان کا استعمال کریں گے اور
کے ایک مائنس احتمال سے تقسیم کیا گیا ہے لہذا یہ ایک بہت B کا امکان ہے b پوائنٹ پانچ مائنس پوائنٹ دو جو کہ ایک انقطاع a کے برابر ہے
کا ایک مائنس امکان ملتا ہے تین بائے چار جس کا مطلب یہ ہے کہ بی کا b آسان مساوات ہے اور ہم اسے آسانی سے حل کر سکتے ہیں لہذا ہمیں
امکان ایک بائے چار کے برابر ہے لہذا بنیادی طور پر ان مسائل میں آپ نے دیکھا ہے کہ امکان کے بنیادی اصولوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم ایوی
کر سکتے ہیں۔ بعض دیگر واقعات کے ممکنہ امکانات کو مزید مسائل کے ساتھ جاری رکھیں اور کمانے میں چار سکے ہیں اور یہ دیا گیا ہے کہ تین
سکے منصفانہ ہیں اور ایک سکہ متعصب ہے
تو متعصب سکے کے لیے ہیڈ کا امکان تین بائی چار ہے اس کا مطلب ہے تین سکے منصفانہ ہیں لہذا یہاں سر اور دم کا امکان آدھا ہے اور تعصب
کے سکے کے لئے سر کا امکان تین ضرب چار ہے لہذا دم کا امکان ایک بائے چار ہوگا کلش سے ہے ترتیب طور پر ایک سکہ کھینچا جاتا ہے اور
پھینک دیا جاتا ہے کہ کیا ہے امکان یہ ہے کہ ایک سر دیکھا جاتا ہے اگر ایک سر کا مشاہدہ کیا جاتا ہے
تو اس بات کا کیا امکان ہے کہ متعصب سکہ یہاں کھینچا گیا تھا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مسئلہ دو مراحل میں ہے پہلے ایک سکہ کھینچا جاتا ہے اور
اس کے بعد سکے کو اچھال دیا جاتا ہے
تو قدرتی طور پر سکہ بن سکتا ہے۔ ایک منصفانہ سکہ یا یہ ایک متعصب سکہ ہو سکتا ہے اور اس لیے سر کا امکان اس بات پر منحصر ہو گا کہ
مناسب سکہ کھینچا گیا تھا یا متعصب سکہ کھینچا گیا تھا، لہذا یہ درخواست کے لیے ایک بہترین ترتیب ہے۔ کل امکان کے تھیوریم کا آئن
تو آئیے اس پر نظر ڈالیں
تو میں کچھ واقعات کی وضاحت کرتا ہوں کہ وہ واقعہ ہو جس کا سر دیکھا گیا ہو اور میں واقعات کی بھی تعریف کرتا ہوں اور یہ واقعہ ہو کہ ایک
وہ واقعہ ہے جو ایک منصفانہ سکہ کھینچا جاتا ہے f متعصب سکہ کھینچا گیا تھا اور
کا مطلب یہ ہے کہ اس کے بعد سے ہم ایک باصلاحیت سکہ کھینچتے ہیں اور پھر اسے پھینک دیتے ہیں eh given e کا کیا امکان ہے h تو
تو سر کا امکان تین سے چار ہو جاتا ہے اگر فیئر ہو
تو ہیڈ کا امکان کیا ہے؟ سکہ کھینچا جاتا ہے
کے امکانات کیا ہیں اب چار سکے ہیں جن میں سے صرف ایک سکہ متعصب ہے لہذا اگر ہم ہے ترتیب طور f اور e تو امکان بھی نصف ہوتا ہے
پر کھینچ رہے ہیں
تو یہ امکان ہے کہ ہم ایک متعصب سکہ کھینچیں گے
تو ایک سے چار ہو جائیں گے۔ اور یہ امکان کہ ہم ایک منصفانہ سکہ کھینچتے ہیں یہ تین سے چار ہو جائے گا
تو ہم نے بنیادی احتمالات کا جائزہ لیا ہے جو اس مسئلے سے متعلق ہیں اب کیا پوچھا جاتا ہے ہم سے پوچھا جاتا ہے کہ کیا امکان ہے کہ ایک سر کا
مشاہدہ کیا جاتا ہے
کی قابلیت prob h تو سر کا مشاہدہ کیا جاتا ہے کا مطلب ہے
کا امکان اب ہے اگر ہم کل امکان کے تھیوریم کو لاگو کرتے ہیں h کا امکان کیا ہے لہذا h تو ہم یہ جاننا چاہتے ہیں کہ
