پس دوس
توں نے پچھلی کلاس میں بے ترتیب متغیرات کا تصور متعارف کرایا ہے ہم نے دیکھا ہے کہ بے ترتیب متغیر ایسی قدریں لے سکتا ہے جو فطرت میں محدود ہیں جیسے 1 2 3 وغیرہ یا وہ شمار کے لحاظ سے لامحدود ہو سکتے ہیں۔ ہم 1 2 3 اور اسی طرح کہہ سکتے ہیں یا وہ ایک وقفہ پر قدریں لے سکتے ہیں مثال کے طور پر اونچائی وزن کی قیمت وغیرہ لہذا ہم اس کے مطابق ان کو مجرد یا مسلسل بے ترتیب متغیرات کے طور پر میں نے مجرد بے ترتیب متغیرات کی وضاحت کی ہے اور امکان کی تقسیم کو کیسے بیان کیا جائے کہ امکانات کی تقسیم کی uh ممتاز کرتے ہیں بنیاد پر ہم وسط یا
توقع یا کسی بے ترتیب متغیر کی م
،توقع قدر کے تصور کو دیکھتے ہیں اور متغیر تغیر کو ایک بے ترتیب متغیر کے تغیر کے لحاظ سے ماپا جاتا ہے جس کی میں وضاحت کرتا ہوں مجھے اسے تھوڑا سا مزید دریافت کرنے دو۔ آئیے ہم غور کرتے ہیں کہ ہم تغیر کی تشخیص کے لیے متبادل فارمولے پر غور کر سکتے ہیں تو آئیے اس پر غور کریں کہ میں نے کون سا فارمولہ لکھا ہے
کا مطلب بتاتا x بذات خود mu مربع جہاں al to expectation of x minus mu کا تغیر برابر ہے x تو میں نے لکھا ہے کہ کی x ہے
توقع بے آئیے ہم اسے بڑھاتے ہیں
مربع کی x تو یہ
گنا mu توقع کے برابر ہے مائنس 2
مربع اب میں یہاں استعمال کرنے کی کوشش کروں گا۔ mu جمع x توقع
توقع کی کچھ خصوصیات
تو میں اسے 1 کہتا ہوں ایک کو آسان بنانے کے لیے ہم
توقع کی کچھ خصوصیات استعمال کریں گے پہلی خاصیت یہ ہے کہ مستقل کی
کی c توقع مستقل بے ٹھیک ہے یہ دیکھنا آسان ہے کیونکہ
توقع آپ کہہ سکتے ہیں قدر کو ضرب سے ضرب امکان
کہتے ہیں فرض کریں کہ رینڈم متغیر ان امکانات کو pn ہے اور اسی طرح p 1 p 2 کی قدر جو بھی ہو وہ دراصل x تو یہاں رینڈم متغیر لے رہا ہے
کے برابر ہے لہذا ایک مستقل کی c میں 1 کے برابر ہے۔ c بن جائے گا جو pn پلس p 2 پلس cp 1 تو یہ
پر غور کرتا ہوں اور میں اس کے ایک لکیری فنکشن پر غور کرتا ہوں x توقع ایک ہی مستقل ہے اسی طرح اگر میں بے ترتیب متغیر کے اوقات کی b جمع x تو یہ
ہے یہ دیکھنا بہت آسان ہے کہ اگر میں ایکس پلس بی کی al توقع کے برابر ہے لہذا یہ
توقع لکھتا ہوں
میں لکھتا ہے pn کو axn plus b پلس میں اور اسی طرح p 2 کو b پلس ax 2 پلس p 1 کو b پلس ax 1 تو یہ
p2 پلس p 1 اوقات b یعنی یہ اصطلاح پلس xnpn اور اسی طرح جمع x 2 p 2 جمع p 1 کو بڑھا سکتے ہیں۔ x 1 تو اس سے آپ ہے pn پلس
کی x تو یہ
کی pn جمع p2 پلس p1 اوقات v جمع x توقع کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا آپ کو
توقعات ملیں گی۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ
توقع ایک لکیری فنکشن ہے ٹھیک ہے لہذا اگر ہم اس پراپرٹی کو اس ایکسپریشن میں استعمال کرتے ہیں
تو ہمیں ملے گا
کا تغیر ملتا ہے x تو ان خصوصیات کو 1 میں استعمال کرتے ہوئے ہمیں
مربع کی x تو یہ
اسکوائر کی x توقع ہے لہذا یہ ہوگا
کی x گنا mu توقع کے اندر جائیں مائنس 2
مربع کی mu توقع سے زیادہ
مربع کی یہ mu مائنس x مربع ایک مستقل ہے لہذا mu مربع ہے کیونکہ mu توقع جو
کی x توقع اب یہ قدر بن گئی ہے لہذا ہم اسے
اور mu توقع کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ مربع مائنس 2
ہے mu کیا ہے جو x توقع
مربع کی mu مربع مائنس x مربع جو nu مربع پلس mu تو یہ 2 بن جاتا ہے۔
مربع x کا تغیر x کے حساب کے لئے ایک متبادل فارمولا ہے جس کا مطلب ہے کہ ہم کہہ سکتے ہیں x توقع کے برابر ہے لہذا یہ متغیر پورے مربع کی x مائنس
توقع کے برابر ہے یہ فارمولہ بعض اوقات
کو بے ترتیب متغیر دیے جانے سے ah توقعات کے حساب کتاب میں بہت کارآمد ہوتا ہے کیونکہ
