ہیلو
تو ہم تفریق مساوات پر سیریز کے آخری اور اختتامی لیکچر پر آتے ہیں لہذا آج کا لیکچر ہم کچھ مشکلات اور اختتام پر غور کریں گے یا شاید ایک سر ہے اگر آپ کو پسند ہے
تو آج ہم نے جن مسائل پر بات کی ہے وہ اس طرح ہوں گے۔ تفریق عدم مساوات کے کچھ استعمالات کی پیروی کرتا ہے لیکن یہ اس طرح سے بہت ملتا جلتا ہے جس طرح ہم نے لکیری تفریق مساوات کے ساتھ کام کیا تھا اور پھر انفرادیت کے نظریہ کی طرف م
توجہ ہوں گے لیکن ہم بالکل وہاں نہیں پہنچیں گے ہم انفرادیت کا نظریہ بیان نہیں کریں گے پینڈولم مساوات کو دوبارہ ہم نے شروع کیا۔ پینڈولم مساوات کو اخذ کرتے ہوئے لیکچر سیریز جو کہ وہ پہلی تفریق مساوات تھی جسے ہم نے اخذ کیا تھا اور ہم پینڈولم مساوات کو تھوڑا اور قریب سے دیکھ کر ختم کریں گے اور پھر چند اختتامی ریمارکس اور
کے y برابر dx بذریعہ dy تو آئیے شروع کرتے ہیں کہ تفریق عدم مساوات کو کیسے استعمال کیا جائے۔ اس تفریق مساوات کو دیکھیں 4.1
کے برابر 0 آپ دیکھیں گے تفریق مساوات ہے 4.1 ایک برنولی مساوات ہے یہ ایک برنولی مساوات y 0 کے ساتھ ابتدائی حالات x plus y
ہے اور 0 سے تقسیم کی y 0 مربع سے تقسیم کرنا چاہتے ہیں لیکن بدقسمتی سے آپ کیوں نہیں کر سکتے کیونکہ 0 کا y ہے اور اس لیے آپ اجازت نہیں ہے
تو آپ 4.1 کو کیسے حل کریں گے، آپ دیکھتے ہیں کہ 0 حل پہلے سے ہی ایک حل ہے مستقل حل 0 کو لے لو یہ تفریق مساوات کو پورا کرتا کو 0 کے برابر 4.1 میں پلگ کریں اور آپ ایک ہی وقت میں دیکھیں y ہے 0 کا مشتق 0 ہے اور دائیں ہاتھ کی طرف بھی 0 ہے۔ لہذا مستقل حل کو بھی پورا کرتا ہے۔ لیکن کیا ہم نے 4.1 کو مکمل طور پر حل کر لیا y گے کہ یہ ہے تفریق مساوات کا حل یہ 0 کے برابر 0 کی ابتدائی شرط کے کوئی اور حل نہیں ہیں، ہو سکتا ہے کہ اس کے علاوہ اور بھی ہوں۔ y 0 ہے، ہم کیسے جانتے ہیں کہ 0 کے برابر 0 کے 4.1 اطمینان بخش حل جو 4.1 کو پورا کرے گا ہم اس امکان کو کیسے رد کر سکتے ہیں کہ ہمیں ایک عمومی نظریہ کی ضرورت ہے کیا آپ ایک عمومی انفرادیت کا نظریہ ہے جو اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ صفر حل 4.1 کا واحد حل ہے اور وہاں موجود ہے کوئی دوسرا حل نہیں ہے لہذا آپ کو اس انتہائی آسان صورتحال میں پہلے سے ہی ایک عمومی انفرادیت کے نظریہ کی ضرورت نظر آتی ہے لہذا آئیے پہلے ہی لیکچر کی طرف واپس چلتے ہیں جہاں ہم نے تفریق عدم مساوات پر تبادلہ خیال کیا جہاں ہم نے تفریق مساوات کی کچھ شرائط کو دستک دیا اور ایک امتیازی عدم مساوات حاصل کی۔
جب ہم محدود وقت میں لامحدودیت سے فرار پر بات کر رہے تھے