کے امکان میں دیا جاتا ہے ۔ تمام اصطلاحات جو اس مساوات میں دی گئی ہیں وہ f کا امکان h دیا جاتا ہے اور h کے امکان میں e تو اسے
کا امکان تین ضرب چار f نصف ہے اور f دیا ہوا h کا امکان ایک ضرب چار ہے e کا امکان تین ضرب چار ہے h ہمارے لئے دستیاب ہیں
نو بائی سولہ کے برابر ہیں لہذا سر کا امکان بالآخر نو بائی سولہ ہے آئیے ہم مسئلے کے ah ہے لہذا ہم صرف حساب لگا سکتے ہیں یہ قدریں
دوسرے حصے کو دیکھتے ہیں مسئلہ کا دوسرا حصہ یہ تھا کہ اس بات کا کیا امکان ہے کہ اگر ایک سر ہے
تو متعصب سکہ کھینچا گیا تھا۔ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ الٹا ہے کیونکہ ہم اس واقعہ کا امکان پوچھ رہے ہیں جو پہلے ظاہر
کا امکان کیا ہے h دیا گیا e ہوا تھا اس لیے کیونکہ سکہ پہلے کھینچا گیا تھا اس لیے اب ہم حتمی نتیجہ جانتے ہیں اس لیے
کے احتمال سے h ah کے احتمال سے تقسیم کیا گیا ہے e کو h یہ eorem کے ذریعے bayes th تو
تو یہ تمام اصطلاحات دستیاب ہیں تین سے چار اور ایک سے چار تقسیم نو سے سولہ کے برابر ہے
کا امکان چار سے ایک ہے ٹھیک ہے اس کا مطلب ہے کہ چونکہ چار e کا امکان e تو آئیے ہم اس کا جائزہ لینے کی کوشش کریں کہ کیا کیا
سکے ہیں جن میں سے صرف ایک سکہ متعصب ہے لہذا متعصب سکہ نکالنے کا امکان اب چار سے ایک تھا اگر نتیجہ معلوم ہو کہ یہ سر ہے
تو متعصب سکے کا امکان ایک سے چار سے بڑھ کر تین سے ایک ہو گیا ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ متعصب سکے سے سرخی کا امکان زیادہ ہے
اس لیے امکان پر نظر ثانی ہو جاتی ہے
تو یہ اصل میں بنیادی تھیوریم کا فائدہ ہے کہ اس کا مطلب ہے کہ حتمی نتیجہ کو جان کر ہم اس قابل ہو جاتے ہیں کہ ہم اس سے پہلے کے واقعات
کے امکانات پر نظر ثانی کر سکتے ہیں جو واقعتاً پہلے پیش آتے ہیں اور جیسا کہ میں نے آپ کو پہلے بتایا تھا کہ یہ بہت مفید ہے جب ہم یہ جاننا
چاہتے ہیں۔ حادثات کی وجوہات فیکٹریوں میں کچھ حادثات آہ کچھ فرانزک تحقیقات وغیرہ ان تمام جگہوں پر بائیز تھیوریم ایک اہم کردار ادا کرتا ہے
کیونکہ ہم اصل میں سابقہ واقعات کے امکانات پر نظر ثانی کر سکتے ہیں اس پر نحصر ہے کہ حت ی نتیجہ کیا ہے جو ہمیں معلوم ہے آئ ے
جاری رکھیں اور کچھ دیگر ایپلی کیشنز کو دیکھیں کہ ڈائس کا ایک جوڑا اس وقت تک گھمایا جاتا ہے جب تک کہ سات کا مجموعہ ظاہر نہ ہو جائے
تو آہ اگر نرد پھینکا جائے
تو دونوں ڈائس کی کچھ اوپری قیمت ہوتی ہے جیسے کہ دو اور تین وغیرہ تین اور چار تین اور تین چار اور دو وغیرہ لہذا ہم رقم کو دیکھتے ہیں

تاکہ وہ رقم ریکارڈ کی جائے لہذا آپ جب رقم کی بچت کا مشاہدہ کیا جاتا ہے
تو ہم رک جاتے ہیں لہذا ہم امکان کو تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ امکان 7 تیسرے رول پر سب سے پہلے ظاہر ہوتا ہے ٹھیک ہے اگر ہم نرد کا ایک جوڑا ایک بار ٹاس کریں