مربع کی x اور x توقع
مربع کی mu مائنس x توقع کا حساب لگانا آسان ہوتا ہے کیونکہ یہ براہ راست ہے جبکہ آخری فارمولہ میں آپ نے
توقع دیکھی ہے اگر آپ اصطلاحات کی تعداد کا حساب لگاتے ہیں اس کا اندازہ کرنے کے لیے آپ کو بہت سے فرقوں اور ان کے مربعوں وغیرہ پر غور کرنے کی ضرورت ہے لہذا میں اسے استعمال کرتا ہوں اور پہلے کے مسائل میں سے کسی ایک میں فرق کا حساب لگاتا ہوں
تو آئیے کارڈ کے مسئلے کے اس اسکور پر غور کریں
y برابر x تو آئیے میں ایک بار وہ مثال دکھاتا ہوں۔ ایک بار پھر اور ہمارے پاس قیمت ہے یہاں کارڈ کے مسئلے کے اسکور کی تقسیم کا امکان کے برابر 18 x ہے اور امکان 13 x کے برابر 3 15 x کا امکان 10 o t برابر ہے 2 i کے برابر ہے ایک کے برابر 13 کے لئے کی x 13۔ ہم نے پہلے ہی x ہے 1
مربع کی x توقع کا حساب لگایا تھا جو 9 کے برابر تھا۔ اب اسی کے لئے اگر میں حساب کروں کہ
توقع کیا ہے
مربع کی x تو

کے برابر ہے آپ اصل ah 13 x جمع 18 مربع میں 1 13 x برابر ہے 2 سے 10 جمع 15 مربع میں 3 i 13 x مربع 1 i توقع سگما
میں
x کے اظہار کے ساتھ اس کا موازنہ کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں لہذا جو بھی قیمت ہو x توقع
ایک جیسے ہیں لہذا حسابات کو دیکھنے کا یہ آسان طریقہ ہے اس کا اندازہ کرنے کے pi's مربع ڈال رہے ہیں اور x مربع ہے ہم x توقع میں
n میں n انٹیجرز آپ کے پاس فارمولہ ہے n عدد کے مربعوں کے مجموعہ کے فارمولے کو لاگو کرتے ہیں لہذا پہلے n لئے ہم پہلے
برابر ہے 1 وہاں نہیں i اس رقم سے پہلی اصطلاح کو ہٹا دیا گیا ہے کیونکہ یہاں یہ 2 سے 10 تک ہے لہذا by 6 جمع 1 n جمع 1 میں 2
ہے
تو یہ ہو جاتا ہے پھر آپ اصل میں کر سکتے ہیں حساب 10 سے 11 میں 21 بائی 6 مائنس 1 اور 1 بائی 13 کو دیکھیں مجھے جمع 225 از 13
میں 3 بذریعہ 13 جمع 324 بذریعہ 13 رکھنے دو۔ اس طرح کوئی بھی ان تمام اصطلاحات کو آسانی سے آسان بنا سکتا ہے یہ 1 3 8 3 بہ 13
مربع مائنس x کا تغیر x بن جاتا ہے۔ لہذا اب
کی x توقع
ہے اور by 13 توقع کے برابر ہے۔ پورا مربع جو کہ 1 3 8 3
یہاں نو تھی x توقع
تو ہم اس نو مربع کو دیکھتے ہیں
تو کچھ آسان بنانے کے بعد یہ تین سو تیس ضرب تیرہ ھ کے برابر ہے اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تغیر کی اصطلاح یہ دراصل آپ کو دے رہی
ہے۔ وسط سے مربع انحراف اس کو پیمائش کی اکائی میں لانے کے لیے ایک معقول پیمانہ ہے کیونکہ اب یہ پیمائش کی مربع اکائی ہے لہذا اگر ہم
اس کا مربع جڑ لیں جو آپ کو پیمائش کی انہی اکائیوں کے لحاظ سے تغیر دیتا ہے مثال کے طور پر اگر آپ سینٹی میٹرز کو دیکھ رہے ہیں جو آپ
کلوگرام کو دیکھ رہے ہیں یا اگر آپ لیٹر کو دیکھ رہے ہیں
تو وضاحت کے لیے اکائیاں ایک جیسی ہونی چاہئیں اس لیے ہم معیاری انحراف پر غور کرتے ہیں لہذا ہم ایک بے ترتیب متغیر کے معیاری انحراف
ہے x def ہے ined کی وضاحت کرتے ہیں
کے تغیر کی مربع جڑ سے تعبیر کیا جاتا ہے x کو sd کے x تو ہم لکھتے ہیں
دو کے اوپری چہروں پر دکھائے گئے x تو میں یہاں کچھ اور مسائل کو دیکھتا ہوں ایک بار دو الگ الگ فیئر ڈائس رول کر دیے جاتے ہیں ایک بار
کا فرق کیا ہے جب دو x کی تقسیم معلوم کرنا چاہتے ہیں اور یہ کہنا چاہتے ہیں کہ x اعداد کے مطلق فرق کو ظاہر کرتا ہے ۔ ڈائس اس لیے ہم
ڈائس کو رول کیا جائے
تو امکانات کی تعداد 36 ہے آپ کے پاس نمونہ کی جگہ ہے 1 1 1 2 2 2 2 1 2 2 6 3 1 3 2 3 6 1 6 2 6 6۔
کی تعریف کو دیکھنا چاہتے ہیں x لہذا اگر ہم بے ترتیب متغیر
تو یہ فرق ہے اگر ہمارے پاس 1 1 ہے
تو فرق 0 ہے اگر یہ 2 2 ہے