مربع کی اصطلاح ہمیشہ مثبت ہوتی ہے y مربع y جمع xy برابر dx بذریعہ dy تو آئیے دیکھتے ہیں تفریق مساوات 4.1
مربع کی اصطلاح ہمیشہ مثبت ہوتی ہے y مربع y xy plus برابر dy by dx تو آئیے دیکھتے ہیں تفریق مساوات
مربع کی اصطلاح سے دور ہے y سے صفر سے بڑا یا برابر لکھ سکتے ہیں xy مائنس dx کو dy تو آئیے دیکھتے ہیں کہ ہم سے بڑا یا اس کے برابر ملا۔ اب ہم کیسے آگے بڑھیں؟ xy 0 مائنس dx بذریعہ dy تو تفریق مساوات سے مجھے تفریق عدم مساوات 4.2
فرض کریں کہ اگر 4.2 میں آپ عدم مساوات کے بجائے مساوات ہیں
تو 4.2 ایک لکیری تفریق مساوات ہوگی
مربع کو 2 دائیں سے ضرب دیں گے لیکن ایسا ہی کریں یہاں x سے ضرب مائنس e تو آپ اس صورت میں کیسے آگے بڑھیں گے آپ 4.2 کو سے ضرب e مربع 2 ہمیشہ مثبت ہے لہذا میں اچھی طرح سے 4.2 کو x کی طاقت مائنس e کوئی بات نہیں کہ یہ ایک عدم مساوات ہے لیکن کی x میں e سے y کے x ddx مربع کو 2 سے ضرب دے سکتا ہوں اور 4.2 کا بائیں ہاتھ ایک درست مشتق بن جاتا ہے یعنی x مائنس مربع 0 سے زیادہ یا اس کے برابر ہے جو کہ ظاہر شدہ سلائیڈ میں 4.3 ہے اچھی طرح سے اب ہمیں 4.3 کو ضم کرنا ہے ہمیں x طاقت مائنس کو انٹیگریٹ کرنا ہے 4.3
پر ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے ab کا ایک فنکشن ملا ہے جو وقفہ x تو آئیے آگے بڑھیں آپ کو درج ذیل صورتحال ملی آئیے دیکھتے ہیں آپ کو تک یقیناً غیر منفی ہے آپ اس پر مجھ سے اتفاق کریں گے کیوں کہ انٹیگرل کیا ہے b سے phi a کا انٹیگرل x dx پھر ہم کہہ سکتے ہیں کہ کے برابر 0 y اور b کے برابر ax کے برابر x کے درمیان phi کے x برابر y اٹوٹ ایریا اقوام متحدہ ہے۔ گراف کے نیچے کا رقبہ محور کے اوپر x کا گراف جھوٹ ہے phi کے pha x کا x لیکن یہ عدم مساوات آپ کو کیا بتاتی ہے عدم مساوات آپ کو بتاتی ہے کہ محور کے اوپر واقع ہے x گراف
تو گراف کے نیچے کا رقبہ ہمیشہ مثبت رہے گا اور آپ کو یہ ثابت کرنے کے لیے بس اتنا ہی کہنا ہوگا خاص طور پر اگر آپ کے پاس دو فنکشنز آن کے مقابلے میں یا اس کے برابر ہے gx پر ab زیادہ ہے وقفہ fx ہیں اور اگر gx اور fx
سے بڑا یا اس کے برابر ہوگا آپ کو یہ کیسے ملے گا آپ یہ پچھلے والے سے حاصل کریں integral a to bgx dx سے bfxdx تو مائنس جی لیں اور آپ کو یہ ایک ٹھیک ہو گیا sf کے برابر phi کے پچھلے والے میں صرف g مائنس f برابر لیں phi گے بس
تو آئیے اس کو لاگو کریں
تو آئیے ہم ان سلائیڈوں پر واپس جائیں جو آپ دیکھتے ہیں کہ آپ کو 4.3 ملا ہے