تو ہم فرض کرتے ہیں کہ میں اسے یہاں فیئر ڈائس لکھتا ہوں تاکہ ہر نتیجہ کا امکان برابر ہو اس لیے ان 36 کیسز میں سے اب کل 36 کیسز ہیں۔ h کیسز رقم 7 کی طرف لے جاتے ہیں۔
تو آئیے یہاں امکانات کو دیکھتے ہیں اگر ہم کہتے ہیں کہ رقم سات ہے
تو ہمارے پاس ایک چھ ہو سکتا ہے اور یقیناً چھ ایک، پھر ہمارے پاس دو پانچ اور پانچ دو اور پھر تین چار اور چار تین ہو سکتے ہیں۔ لہذا اگر ہم اس واقعہ کو ای کے طور پر مانیں کہ رقم سات ہے
کے امکان کو دیکھیں جو چھ ضرب چھتیس کے برابر ہے جو کہ ایک بذریعہ چھ ہے e تو یہ چھ عناصر پر مشتمل ہے لہذا اگر ہم کہوں گا۔ اب اگلا سوال یہ ہے کہ اس بات کا کیا امکان ہے کہ فیئر ڈائس کے جوڑے کے تیسرے رول پر سات کا p احتمال ah تو میں اسے مجموعہ سب سے پہلے ظاہر ہوتا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ پہلے رول پر ہمیں سات کا مجموعہ نہیں ملتا یعنی واقعہ اور تعریف ہوتی ہے اسی طرح دوسرے ٹاس میں بھی ایونٹ ای تکمیل ہوتا ہے پھر تیسرے میں واقعہ ای اب دوبارہ ہوتا ہے آہ یہاں ہم یہ قیاس کرتے ہیں کہ ٹاسنگ آزاد ہے یعنی جب بھی ہم ٹاس کرتے ہیں اور ریکارڈ کرتے ہیں
اس لیے ہم امکانات کی ضرب کو درحقیقت لاگو کر سکتے ہیں اگر آپ کو واقعات کی آزادی ss تو دوسری بار ٹاس پچھلے سے آزاد ہوتا ہے۔ کو کی تعریف یاد ہے
کے امکان کے برابر ہے اگر ہمارے پاس تین ہیں b کے امکان کے a کا امکان b آزاد ہیں اگر ایک انقطاع ab تو ہم کہتے ہیں کہ واقعات تو ہمارے پاس کئی ہیں شرائط لیکن ان سب کا مطلب یہ ہے کہ انقطاع کا امکان امکانات کی پیداوار کے برابر ہے لہذا ہم اسے اب لاگو کرتے ہیں لہذا رقم کا امکان پہلے تیسرے رول پر ظاہر ہوتا ہے لہذا یہ برابر ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ پہلے رول پر تعریف ہوتی ہے پھر انٹرسیکشن ای کمپلیمنٹ دوسرے رول انٹرسیکشن پر ہوتا ہے اور تیسری قطار پر ہوتا ہے اس لیے میں نے لکھا ہے کہ ایونٹ کا مجموعہ پہلی قطار میں تین ایونٹس کے انٹرسیکشن کے طور پر ظاہر ہوتا ہے لہذا ای تکمیل کرتا ہے کہ پہلے رول پر سات نہیں ہوتا ہے دوسری پر نہیں ہوتا قطار اور یہ تیسری کی e صف پر واقع ہوتی ہے یہ تین واقعات کا ایک دوسرے سے ملحقہ ہے اب آزمائشوں کی آزادی کی وجہ سے یہ بن جاتا ہے پہلے رول پر کی تکمیل کا امکان ایک ہی رہتا ہے لہذا ہم نے e اور e کے امکان میں اب ہر کردار میں e کے امکان میں e تکمیل کا امکان دوسرے رول پر کا امکان e کے امکان کو چھ سے ایک کے برابر شمار کیا۔ اس طرح ای کمپلیمنٹ کا امکان پانچ سے چھ ہو جاتا ہے پھر پانچ سے چھ اور پھر e چھ سے ایک ہوتا ہے
تو ہمیں پچیس بائی دو ایک چھ ملتا ہے
تو اگر ہم اس کا بغور تجزیہ کریں
تو احتمال کے اصول کیا ہیں جو استعمال کیے گئے ہیں۔ یہاں سب سے پہلے ہم نے احتمال کی ریاضیاتی تعریف یا کلاسیکی تعریف کا استعمال کیا ہے کیونکہ ہم نے فیئر ڈائس پر غور کیا ہے لہٰذا تمام کیسز یکساں امکان ہیں تمام 36 کیسز یکساں امکان ہیں دوم ہم نے آزادی کا تصور استعمال کیا ہے جس کا مطلب ہے کہ کردار پہلے دوسرے اور تیسرے وہ خود مختار ہیں اس لیے احتمالات کو ضرب دیا جا سکتا ہے آہ آئیے امکانات کے اس اصول کے کچھ مزید اطلاقات پر نظر ڈالیں