تو فرق 0 ہے۔ 1 2 ہے
تو فرق مائنس 1 ہے اور مطلق فرق 1 ہو جائے گا اگر یہ 3 6 ہے
کی ممکنہ اقدار جو کہ مطلق فرق ہے وہ ہیں 0 1 2 3 x تو فرق مائنس 3 ہو جائے گا اور مطلق فرق 3 ہو جائے گا اور اسی طرح ممکنہ اقدار
اور 5۔ لہذا آپ کہہ سکتے ہیں کہ مطلق فرق 1 1 کے لیے 0 ہے۔ 2 2 3 3 4 4 5 5 اور 6 6 کل 6 کیسز ہیں 4
اب مکمل فرق یہ ہے کہ آپ کے پاس کون سے ممکنہ 6 x بن جائے یعنی 1 36 x کے برابر یہ 6 0 x تو اس بات کا کیا امکان ہے کہ
معاملات ہوسکتے ہیں؟ دو اور پھر یقیناً دو ایک پھر آپ کے پاس دو تین تین دو تین چار چار چار چار پانچ پانچ چار پانچ چھ اور چھ پانچ کیسز کی کل
کیسز ہے n تعداد
کا امکان کیا ہے ایک کے برابر جو 10 سے 36 بنتا ہے آپ اسے 5 بائی 18 لکھ کر بھی آسان بنا سکتے ہیں ۔ اب ہم مطلق فرق کو دیکھتے ہیں x تو
دو کے برابر ہو۔ جو x دو ایک تین تین 1 2 4 4 2 3 5 5 3 4 6 6 4۔ اس طرح آپ کے پاس کل آٹھ صورتیں ہیں اس لیے امکان ہے کہ
کہ آٹھ ضرب چھتیس بن جائے گا جو کہ دو ضرب نو کے برابر ہے اب آئیے مطلق فرق کو دیکھیں تین ایک چار چار ایک دو پانچ پانچ دو تین چھ چھ
تین
برابر ہو گا 3 کے 6 بذریعہ 36 بن جائے یعنی 1 بذریعہ 6۔ اب مطلق فرق ہے۔ 4 کے لیے 1 x تو آپ کے پاس کل چھ ہے اس لیے امکان ہے کہ
9۔ اسی طرح ہم x بن جائے گا یعنی 1 36 x کے برابر ہے جو 4 4 x کی کل 4 صورتیں ہیں اس لیے یہ امکان کہ 2 6 6 2 1 5 5
برابر پانچ کا امکان دو ضرب چھتیس x مطلق فرق کو دیکھتے ہیں کہ پانچ ایک چھ اور چھ ایک مجموعی طور پر صرف دو صورتیں ہیں اس لیے
کے برابر ہے جو کہ ایک ضرب اٹھارہ کے برابر ہے آپ چیک کر سکتے ہیں کہ یہ ایک درست امکانی تقسیم ہے کل امکان چھ جمع دس سولہ جمع آٹھ
کی احتمالی x کی امکانی تقسیم ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں x چوبیس ہے جمع چھ تیس جمع 434 جمع 236 بذریعہ 36 یعنی 1۔ یہ ہے
x برابر 1 5 p اور 9 x برابر 1 4 p 6 x برابر 1 3 p ہے 2 کے برابر 9 2 p 18 x برابر 5 1 p 6 x ہے 1 0 p تقسیم
18 یہ ہے ترتیب متغیر کی مکمل امکانی تقسیم ہے جسے اوپری حصے میں مطلق فرق کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔ دو چہروں کا مشاہدہ کیا گیا
جب دو منصفانہ ڈائس رول کیے جاتے ہیں فرض کریں کہ میں حساب لگانا چاہتا ہوں۔ یہاں
توقع یہ ہے کہ 0 میں 1 سے 6 جمع 1 میں 5 میں 18 جمع 2 میں 2 بذریعہ 9 جمع 3 میں 1 بذریعہ 6 جمع 4 میں 1 بذریعہ 9 جمع 5 میں 1 بذریعہ
18 بنتا جا رہا ہے
مربع کی x تو کوئی اسے آسان بنا سکتا ہے۔ 35 بائی 18 آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اصل میں یہ دو سے تھوڑا کم ہے اگر ہم
توقع کا حساب لگائیں
تو یہ صفر مربع میں ایک بائے چھ جمع ایک مربع ہے تاکہ دوسری قدر جمع 2 مربع میں 2 ضرب 9 جمع 3 مربع میں 1 بائے 6 جمع 4 مربع میں 1
x مربع مائنس x کا تغیر x ضرب 9 جمع 5 مربع میں 1 ضرب 18 ایک بار پھر آپ اسے آسان بنا سکتے ہیں یہ 35 ضرب 6 کے برابر ہے لہذا
پورے مربع کی
ہے۔ مائنس 35 بائی 18 مربع تاکہ اسے آسان بنایا جا سکے یہ 665 کو 3 سے 4 تقسیم کرنے کے برابر ہے 6 x توقع کے برابر ہے جو کہ 35
مخصوص ماربلز پر مشتمل سنگ مرمر کو یکے بعد دیگرے n جو کہ دو سے تھوڑا زیادہ ہے ایک مجرد تقسیم کی ایک اور مثال دیتا ہوں اور اس پر
کھینچا جاتا ہے۔ بے ترتیب طور پر اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ مسٹر بل کو دہرایا نہ جائے
ان سنگ مرمروں پر کچھ ٹیگ لگائیں c تو مثال کے طور پر ہم
تو ایک ماربل کھینچا جائے اور اس کا ٹیگ نوٹ کیا جائے کہ ماربل کو بازو میں واپس رکھا جاتا ہے اور پھر دوسرا ماربل کھینچا جاتا ہے اب یہ پچھلا