تک xi سے ds 0 تو میں کہتا ہوں کہ بائیں طرف کا انٹیگرل اس سے بڑا ہو گا یا دوسرے لفظ میں دائیں ہاتھ کی طرف ضم کرنے کے برابر تک 4.3 کے دونوں اطراف کو ضم کرنے جا رہا ہوں ٹھیک ہے x مشتق کا انٹیگرل میں 0 سے
تک دونوں اطراف کو ضم کرنے جا رہا ہوں جب آپ ایک مشتق کو انضمام کرتے ہیں x تو میں 0 سے
کا مربع 2 سے بڑا یا 0 کے x کا مربع مائنس xe کا y کا d dx تو آپ کیلکولس کا بنیادی تھیوری استعمال کرتے ہیں لہذا آپ کو مل گیا سے بڑا یا صفر کے برابر یقیناً قطعی انٹیگرل میں متغیر dt مربع دو t پاور مائنس xddt کا xddt of te برابر اس لیے انٹیگرل صفر تا ایک ڈمی متغیر ہے
سے پاور مائنس 0 مربع e کے 0 y مربع 2 مائنس x کی طاقت مائنس xe کے بنیادی تھیوریم کو استعمال کرتے ہیں y تو آئیے کیلکولس سے بڑا ہے یا اس کے برابر ہے e y کا x ہے 0 یاد رکھیں 0 تھا لہذا ہم حاصل کرتے ہیں y ضرب 2 0 سے بڑا یا اس کے برابر یہ 1 اور غیر ہے -منفی y کا x کا مربع 2 سے 0 جو 0 ہے۔ لہذا ہم نے نتیجہ اخذ کیا ہے کہ حل غیر منفی ہے ہم نے نتیجہ اخذ کیا ہے کہ x طاقت اصل میں صفر کے برابر ہے آئیے اب آگے بڑھتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ fx سے بڑا یا اس کے برابر ہے۔ اب ہم اسے دکھائیں گے۔ x 0 اگر مسلسل ہے اور اس لیے اگر اصل میں فنکشن کی ویلیو 0 ہے y صفر ہے اور y صفر کا
c تو فنکشن کی ویلیو کسی مخصوص حصے میں 1 سے کم ہونی چاہیے۔ 0 یعنی 0 سے
پہلے سے ہی غیر منفی y کا x ایک سے کم ہے اور y کا x ایک سے کم ہونا چاہئے اگر y کا x پر ہم جانتے ہیں کہ c تو وقفہ 0 سے تک y کے x مربع سے کم یا برابر ہونا چاہئے۔ y x ہے
مربع لیکن اب ہم y جمع xy برابر ہے dx بذریعہ dy تو آئیے ہم تفریق مساوات پر واپس چلتے ہیں کہ تفریق مساوات کیا ہے کہتے ہیں کہ سے کم y مربع 4.1 سے y سے کم ہونے والا ہے لہذا اب اس عدم مساوات کو استعمال کرتے ہیں۔ لہذا چونکہ y مربع y نے دیکھا ہے کہ سے کم یا مساوی ہے، اس لیے دوبارہ وہی چیز دوبارہ y جمع 1 x کے ٹکڑے پر c سے 0 dx بذریعہ dy ہے ، ہمیں تفریق عدم مساوات آپ تفریق مساوات y کریں جیسے آپ تفریق مساوات کو حل کر رہے ہیں۔ آگے بڑھیں گویا آپ لکیری تفریق مساوات کا نام حل کرنے جا رہے ہیں۔

جمع 1 اور پھر آپ بالکل اسی طرح نتیجہ اخذ کریں x کیا ہے اس معاملے میں مائنس px میں pxdx سے ضرب لگاتے ہیں پاور انٹیگرل e کو
اس y کا x صفر سے کم یا اس کے برابر ہے اور اس طرح ہم دونوں کو ملاتے ہیں۔ دیکھیں کہ y کا x گے جیسا کہ ہم نے ابھی آگے بڑھایا
c یکساں طور پر صفر سے y کا x پر یکساں طور پر صفر ہونا چاہئے لیکن اب ہم یہ دکھانا چاہتے ہیں کہ نہ صرف c ٹکڑے پر صفر سے