کا a مائنس b کا امکان تین ضرب پچیس کے برابر ہے اور b دو ایسے واقعات ہوں جو آزاد ہوں اور کہتے ہیں کہ مائنس b تو آئیے ایک اور کا امکان نصف سے زیادہ دیا جائے گا a امکان آٹھ ضرب پچیس کے برابر ہے مزید
کا امکان b کے احتمالات کو نکالنا ہے اور آخر کار ہم سے b اور a کا امکان کیا ہے ہمیں b تو آپ کو تلاش کرنا ہوگا۔ دی گئی معلومات سے آزاد ہیں آئیے پہلے دیکھتے ہیں یہ سب b اور a تلاش کرنے کے لیے کہا جاتا ہے اضافی معلومات جو ہمیں دی جاتی ہے وہ یہ ہے کہ واقعات ایک رگ ڈایاگرام کے ذریعے معلوم ہوتا ہے کہ ہمارے پاس کون سے امکانات موجود ہیں اور ہم ان کو کیسے استعمال کر سکتے ہیں
یہاں ہے b یہاں ہے اور واقعہ a تو فرض کریں واقعہ
یہ اصطلاح ہے b تو مائنس
بن جاتا ہے a مائنس b تو اس امکان کو تین ضرب پچیس بتایا جاتا ہے۔ اور اسی طرح
تو یہ وہ اقدار ہیں جو ہمارے لیے دستیاب ہیں آزادی کا استعمال کرنے کے لیے مجھے ایسے احتمالات کی ضرورت ہے جو ہمارے لیے مقطعات دستیاب ہوں
جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں یہ ایک b مائنس a اب robability کی b تو ہمیں کیا دیا جائے ایک مائنس intersection b complement لیتا ہوں b compliment کا بھی امکان ہے آپ یہاں سے دیکھ سکتے ہیں اگر میں یہاں
b کو دیکھتا ہوں جو a مائنس b کے ساتھ انٹرسیکشن لینے سے مجھے یہ خطہ اسی طرح ملے گا۔ اگر میں a تو یہ ایک بیرونی سیٹ ہے اور تکمیل کے امکان کے برابر ہے a انقطاع
دی جاتی ہے اب ہم اس شرط کو استعمال کریں ah تو یہ قدریں ہمیں دی جاتی ہیں جو تین ضرب پچیس کے برابر ہوتی ہیں اور یہ آٹھ ضرب پچیس گے۔ آزادی
خود مختار ہیں b اور a تو سب سے پہلے میں یہ ثابت کروں گا کہ اگر
تکمیل کے b کے احتمال اور a بھی آزاد ہیں کیونکہ پھر میں اسے a complement اور b آزاد ہیں اور b complement اور a تو کے امکان کو تکمیل کے احتمال میں لکھ سکتا ہوں b امکان کی پیداوار کے طور پر لکھ سکتا ہوں اور یہاں میں
آزاد ہیں b اور a تو آئیے پہلے اس کو ثابت کریں ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر
کی تکمیل بھی آزاد ہیں b اور a تو
کے مائنس امکان b کی تکمیل کے امکان کو ایک تقطیع b پر غور کروں اب ہم نے پہلے ہی دیکھا ہے کہ ایک تقطیع prob تو ٹھیک ہے اگر میں کے طور پر لکھا جا سکتا ہے ہمارے پہلے کے مسائل میں سے ایک میں ہم نے اس چیز کو استعمال کیا ہے لہذا میں اسے ثابت نہیں کر رہا ہوں۔ ایک بار پھر معذرت a intersection b