ہو سکتا ہے یا اگر پچھلا ہے
تو دوسرا بھی ہو سکتا ہے۔ ہم رک جاتے ہیں ورنہ ہم جاری رکھتے ہیں

تو پھر ہم اسے واپس رکھتے ہیں اور ایک اور کھینچتے ہیں
تو یہ دوبارہ دو پچھلے دو میں سے ایک ہو سکتا ہے یا یہ ایک نیا ہو سکتا ہے اس طرح ہم اس وقت تک جاری رکھتے ہیں جب تک کہ ہمیں کوئی ایسی چیز حاصل نہ ہو جو پہلے کھینچی گئی ہو
کی تقسیم کو x تجربہ کو مکمل کرنے کے لئے درکار قرعہ اندازی کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے لہذا ہم x نمبر کے ساتھ x تو آئیے غور کریں
ماربلز ہیں جو الگ الگ ہیں۔ اس لیے یقینی طور n جمع ایک تک لے جائے کیونکہ کل n قدریں دو تین اور اسی طرح x معلوم کرنا چاہتے ہیں تاکہ
پلس پہلے ڈرا میں آپ کو دہرایا جائے گا اس کے بعد اس کی کوئی ضرورت نہیں ہے کیونکہ اگر تمام ٹرائلز میں آپ کو ایک الگ ملتا ہے n پر
تو یقیناً این پلس ون ایچ ٹرائل پر آپ کو وہی ملے گا جو پہلے ڈرا ہو چکا ہے
دو کے برابر ہے اس کا مطلب ہے کہ پہلی قرعہ اندازی پر جو بھی ماربل کھینچا گیا تھا وہ دوبارہ کھینچا جاتا ہے x کہ ty تو کیا امکان ہے
لہذا اگر ہم ایک کو کھینچتے ہیں اور وہ ٹیگ نوٹ کیا جاتا ہے
n تو یہ ان میں سے ایک ہے
تو دوسری میں اگر ہم ڈرا رہے ہیں
تو امکان ہے اس میں سے ایک ایک کرکے ہوں گے لہذا ہم اسے لکھ سکتے ہیں کہ پہلی قرعہ اندازی پر جو ماربل کھینچا گیا ہے اسے دوبارہ
کے برابر ہے اس کا مطلب ہے کہ دوسرے ٹرائل میں ہمیں ایک الگ ملا ہے اب پہلے ٹرائل میں آپ ڈرا کرتے ہیں 3 x کھینچا گیا ہے کیا امکان
مائنس 1 سے ہے لہذا اس n ایک اور ہمیں دوسرے میں ٹیگ یاد ہے جو نہیں کھینچا گیا ہے اس کا مطلب ہے کہ جو کچھ بھی کھینچا گیا ہے وہ باقی
ہے اب 1 اور 2 ڈرا میں دو الگ الگ ماربل موجود ہیں اور تیسرا جو ہم اس میں سے ایک کو کھینچتے ہیں by n مائنس 1 n کا امکان
ہوگا لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ کیا دوسرے پر ماربل پہلے سے الگ ہے اور تیسرا پہلے دو میں سے کوئی ہے میں اس n تو اس کا امکان 2 بائے
برابر ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ جو کچھ بھی پہلے کھینچا گیا ہے وہ دوبارہ ہے۔ دوسرے پر کھینچا گیا ہے لہذا اگر x دلیل کو یہاں دہراتا ہوں
ہم پہلے والے پر سمدرا پر غور کر رہے ہیں
کے برابر 3 x ہے دوسری صورت میں اگر by n ایک میں سے طے شدہ ہے اور ہم اسے دوبارہ آزما رہے ہیں لہذا اس کا امکان 1 n تو وہ
ہے اس کا مطلب ہے دوسری قرعہ اندازی میں ہمیں پہلے والے سے کچھ الگ ملتا ہے
ہے اس طرح ہم لکھتے رہ سکتے ہیں۔ n ہو گا اور پھر ہمیں کچھ ملتا ہے جو پہلے دو سے ہے یعنی دو سے by n مائنس 1 n تو اس کا امکان
برابر چار کے x پہلی چند اصطلاحات کیا ہے امکان
تو وہ پہلا ہوگا الگ ہے آہ دوسرا پہلے سے الگ ہے تیسرا پہلے دو سے الگ ہے
n اور اسی طرح by n مائنس by nn 2 مائنس 1 n ون پر i-th اور پھر یہ ان میں سے ایک ہے پہلے تین n مائنس دو سے n تو
nn مائنس ہے 1 بذریعہ n جمع 1 جو کہ n برابر x اور اسی طرح کیا امکان ہے n مائنس 1 بذریعہ i اور n جمع 2 بذریعہ i مائنس
ii سے al برابر ہے x ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ سگما امکان n بذریعہ n آخر کار n اور اسی طرح 1 بذریعہ n مائنس 2 بذریعہ
جمع 1 ہے 1 n برابر ہے 2 سے
تو اصل میں یہ چیک کرنے کے لیے کہ آپ کو بیکورڈ سمیشن کا استعمال آخر سے شروع کرنا ہوگا اور ٹرم بذریعہ ٹرم استعمال کرنا ہوگا اب میں
کہلاتے ہیں لہذا discrete random variables نے ایک خاص قسم کے بے ترتیب متغیرات پر تفصیل سے بات کی ہے وہ ہیں