کے ٹکڑے پر صفر ہونا چاہئے اسے ہر جگہ 0 ہونا چاہئے جو آپ حقیقت میں دکھا سکتے ہیں ۔ 0 ہر جگہ تضاد سے آگے بڑھیں فرض کریں کہ یہ
ایک خاص وقفہ تک 0 ہے جس کے بعد یہ مثبت ہو جاتا ہے
تو پھر تضاد پر پہنچنے کی کوشش کریں اگر آپ اس ثبوت پر کام کر رہے ہیں
تو قدرے محتاط رہیں
تو اب میں آپ کو ایک دو مشقیں دیتا ہوں اسی آئیڈیا کو آزمائیں۔ ان دو تفریق مساوا
توں پر جو آپ سلائیڈ میں دیکھتے ہیں کہ کچھ شرائط کو دستک دینے اور آگے بڑھنے کا ایک ہی خیال ہے لہذا میں نے تفصیل سے ایک مثال تیار کی
میں 1 جمع y کے برابر y برابر dx بذریعہ dy مساواتیں ہیں l اور میں آپ سے دو دیگر کو آزمانے کے لیے کہہ رہا ہوں تاکہ دو فرق
ان دونوں تفریق مساوا x میں طاقت 3 جمع سائن مربع y سے y برابر ہے dx بذریعہ dy مکعب کا مربع جڑ دوسرا ایک x
توں کے لیے 0 کی 0 ہے۔ اور
تو معائنہ کے ذریعہ آپ دیکھتے ہیں کہ 0 ایک حل ہے جسے آپ کو قائم کرنے کی ضرورت ہے کہ یہ واحد حل ہے لہذا آگے بڑھیں جیسا کہ میں
نے پچھلی مشق میں اشارہ کیا تھا لہذا اس مشق کا کیا فائدہ ہے اس سے زیادہ آسان اور براہ راست نقطہ نظر نہیں ہے۔ اس نتیجے پر پہنچنے کے
مربع سے تقسیم کرنا پڑتا ہے جیسا کہ یہ برنولی مساوات میں ہوا y یا y لیے جب بھی آپ کو ایسی صورتحال کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں آپ کو
کا 0 برابر 0 کیا ہم ہر بار اس رگمارول سے گزر رہے ہیں آپ کو درحقیقت ایک عمومی انفرادیت تھیوریم y ہے اور ابتدائی حالت بتاتی ہے کہ
جنرل انفرادیت تھیوریم کی ضرورت ہے جسے براہ راست شیلف سے استعمال کیا جا سکتا ہے آپ انفرادیت تھیوریم کو منتخب کرتے ہیں اس طرح
تھیوریمز queness کی انفرادیت تھیوریم کو ثابت کرنے کی اہمیت اب ہم پر آہستہ آہستہ آ رہی ہے اور ہم اس طرح کو کیسے ثابت کریں گے
میں وہ نکتہ جو میں بنانا چاہتا ہوں وہ یہ ہے کہ یہ مثالیں جن پر ہم نے ابھی کام کیا ہے وہ استدلال کے بجائے مخصوص نمونے ہیں جو آپ کو
انفرادیت کے نظریہ کا ثبوت دیں گے کہ تفریق عدم مساوات کو حاصل کرنا ہے اور پھر بالکل اسی طرح آگے بڑھنا ہے جیسے ہم ایک حل کرتے
ہیں۔ لکیری تفریق مساوات اور ہم عام وجودی تھیوریم کو ثابت نہیں کریں گے لیکن کلیدی جزو مندرجہ ذیل سلائیڈ میں خیالات ہیں لہذا فرض کریں کہ
عدم a to t fsds انٹیگرل b سے کم یا اس کے برابر ہے۔ پلس a f کا t پر ایک غیر منفی فعل ہے اس طرح کہ ab وقفہ f کا t
غیر منفی ہے f مستقل ہیں اور b اور a مساوات 4.4 جو کہ ایک مفروضہ ہے
مائنس اس ثبوت کا ایک تصور بالکل اسی طرح 4.4 t ضرب b اس سے کم یا اس کے برابر f کا t تو نتیجہ 4.5 عدم مساوات ہے یعنی