کے امکان کے طور پر لکھا جا سکتا ہے لہذا a کے امکان میں b آزاد ہیں اسے b اور a تو یہ ایک مائنس کے امکان کے برابر ہے کیونکہ تکمیل کا b تکمیل کے امکان میں ہے لہذا ایک تقطیع b کا امکان a کے 1 مائنس کے امکان کو لے سکتے ہیں جو کہ برابر ہے b یہاں آپ بنیادی طور b تکمیل کے امکان کے برابر ہے جو آزادی کی شرط ہے اسی طرح ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ تعریف اور b کے امکان a امکان پر آزاد ہیں جو ہم کہہ رہے ہیں کہ اگر دو واقعات آزاد ہیں
تو اگر میں ان میں سے ایک کی تکمیل کروں
تو وہ خود مختار رہیں گے اگر میں ان دونوں کی تعریف لوں
آزاد رہیں اگر میں صرف اس دلیل کو واقعات کے اگلے سیٹ پر بڑھاتا ہوں o تو وہ بھی

تکمیل کے برابر ہے تین ضرب پچیس کے برابر ہے آئیے ہم کچھ اشارے استعمال b کا امکان ہے جو b تو اس کا مطلب یہ ہے کہ ہمارے پاس
کے امکان کے برابر ہے b کا امکان q اور a کے برابر ہے p کریں آئیے لکھیں کہ
کا امکان تکمیل کے امکان b انقطاع کا امکان ایک تکمیل جو b برابر ہے تین ضرب پچیس اسی طرح q ایک مائنس میں p تو اس کا مطلب ہے
جو کہ آٹھ ضرب پچیس کے برابر ہے q میں p میں بن جائے گا جو ایک مائنس کے برابر ہے
برابر آٹھ ضرب پچیس کے برابر ہے pq مائنس q تین ضرب پچیس اور pq مائنس p دو مساواتیں ہیں اور دو نامعلوم ہیں ah تو میرے پاس
تو اگر میں یہاں کچھ ہیرا پھیری کرتا ہوں
منسوخ ہو جائے گا اور آپ کو مل جائے گا pqpq تو حقیقت میں میں منہا کرتا ہوں مساوات دو سے ایک مساوات پھر
پچیس سے پانچ جو f ive برابر ایک بائے پانچ یعنی آٹھ ضرب پچیس مائنس تین ضرب پچیس یعنی p مائنس q تو میں دو مائنس ایک لکھتا ہوں
کہ ایک بذریعہ پانچ ہے
ویلیو سے یہاں ڈالتا ہوں q تو میں اسے مساوات نمبر تین کہتا ہوں اب ان مساوات میں سے کسی ایک سے فرض کریں کہ میں اس
جمع ایک سے ملتا ہے۔ پانچ برابر آٹھ ضرب پچیس ھ کے برابر ہے p میں p کو تین سے دو میں استعمال کریں ہمیں ایک مائنس q تو اس کی جگہ
مائنس p مربع پلس p مربع کے برابر ہے لہذا اگر میں اس مائنس p یہ ایک سادہ آہ چوکور مساوات ہے جسے آپ اصل میں لکھ سکتے ہیں یہ
کو پانچ جمع ایک بذریعہ پانچ آٹھ کے برابر سمجھتا ہوں پچیس p
اگر میں اسے بائیں طرف لاتا ہوں ah ضرب پانچ جمع p مربع جمع چار p تو ہم مزید آسان کر سکتے ہیں یہ ہے مائنس
ah three by five میں کہنے کے برابر ہے۔ p تو مجھے مائنس تین ضرب پچیس صفر کے برابر ملتا ہے جو کہ ایک بائے پانچ مائنس
یا آپ مائنس کے نشان کے ساتھ کہہ سکتے ہیں یہاں صفر کے برابر ہے minus p
آئیے مسئلہ میں دی گئی شرط کو دیکھتے ہیں یہاں یہ احتمال دیا گیا ہے ah تین ضرب پانچ r برابر ہے ایک بذریعہ پانچ p تو اس کا مطلب ہے
کا نصف سے زیادہ ہے اس لیے چونکہ مجھے دو قدریں ملی ہیں۔ ایک بائے پانچ اور تین بائے پانچ میں یہاں تین بائی پانچ کی قدر کے لیے a
نصف سے زیادہ ہے ہم تین بائے پانچ کے برابر کا امکان لیتے ہیں اب اگر یہ p جاؤں گا لہذا ہم یہاں دوسرا آپشن استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ
برابر چار بائے پانچ کے q حاصل کرتا ہوں i تین بائی پانچ ہے اور اگر میں اس میں بدلتا ہوں