وہ ہوتے ہیں جو لامحدود یا گنتی کے لحاظ سے لامحدود قدریں لیتے ہیں امکانی تھیوری میں کچھ discrete random variables
مخصوص بے ترتیب متغیرات ہوتے ہیں جو عام طور پر استعمال ہوتے ہیں اور وہ مختلف طبعی حالات کو بیان کرنے کے لیے اچھے لگتے ہیں ان
میں سے ایک مشہور ہے۔ binomial distribution
کا مطالعہ کر رہے ہیں binomial distribution تو آپ کے نصاب میں بھی 12 ویں جماعت میں آپ اصل میں
کا نام جیکب برنولی سوئس ریاضی دان کے نام پر رکھا گیا ہے binomial distribution تو مجھے اس کی وضاحت کرنے دیں اور اس
اور ان کی شائع شدہ کتاب ہماری قیاس آرائیوں میں سے ایک ہے جسے آپ سب سے زیادہ مقبول کہہ سکتے ہیں۔ کتابیں اور یہ امکانی نظریہ کی
بنیادی کتابوں میں سے ایک ہے یہاں اس نے کچھ تجربات کو بیان کیا۔ وہ فطرت کے لحاظ سے متضاد ہیں یعنی جس میں ممکنہ نتائج کی تعداد دو ہے

تو آئیے مثال کے طور پر غور کریں کہ کوئی بیمار ہو جائے اور وہ ڈاکٹر کے پاس جائے اور دوا لے جائے
تو نتیجہ یہ ہو سکتا ہے کہ اس کا علاج ہو جائے یا وہ نہ ہو سکے۔ اس دوا سے علاج کیا گیا اس کا مطلب ہے کہ آپ دو نتائج دیکھ رہے ہیں کہ
علاج ہو رہا ہے یا علاج نہیں کرایا جا رہا ہے کوئی مقابلہ کے امتحان میں آتا ہے
تو اسے کچھ نمبر مل سکتے ہیں لیکن ہمیں یہ جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے کہ آیا وہ امتحان میں کوالیفائی کرتا ہے یا وہ امتحان میں کوالیفائی
نہیں کرتا ۔ شوٹر کسی ہدف سے ٹکراتا ہے اس لیے ہم یہ جاننے میں دلچسپی رکھتے ہیں کہ آیا نتیجہ کامیابی ہے یعنی اس نے کامیابی سے ہدف
کو نشانہ بنایا یا وہ ہدف سے چھوٹ گیا، اسی طرح حقیقی زندگی میں بھی بڑی تعداد میں ایسے حالات ہوتے ہیں جہاں تجربہ پیچیدہ ہو سکتا ہے لیکن
ہم صرف اس میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ دو نتائج کو دیکھنے کے لیے کیونکہ یہ ریکارڈنگ کے مقصد کے لیے کچھ دلچسپی کا باعث ہو سکتا ہے اس
حقیقی زندگی کے بہت سے تجربات میں کسی کو صرف دو ts لیے اس طرح کے تجربات کو برنولین ٹرائلز یا برنولیئن تجربہ کہا جاتا ہے۔
ممکنہ نتائج میں دلچسپی ہوتی ہے مثال کے طور پر کسی ہدف کو نشانہ بنانا
تو کامیابی یا ناکامی کے دو نتائج یہ ہیں کہ ایک مریض کا علاج کیا جا رہا ہے جو کہ ٹھیک نہیں ہوا امتحان میں حاضر ہو رہا ہے اس لیے آپ کہہ
سکتے ہیں کہ کوالیفائنگ یا ناٹ کوالیفائنگ اس طرح کے تجربات میں ہم ایک نتیجہ کو کامیابی کے طور پر اور دوسرے نتیجہ کو ناکامی کے طور پر
متعین کریں
لکھتا ہوں ٹھیک ہے اور یہ برنولیئن ٹرائلز کہلاتے ہیں f اور ناکامی کے لیے s تو آئیے میں کامیابی کے لیے
ٹرائلز یکساں حالات میں اور ایک دوسرے سے آزادانہ طور پر انجام پاتے ہیں اور فرض n bernoullian تو آئیے ایک قیاس کرتے ہیں کہ
کہتے ہیں اور ناکامی کا امکان بھی تمام آزمائشوں میں یکساں ہوتا ہے کہیے ایک p کریں کامیابی کا امکان تمام آزمائشوں میں ایک جیسا ہوتا ہے
ہم ٹھیک لکھ سکتے ہیں q یعنی p مائنس
ٹرائلز میں کامیابیوں کی تعداد کو ظاہر کریں x n صفر اور ایک کے درمیان نمبر ہوں گے ٹھیک ہے q اور p تو یہاں یہ
متغیر ہے اور یہ 0 1 2 اقدار لے سکتا ہے اور اسی m کی ممکنہ قدریں کیا ہیں ایک مجرد رینڈو ہے xx ایک مجرد ہے ترتیب متغیر ہے x تو
کی ممکنہ قدریں 0 x بار کر رہے ہیں لہذا آپ کو تمام ناکامیاں مل سکتی ہیں ایک کامیابی دو کامیابی تمام کامیابی ہے لہذا n تک آپ ٹرائل n طرح
کے برابر ہے اب آپ مجھے یہاں کھینچنے دیں یہ ٹرائلز ہیں ٹھیک ہے 1 2 3 k برابر x کا کیا امکان ہے کہ n اوپر ہو سکتی ہیں۔ 2 1
کامیابی ہے ٹرائلز ایک ٹرائل میں آزادانہ طور پر چلائے جاتے ہیں k ٹرائلز میں سے n اور اسی طرح اب آپ کہہ رہے ہیں کہ ان میں سے