f ہے پھر دیکھیں کہ لٹل tfsds سے a انٹیگرل b کا ایک جمع t کا f کا کیپٹل f کا کیپٹل t کے دائیں ہاتھ کی طرف کال کریں کیونکہ
4.7 a پر کیا گیا سرمایہ a کا اندازہ تھوڑا f اور کیپٹل f سے کیپٹل al اس سے کم یا برابر ہے f سے کم یا مساوی ہے لٹل f کیپٹل
کو فرق df کے برابر 4.6 dt کیا ملے گا آپ bf برابر dt بذریعہ df ہے آپ آگے کیا کریں گے فرق کریں 4.6 فرق کریں 4.6 آپ کو
گنا b اس سے کم یا اس کے برابر ہے f گنا تھوڑا b لیکن f گنا تھوڑا b کرنے کے لیے کیلکولس کا ایک بنیادی تھیوری استعمال کرتے ہیں
آپ کو تفریق عدم مساوات ملی ہے آپ بالکل اسی طرح آگے بڑھیں گے جیسے آپ لکیری مساوات کے ساتھ کرتے ہیں تفریق مساوات کو f کیپٹل
کے t کا t کے برابر ہوتا ہے اور پھر اسے اپنے انٹیگرل میں شامل کریں آپ کو a سرمایہ a کا تھوڑا af سے ضرب کریں e
سے تھوڑا کم یا اس کے برابر ہے جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں a مائنس t میں b ایکسپونینشل میں مائنس
تو اس مشق کا ثبوت یہ ہے اس چھوٹے سے نتیجہ کا ثبوت بالکل اسی طرز کی پیروی کرتا ہے اور یہ انفرادیت کے نظریہ کے ثبوت میں ایک اہم
جزو ہے لہذا اب ہم اس لیکچر سیریز کے اگلے حصے اور اس کے آخری حصے کی طرف بڑھیں گے۔ یہ ایک لیکچر سیریز ہے پینڈولم ہے سکونی
کے ساتھ جھومتا رہتا ہے اور وقت کے ناقابل تسخیر مارچ کو وقفے وقفے سے جھولتا رہتا ہے اس لیے پینڈولم جھولتا رہتا ہے اور یہ نشان لگاتا ہے
کہ یہ آپ کے لیے وقت کے وقفہ کو کیلیبریٹ کرتا ہے
برابر 0 کے برابر جو کہ مساوات y سائن g overl مربع پلس dt بذریعہ d2y تو آئیے واپس جائیں اور یاد کریں کہ پینڈولم کی مساوات
4.9 کو 4.9 ہم اس مساوات کو dy سے ضرب دیتے ہیں کیا ہوتا ہے آپ dt کے فیکٹر سے dy ہے اب ہم یہ کرتے ہیں کہ dy کو d 2 y
مربع میں حاصل کرتے ہیں ٹھیک ہے dt سے
ڈبل ڈیش کیا ہے آپ کو کیا ملے گا اگر y ڈیش y ڈبل ڈیش ملے گا 2 y ڈیش y تو 2 تھرو کے فیکٹر میں پھینک دیں 2 کے فیکٹر میں آپ کو 2
ڈیش اسکوائر میں فرق کرتے ہیں y ڈیش اسکوائر میں فرق کرتے ہیں اگر آپ y آپ
ڈیش میں کیسے حاصل کرتے ہیں آپ y کو y ڈیش میں دیکھیں آپ سائن y کو y ڈبل ملے گا ڈیش اگلی ٹرم سائن y ڈیش y تو آپ کو 2
کا فرق کرتے ہیں cos کو فرق کرتے ہیں اگر آپ مائنس cos y مائنس
ڈیش میں ملیں گے y کو sine y تو آپ بالکل
پرائم سے ضرب دیتے y جب آپ مساوات 4.9 کو e پرائم کی طرف سے y تو کیا ہوتا ہے جب آپ تفریق مساوات 4.9 کو ضرب دیں گے
ہیں
پوری مربع dt کی سلائیڈ میں dy کی d dt تو مساوات کا بائیں ہاتھ ایک عین مشتق بن جاتا ہے جو بالکل وہی ہے جو آپ اگلی ڈسپلے میں
2 مائنس g بذریعہ l cosine y 0 ہے.