کا امکان ہم چار سے پانچ ہو رہے ہیں اب آپ اس خاص مسئلے میں دیکھ سکتے ہیں b کے امکان کو جانچنا اس لیے b تو یہ ہمارا اصل ارادہ تھا
جو ہم نے استعمال کیا ہے۔ آزادی کا تصور اور پھر تکمیل کا خیال استعمال کیا جاتا ہے اور پھر یہ کچھ آسان ہے ہم سادہ آہ ریاضی کا استعمال کر
رہے ہیں جہاں ہم دو مساوات کو دو نامعلوم میں حل کر رہے ہیں یقیناً مساوات لکیری آہ نہیں ہیں لیکن ان کو متبادل سے حل کرنا آسان ہے۔ ان میں
سے ایک سے دوسرے میں ہمیں ایک سادہ چوکور ملتا ہے اور اس چوکور کو حل کیا جا سکتا ہے اور پھر مسئلہ میں دی گئی دوسری شرط کو
استعمال کرتے ہوئے ہم آخرکار مطلوبہ احتمالات کی قدریں حاصل کرنے کے قابل ہو جاتے ہیں۔
تو آئیے کچھ مزید مسائل کو دیکھتے ہیں یہاں دو کرایہ کے نرد کو ایک ساتھ پھینکا جاتا ہے اس بات کا کیا امکان ہے کہ نمبروں کی پیداوار چھ سے
تقسیم ہوتی ہے لہذا جب دو منصفانہ نرد پھینکے جاتے ہیں
تو ہم اوپری چہروں پر نظر آنے والے اعداد کو دیکھتے ہیں اور ہم ضرب کرتے ہیں۔ ان کا
تو کیا امکان ہے کہ اس مصنوع کو چھ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے
تو یہاں مقدمات کی کل تعداد 36 ہے نتائج کی کل تعداد چھتیس ہے اب اس میں سے جس کے نتائج میں ہمارے پاس مصنوع کے برابر ہے جس کو
چھ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے آئیے اس کو دیکھتے ہیں
کہ مصنوع کو چھ سے تقسیم کیا جاسکتا ہے a تو میں اس واقعہ کی وضاحت کرتا ہوں
تو عناصر کیا ہیں اگر پہلا ایک سیکنڈ ہے
تو چھ ہے اگر پہلا دو اور دوسرا تین ہے اگر پہلا دو سیکنڈ ہے
تو چھ ہے اگر پہلا تین ہے اور دوسرا دو ہے اگر پہلا تین ہے
تو دوسرا چار ہے اگر پہلا تین ہے
تو دوسرا چھ ہے اگر پہلا چار ہے
تو تین ہے اگر پہلا چار ہے
دوسرا چھ ہے اور اگر پہلا چھ ہے d تو دوسرا چھ ہے اگر پہلا پانچ ہے
تو دوسرے پر جو بھی ہو وہ سب چھ سے تقسیم ہوتے ہیں
تو چھ صورتیں چھ جمع چھ ھ بارہ اور پھر آپ کے پاس دو تین تین دو اور تین چار اور چار تین ہیں
تو چھ جمع آہ چھ بارہ جمع تین
تو ہمارے پاس پندرہ صورتیں ہیں اس لیے ایک کا امکان پندرہ ضرب چھتیس کے برابر ہے یعنی پانچ ضرب بارہ اے کے برابر ہے میں اس مسئلے
میں ایک اور سوال پوچھتا ہوں ٹھیک ہے اس مسئلے میں مشروط امکان کیا ہے؟ اعداد کا مجموعہ کم از کم 10 ہے کیونکہ مصنوع کو چھ سے تقسیم
کیا جا سکتا ہے
میں کون سے عناصر ہیں آپ دیکھیں گے کہ کیا ہمارے پاس پہلا نمبر ایک دو b کی وضاحت کریں کہ رقم کم از کم دس ہے پھر b تو آئیے واقعہ
تین
r ہے
تو اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کہ ہم دوسرے نمبر پر جو بھی حاصل کرتے ہیں رقم کبھی بھی دس نہیں ہوسکتی ہے لہذا پہلا نمبر کم از کم
چار ہونا چاہئے پھر دوسرا چھ ہوسکتا ہے اگر پہلا پانچ ہے
کے احتمال کا b چھ ہو سکتا ہے لہذا اگر ہم دیے ہوئے r تو آپ کے پاس دوسرا پانچ آر چھ ہوسکتا ہے۔ اور اگر پہلا ہے چھ پھر دوسرا چار پانچ