کی کامیابی پر غور کرتے ہیں k ہے لہذا اگر آپ p کامیابی کا امکان
ٹرائلز ان کے نتیجے k مائنس n ہو جاتا ہے لیکن اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ باقی p کا k تک ہو جاتا ہے جو کہ پاور k میں p تو امکان
بار بن جاتا ہے k مائنس qn میں q ہے اور دوبارہ ٹرائلز آزاد ہیں لہذا یہ q یا p میں ناکامی ہوتی ہے۔ اب ایک ناکامی کا امکان 1 مائنس

k کامیابی اور ن مائنس k برنولیئن ٹرائلز میں سے کیا امکان ہے وہ n ہو جاتا ہے ہم حساب کر رہے ہیں کہ k مائنس n کی طاقت q تو یہ
ویلیوز جن کے نتیجے میں کامیابی ہو رہی ہے ان میں سے کوئی بھی ہو k ٹرائلز ہیں اب یہ n اس کے نتیجے میں اب کل es ناکامی ہیں۔
ہو گی nck سکتا ہے اس لیے منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد جو کہ
کہتے ہیں pk کے برابر ہے لہذا آپ مجھے بتا رہے ہیں اسے k 0 1 2 n تو
کی تمام ممکنہ قدروں کے مطابق امکانات مختص کیے ہیں اسے بائنومیل ڈسٹری بیوشن بھی x تک آپ نے ہے ترتیب متغیر p 0 p 1 pn تو
کہا جاتا ہے اسے برنولی ڈسٹری بیوشن بھی کہا جاتا ہے اس لیے بائنومیئل ڈسٹری بیوشن کا نام واضح ہے کیونکہ آپ بائنومیل استعمال کر رہے
یہاں سب سے پہلے میں یہ ظاہر کرنے کی کوشش کروں گا کہ یہ ان امکانات کی ایک درست تفویض ہے جو ہم پہلے coefficients ہیں۔
کے برابر ہے اس کا 1 ہونا ضروری ہے n سے sigma pkk 0 دکھاتے ہیں کہ یہ ایک درست امکانی تقسیم ہے جو کہ
کے برابر ہے n سے kk 0 مائنس nc kp to the power kq to the power n تو آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ ہے
تو یہ اس کے برابر ہے اگر میں تمام اصطلاحات لکھوں
مائنس 2 اور اسی n سے پاور q ہیں nc 2 p squ مائنس 1 جمع n کے لئے پاور nc 1 pq جمع n کو پاور nc 0 q تو یہ ہے
اگر آپ کو اپنا دو نامی نظریہ یاد ہے n کو پاور ncnp طرح پلس
p ہے 1 مائنس q تک پھیلنا اب n کی طاقت p پلس q تو بائنومیل تھیوریم سے یہ کچھ نہیں ہے مگر
ہے جو 1 کے برابر ہے لہذا تمام امکانات کا مجموعہ 1 ہے اور تمام احتمالات غیر منفی ہیں لہذا n ہے لہذا یہ 1 کی طاقت p 1 جمع q تو
میں نے پہلے ہی م ah یہ احتمالات کی ایک درست تفویض ہے
توقع قدر کا تصور متعارف کرایا ہے۔ یا وسط اور تغیر
تو آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ قدریں کیا ہیں بائنومیئل ڈسٹری بیوشن کے لیے ٹھیک ہے
تو
کے برابر ہے pkk 0 میں k ہے جو تعریف کے لحاظ سے مساوی ہے یہ وہ قدر ہے جو اس امکان سے ضرب ہوتی ہے جو mu وہ x توقع
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں خلاصہ میں پہلی اصطلاح n کے برابر 0 سے kk مائنس n سے پاور kq سے پاور nckp اب یہ n سے
کر سکتے ہیں۔ ac ڈالیں گے۔ اصل میں صفر ہے لہذا ہم k کے مساوی ہے لہذا جب آپ اس اصطلاح کو صفر کے برابر k صفر کے برابر
اس کا اندازہ کرنے کے لیے k مائنس n سے پاور kq سے پاور nckp میں nk کے برابر ہے ایک سے k اصل میں کہتے ہیں کہ یہ
k مائنس n فیکٹوریل k فیکٹوریل nkn کے برابر ہو 1 سے k ہمیں اس ترتیب کے امتزاج کے اشارے کو پھیلانا ہوگا تاکہ یہ سمیشن
سے تقسیم کرتے ہوئے جب ہم اس اشارے کو استعمال کرتے ہیں k مائنس n سے پاور kq کو پاور p فیکٹوریل
k 0 so 0 تو ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ فیکٹوریل نوٹیشن 1 فیکٹوریل 2 ہے 1 میں 2 اور اسی طرح اور ہم یہ بھی قیاس کرتے ہیں کہ
n کے لیے ہم معمولی طور پر 1 کو کنونشن کے طور پر لیتے ہیں تاکہ اس اشارے کے ساتھ درست رہے اس لیے ہم اسے factorial