حساب لگانا چاہتے ہیں
میں کتنے عناصر ہیں b کے امکان سے تقسیم کرنے کی ضرورت ہے اب ایک چوراہے b کا امکان b تو ہمیں ایک انقطاع
تو آئیے دیکھتے ہیں یہ 4 6 یہاں ہے 5 5 یہاں نہیں ہے کیونکہ یہاں یہ چھ پانچ چھ چھ چار چھ پانچ چھ چھ سے تقسیم نہیں ہے لہذا اس
ah کا امکان b کا امکان پانچ سے چھتیس ہو جاتا ہے اور b کے لیے مشترک ہیں اس لیے ایک مقطع a اصطلاحات میں سے پانچ اصطلاحات
دیا گیا ہے a کا کیا امکان ہے b ہے ٹھیک ہے میں نے اصل میں پوچھا ہے کہ
دیا گیا ہے b تو اسے
کا امکان ہوگا جو کہ پانچ ضرب بارہ ہے a تو بضم میں میرے پاس
کا امکان کیا ہے یہ چھ سے ایک ہو گا کیونکہ یہ b آپ کے دیکھ سکتا ہوں کہ کیا میں براہ راست دیکھتا ہوں کہ ah تو یہ برابر ہے ایک بائے تین
کا امکان دیا گیا ہے ایک سے تین ہے لہذا کنڈیشنگ اس امکان کو کافی حد تک تبدیل کر دیتی ہے ایک تجربہ کے دو b چھ سے چھتیس ہے جبکہ
ضرب چار کے ساتھ ہوتا p ضرب چار اور دوسرا امکان تین منفی p مربع جمع p ممکنہ نتائج ہوتے ہیں ۔ وہ پہلے احتمال کے ساتھ ہوتا ہے
کی قدر کیا ہے p ہے

Prutor@IITK

تو میں کہہ رہا ہوں کہ تجربے کے دو ممکنہ نتائج ہیں اس لیے دونوں نتائج کے امکانات کو ان کی کل رقم دی جائے گی۔ ایک کے برابر ہو
بذریعہ چار ایک کے برابر ہے p بذریعہ چار جمع تین منفی p مربع جمع p تو ہمارے پاس
لیتا ہوں جمع p کی دو قدریں دے گا جو جمع مائنس نصف ہے اگر میں p مربع برابر ایک بائے چار ہے جو مجھے p تو اس کا مطلب یہ ہوگا کہ
نصف کے برابر ہے
ڈالتا ہوں p تو دو نتائج کے امکانات ہوں گے اگر میں
بائے چار p تو نصف کے برابر ہوتا ہے یہ مجھے ایک بائے چار جمع ایک بذریعہ آٹھ دے گا جو کہ تین ضرب آٹھ ہے اور دوسری قدر تین مائنس
تو یہ تین مائنس نصف ہے جو کہ پانچ سے دو پھر تقسیم کیا جائے
تو یہ پانچ سے آٹھ بنتا ہے
مائنس نصف کے برابر ہے p تو تین سے آٹھ جمع پانچ ضرب آٹھ ایک ہے اگر
چار تک p مربع جمع p تو دو نتائج کے امکانات اس طرح
چار مائنس ایک از آٹھ یعنی ایک سے آٹھ اور دوسرا تین مائنس مائنس پلس ہے ne by تو یہ او بن جائے گا۔
تو یہ تین جمع نصف ہے جو کہ سات ضرب دو ضرب چار یعنی سات ضرب آٹھ ہے
تو آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ رقم برابر ہے ایک
تو اب آپ دیکھ رہے ہیں کہ یہ مسئلہ نتائج کی مکمل نوعیت کی ایک مثال ہے جس کا مطلب ہے کہ اگر میرے پاس تمام نتائج درج ہیں
تو اس معاملے میں میں نے اسے آسان بنا دیا ہے کہ اب اس پراپرٹی کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس صرف دو ممکنہ نتائج ہیں جن کو ہم حل
مربع برابر ہے ایک بائے چار کے اب کیا ہوتا ہے کہ p کرنے کے قابل ہیں۔ ایک مخصوص آہ مساوات یقیناً مساوات انتہائی آسان ہو جاتی ہے بس
ignore p لے لیں نصف کے برابر ہے اور p برابر ہے جمع مائنس آدھا آدھا ہم کہتے ہیں کہ صرف p عام طور پر جب ہم کہتے ہیں کہ
اب مائنس نصف کے برابر ہے جو کسی قسم کی غلطی کا باعث بن سکتا ہے کیونکہ فرض کریں کہ ایک سوال ہے جہاں ایک سے زیادہ درست آپشن
کو نظر انداز کرتے ہیں مائنس نصف کے برابر p درست ہیں ایک سے زیادہ آپشن درست ہیں اس صورت میں دونوں آپشنز درست ہیں جبکہ اگر آپ
اصل میں یہ ایک درست آپشن ہے کیونکہ یہ یہاں دو نتائج کے لیے درست قدروں کی طرف بھی لے جا رہا ہے صرف ایک چیز یہ ہے کہ یہاں آپ
abc کے پاس تین بائے آٹھ اور پانچ بائی آٹھ ہیں اور دوسرے میں آپ کے پاس ایک بذریعہ آٹھ اور سات ہے لکیری مساوات کے نظام میں آٹھ عدد
صفر کے برابر ہے یہ ہر ایک عدد کو فیئر ڈائی اوکے ٹاس کرکے طے کیا جاتا ہے اس کا bx plus cy برابر ہے 0 اور ax plus by
b ہم اسے دوبارہ کرتے ہیں جو بھی نمبر دیکھا جاتا ہے ہم اسے a مطلب ہے کہ اگر ہم ایک بار ٹاس کریں جو بھی نمبر ہے ہم کال کریں یہ
کہتے ہیں اس بات کا کیا امکان ہے کہ سسٹم میں غیر معمولی حل ہیں c کہتے ہیں اور ہم اسے دوبارہ ٹاس کرتے ہیں اور جو بھی نمبر ہے اسے
اوکے غیر معمولی حل کا کیا مطلب ہے دیکھیں اگر ہم لکیری مساوات کے یکساں نظام کو دیکھیں
صفر کے برابر ہے y کو صفر کے برابر رکھتے ہیں اور x تو اگر آپ
ہے۔ لکیری مساوات کا وہ نظام جو آپ ah میں t تو یہ ہمیشہ ایک حل ہوتا ہے لہذا ہم اس حل کو دیکھ رہے ہیں جس کی قدر صفر نہیں ہے لہذا
b مائنس ac مربع صفر ہونا چاہیے اگر b مائنس ac نے کرائمر قاعدہ کیا ہوگا شرط یہ آئے گی کہ یہ تعین کنندہ یا آپ کہہ سکتے ہیں کہ
مربع صفر کے برابر نہ ہو
مربع صفر کے برابر ہے b مائنس ac تو واحد حل صفر صفر ہے لہذا ہمیں ضرورت ہے۔ شرط ہے
ہے ac 1 مربع ہے 1 b کی کیا صورتیں ہیں آپ کے پاس ایک ایک ایک ایک دو 4 4 2 1 2 2 2 ہے لہذا آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں abc تو
اور اسی طرح آپ کے پاس یہ کیسز 3 3 3 4 4 5 5 5 اور 6 6 6 ہیں۔ کیسز کی کل تعداد ac 4 مربع ہے b 4 ac 4 مربع ہے 4 b
آٹھ آٹھ کیسز ہیں اس لیے مطلوبہ امکان ہو گا۔ آٹھ کو اس وقت تقسیم کیا جائے گا جب ہم ایک ڈائی کو تین بار ٹاس کریں گے
تو یہ چھ مکعب بن جائے گا جو کہ دو ایک چھ ہے
تو اگر ہم اسے آسان کریں
تو اس مسئلے میں ایک بذریعہ ستائیس ھ کے برابر ہے اس مسئلے میں تھوڑا سا ریاضی کا علم بھی ہے۔ درکار ہے لیکن یقیناً لکیری مساوات کا نظام
گیارہویں اور 12 میں کر رہے ہیں ah آپ اپنی کلاس ns آہ کم از کم دو لکیری مساوات
کو حل کرنے کے قابل ہونا چاہئے میں احتمال سے متعلق کئی مسائل حل کروں گا اور کچھ مسائل ہوں گے جو کچھ ah تو آپ کو اگلے لیکچر میں
سوالیہ پرچوں سے لئے گئے ہیں اور میں درخواست کروں گا آپ کو ترتیب اور امتزاج کے باب سے گزرنا ہے کیونکہ کچھ مسائل ان چیزوں کو
لیکچر میں آپ کے ah استعمال کر سکتے ہیں لہذا بہتر ہوگا اگر آپ اس باب کو دیکھیں تاکہ مسائل کی تفہیم زیادہ بہتر ہو جائے لہذا اگلے
امکانات کی مختلف قسم کی ایپلی کیشنز پر مسائل کو دوبارہ بیان کرے گا۔

Prutor@IITK