مائنس 1 لکھتا ہوں۔ k مائنس 1 مائنس n مائنس 1 فیکٹوریل سے تقسیم کر کے لکھ سکتے ہیں اور اس اصطلاح کو میں k فیکٹوریل کے بطور
n کے برابر 1 سے kk مائنس n سے پاور kq کے طور پر لکھتا ہوں پاور p فیکٹوریل n اس عدد کو میں
مائنس 1 یہ n کے برابر ہو جائے گا 0 سے m پھر یہ m مائنس 1 برابر ہے k تو یہاں میں اشارے میں کچھ تبدیلی کروں گا آئیے ہم ڈالیں
نکال سکتا ہے ni
m factorial n کو تقسیم m مائنس 1 مائنس n سے پاور q مائنس 1 k کو پاور p مائنس 1 فیکٹوریل n تو آپ حاصل کریں گے
نے نکالا ہے pi فیکٹوریل اس minus m مائنس 1
مائنس 1 فیکٹوریل کے طور n میں n فیکٹوریل کو n تو میں نے یہاں کیا کیا آئیے اس میں ان دو اصطلاحات کا موازنہ کریں اصطلاح میں نے
کو pi مائنس 1 میں لکھا ہے اور k 1 کو پاور p مائنس 1 میں لکھا ہے میں نے k کو پاور p نے اسی طرح اس ni پر لکھا ہے اور اس 1
لکھ رہا ہوں m مائنس 1 میں so k مائنس 1 k مائنس 1 مائنس n سے ہے پاور q باہر لے جانا ہے اب یہ اصطلاح
ہو جاتا ہے m مائنس 1 مائنس n تو یہ
m سے پاور p مائنس جو k کو پاور کے لیے mp مائنس 1 کا انتخاب n مائنس 1 n بن جاتی ہے 0 سے m سگما np تو یہ اصطلاح پھر
بن رہا ہے m مائنس 1 مائنس n سے پاور q اب
مائنس 1 کی n کی طاقت p پلس q بن جاتا ہے اور اب یہ اصطلاح اگر آپ دیکھیں کہ یہ np تو یہ
توسیع کے سوا کچھ نہیں ہے جو اب ہے 1
ہے np تو یہ
کرنے کی کوشش کریں اسے int آئیے ہم جسمانی طور پر np کا مطلب ہے binomial distribution تو ہم نے کیا ثابت کیا ہے کہ
ہے کامیابیوں کی تعداد px ایک سکے کے ایک تھرو میں سمجھیں یا آپ یہ کہہ سکتے ہیں کہ برنولیئن تجربے کے ایک ٹرائل میں کامیابی کا امکان
کو ظاہر کرتا ہے
تو کامیابی کی اوسط تعداد کیا ہے ہماری م
تناسب ہے p ہے فطری چیز کیونکہ اگر n میں p توقع کامیابی کی تعداد جو کہ
مربع x کل میں سے کتنے آ رہے ہیں کو ظاہر کرتا ہے آہ اب ہم اس تقسیم کے تغیر کو دیکھتے ہیں اب ہم نے حساب کرنے کے لیے np تو
مائنس
مربع کی x توقع
مربع کی x توقع کا فارمولا استعمال کیا ہے۔
توقع ہم اسے مزید لکھ کر حل کرتے ہیں کیونکہ اس کی وجہ یہ ہے کہ اگر آپ
کے اظہار کو دیکھیں x توقع
تو فیکٹوریل اصطلاحات میں سے ایک کو منسوخ کرکے آسان کیا جاتا ہے لہذا اگر میرے پاس مربع کی اصطلاح ہے
کی x تو اسے منسوخ نہیں کیا جاسکتا۔ اس لیے بہتر ہے کہ اس مخصوص انداز میں اس پر غور کیا جائے تاکہ یہ
کی x مائنس 1 کے علاوہ x توقع
کی x توقع
کی x ہے لہذا اب میں np یہ ted توقع کے برابر ہو
آپ n کے برابر 0 سے k کے لئے k مائنس n سے پاور kq سے پاور nckp مائنس 1 k میں k مائنس 1 x توقع کا حساب لگاتا ہوں
کے برابر 1 کے برابر ہے یہ اصطلاح 0 بن جاتی ہے۔ لہذا ہم اس k کے مساوی 0 کے برابر ہے اور اس کے مطابق k یہاں نوٹ کریں کہ
کو منتخب کریں تاکہ یہ k مائنس n سے پاور kq کو پاور n kp مائنس 1 میں لکھ سکتے ہیں k کو nk کے برابر 2 سے k سمیشن کو
سے پاور kq سے پاور p فیکٹوریل k مائنس n فیکٹوریل k فیکٹوریل تقسیم nn مساوی 2 سے k کے برابر ہو۔ 1 k کے مائنس میں k

k میں k مائنس 1 میں منسوخ کرتا ہوں جو کہ ہے k فیکٹوریل کی پہلی دو اصطلاحات سے k کو اس k اس میں میں اس k مائنس n
فیکٹوریل k مائنس n مائنس 2 فیکٹوریل k فیکٹوریل کو تقسیم کرکے n مائنس 2 فیکٹوریل اس لیے مجھے اصطلاح ملتی ہے k مائنس 1 میں
n فیکٹوریل کو میں n اس کو حل کرنے کے لیے میں بریک اپ پر غور کرتا ہوں جیسے اس k مائنس n سے پاور q میں k سے پاور p
مائنس سے تقسیم کیا جائے گا 2 فیکٹوریل اور اس اصطلاح k مائنس 2 فیکٹوریل کو n مائنس 1 میں لکھتا ہوں اور یہاں مجھے n کے طور پر
مربع میں p مائنس 2 کے طور پر لکھتا ہوں اور k کو پاور p مائنس 2 فیکٹوریل کے طور پر لکھا جا سکتا ہے یہ میں k مائنس 2 مائنس n کو
کہنے کے n مائنس 2 برابر ہے k برابر 2 میں ایک بار پھر وضاحت کرتا ہوں k مائنس 2 k مائنس 2 مائنس n میں پاور q لکھتا ہوں باہر
m مائنس 2 مائنس n فیکٹوریل m مائنس 2 فیکٹوریل تقسیم n مائنس 2 n برابر ہے 0 سے m مربع سگما p مائنس 1 n میں n لیے پھر یہ
m مائنس 2 مائنس n سے پاور ایم کیو کو پاور p فیکٹوریل
کی binomial مائنس 2 میں n کی طاقت p پلس q مربع بنتا جا رہا ہے اور یہ p مائنس 1 میں n میں n تو یہ
توسیع کے سوا کچھ نہیں ہے
ہے۔ 1 p جمع q تو یہ
مربع بن جاتا ہے p مائنس 1 n میں n تو یہ
تو آئیے یہاں اظہار کی طرف واپس جائیں
مربع x توقع
مائنس 1 جمع x میں x توقع
مربع کی x تھی لہذا ہمیں x توقع
مربع کی xa کا تغیر جو x کے طور پر ملتی ہے۔ np مربع جمع p مائنس 1 n میں n توقع
پورے مربع کی x توقع کے برابر ہے مائنس
مربع اس لیے ہم یہاں تھوڑی سی آسانیاں کر سکتے ہیں یہاں پہلی p مربع n مائنس np مربع پلس p مائنس 1 n کے برابر ہے n توقع
مربع حاصل کریں np مائنس np مربع ہے تاکہ آپ کو منسوخ کر دیا جائے p مربع n مربع ہے اور یہاں یہ مائنس p مربع n اصطلاح
کہہ سکتے ہیں npq کے برابر ہے یا آپ p میں 1 مائنس np جو
کی x تو دلچسپ بات یہ ہے کہ اب ہم نے
نوٹ کر q کی ایک دو نامی تقسیم ہے جسے آپ یہاں x کے طور پر شمار کیا ہے جہاں npq کے تغیر کو x کے طور پر اور np توقع
اور 0 q سے کم ہو گا لہذا آپ یہاں حقیقت میں ایک بیان دے سکتے ہیں کیونکہ np ہمیشہ npq سکتے ہیں۔ 0 اور 1 کے درمیان ایک عدد لہذا
سے کم ہے لہذا ایک دو نامی تقسیم میں اوسط ہمیشہ اس تغیر سے زیادہ ہوتا ہے جو ہم کر سکتے ہیں۔ معیاری np کے درمیان ہے 1 npq
نصف کے برابر ہے یعنی p کا مربع جڑ ہے اب ہم اسپیشل کیس کو بھی دیکھ سکتے ہیں جب npq انحراف کے لیے ایکسپریشن بھی لکھیں جو کہ
جب کامیابی اور ناکامی کے امکانات یکساں ہیں
کے برابر ہے نصف کے پھر تقسیم ایک بہت ہی آسان q کے برابر ہے p تو ایکسپریشنز کیا ہیں پھر کامیابی اور ناکامی کے امکانات وہی ہیں جو
کے برابر ہے 0 1 اس k کے لئے n کے نصف کی طاقت k کے برابر ہے nc کے برابر ہے جو کہ x شکل اختیار کرتی ہے جو کہ امکان
معاملے میں اگر آپ یہاں پلاٹنگ کو دیکھیں
کہنے کے لئے k مائنس n برابر ہے x تو اگر میں سمجھتا ہوں کہ امکان
k برابر ہے x ہے جو کہ امکان n نصف طاقت nck کے لئے n نصف طاقت k مائنس ncn تو وہ
تو جب کامیابی اور ناکامی کے امکانات یکساں ہوں
پر غور کرتا ہوں n تو تقسیم ان پوائنٹس پر مساوی امکانات مختص کرتی ہے جو ہم آہنگ ہیں یعنی اگر میں 0 اور
کو منفی 1 پر غور کرتا ہوں n تو امکان ایک جیسا ہوگا اگر میں 1 اور
تو امکان ایک جیسا ہوگا۔
pn اور 1 p بن جائے گا اگر میں n کے برابر ہے جو صرف 1 سے 2 کی طاقت pn 0 p تو میں اسے لکھنے دیتا ہوں مثال کے طور پر
کو مائنس 1 پر غور کرتا ہوں
ایک خاص صورت ہے جب کامیابی اور s ہو جائے گا اسی طرح آپ دوسری اقدار پر غور کر سکتے ہیں۔ n کو 2 سے تقسیم کرنے پر n تو وہ
کی x ناکامی کے امکانات ایک جیسے ہوتے ہیں اور اس صورت میں
سے مربع جڑ بن جاتا ہے ۔ اگلی کلاس میں میں اس پر n سے 4 ہو جاتا ہے اور معیاری انحراف n کا تغیر x سے 2 ہو جاتی ہے اور n توقع
تاکہ اس کا مطلب یہ ہے کہ ah غور کروں گا۔ مجرد تقسیم کی مختلف ایپلی کیشنز
سے ah discrete distribution اور کچھ دوسری binomial distribution توقعات کے تغیرات کا اندازہ بھی شامل ہے کہ
متعلق مختلف امکانات کا حساب کیسے لگایا جائے تاکہ میں آپ کو ان تقسیموں کے مسائل کے بارے میں کافی وقت گزاروں۔

Prutor@IITK