پھر سے میں انضمام کے مستقل کے dt 2 مربع مائنس g بذریعہ l cosine y equals e تک پورا مربع مائنس تو اس کو انضمام کریں اور آپ کو
کا استعمال کرتا ہوں اس کی واضح وجہ ہے کہ 4.10 میں ان اصطلاحات کی نشاندہی کریں جو حرکی e لیے حرف
اسکوائر کسی نہ کسی طرح حرکی dt بذریعہ dy توانائی کی نمائندگی کرتی ہیں۔ اور پوٹینشل انرجی پہلی اصطلاح
توانائی سے متعلق ہے اور دوسری اصطلاح کسی نہ کسی طرح ممکنہ
توانائی سے متعلق ہے آپ کو اسے کسی مستقل سے ضرب کرنا پڑ سکتا ہے آپ کو ایک مخصوص مستقل کو جوڑنا پڑے گا حوالہ پوٹینشل لیکن
بنیادی طور پر مساوات 4.10
توانائی کے تحفظ کے قانون کو بیان کرتی ہے اور ہم مساوات 4.10 کو
توانائی کی مساوات کے طور پر حوالہ دینے جا رہے ہیں جسے ہم
c جہاں c توانائی کی مساوات کہنے جا رہے ہیں ٹھیک ہے اب ہم ابتدائی لکھتے ہیں۔ 0 کی شرائط 0 کے 0 کے برابر اور 0 کا پرائم 0 کے برابر
کے ساتھ ابتدائی c ایک مثبت مستقل ہے اس کا کیا مطلب ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ پنڈولم اوسط پوزیشن سے شروع ہوتا ہے ایک کونیی رفتار
کے ساتھ آپ جو دھکا دیتے ہیں اوسط پوزیشن سے پینڈولم کی طرف ہلکا سا دھکا لگائیں اور پینڈولم دوڑنے لگتا ہے ان ابتدائی حالات c کونیی رفتار
کو
توانائی کی مساوات میں شامل کریں ٹھیک ہے آپ کو
صفر کے t جب وقت cos y اور c صفر ہے t پر dt بذریعہ dy توانائی کی مساوات 4.10 پوٹ ٹی برابر 0 پوٹ ٹی برابر صفر

ہوتا ہے جو ایک ہے cos zero برابر ہوتا ہے
e برابر g by l مربع مائنس c 2 تو چار پوائنٹ دس کو صرف پڑھا جاتا ہے
یہی میں کہہ رہا ہوں g by l مربع مائنس c 2 ہے e تو
تو ٹھیک ہے 4.10
سے بدل دیا گیا ہے لہذا اگلا کام یہ ہوگا کہ کوزائن اصطلاح کو دائیں l اسکوائرڈ مائنس 2 جی بذریعہ c توانائی کی مساوات کے ہاتھ کی طرف
تک ختم ہو جائے گا۔ پورا مربع برابر dt ہاتھ کی طرف لے جانا ہے اگر آپ مساوات 4.12 میں کوزائن اصطلاح کو دائیں ہاتھ کی طرف لیتے ہیں۔
y by 2. مربع sine ہے 2 cos y اب مثلث کی شناخت 1 مائنس cos y میں 1 مائنس g by l مربع مائنس c 2 ہے
بذریعہ 2 مساوات 4.13 اب آپ مساوات 4.13 کو دیکھ سکتے y مربع sine l مربع مائنس 4 جی پر c تک پورا مربع برابر dt تو آپ کو
ہیں اور آپ خوش ہوں گے کیونکہ آپ کو پہلا آرڈر تفریق مساوات مساوات 4.13 پہلی ترتیب تفریق مساوات ہے ہماری فوری تحریک مربع جڑ کو
اور یہ ایک متغیر الگ کرنے والی y by 2 مربع g by l sine مربع مائنس c 4 کہے گی۔ برابر مربع جڑ dt بذریعہ dy لے کر
مساوات ہے ہمیں بہت خوشی ہے کہ ہم متغیرات کو الگ کر سکتے ہیں اور ہم انضمام کرنے جا رہے ہیں ٹھیک ہے آپ ایسا کریں کہ آپ انٹیگرل میں
چلے جائیں گے کہ آپ حساب نہیں کر سکتے اور وہ انٹیگرل بیضوی انٹیگرل ہے لہٰذا بیضوی انٹیگرل جس کا میں نے چند لیکچرز پہلے ذکر کیا تھا
سائن l ہے ریڈ مائنس 4 جی بذریعہ c squa تک پورا مربع برابر dt پینڈولم مساوات کے سلسلے میں یہاں ظاہر ہوتا ہے لہذا ہمارے پاس
ہے جو مثبت ہے اس وقت مشتق جو 0 کے برابر ہے مثبت ہے آئیے ہم دونوں طرف 4.13 کا c ڈاٹ y بذریعہ 2. لہذا چونکہ 0 کا y اسکوائرڈ
y by 2 مربع g by l sine مربع مائنس c 4 برابر ہے مربع جڑ dt بذریعہ ڈائی حاصل کرتے ہیں۔ dy مثبت مربع جڑ لیں اور ہم
c جسے 4.13 پرائم کہا گیا ہے 4.13 پرائم ایک متغیر الگ ہونے والی مساوات ہے اور ہم معمول کے مطابق آگے بڑھتے ہیں ہم 4.13 پرائم کو
کے حوالے سے ضم t بذریعہ 2 اور پھر دونوں اطراف کو y سائن اسکوائر l مربع مائنس 4 جی کے مربع جڑ سے تقسیم کرتے ہیں۔ بذریعہ
کا 0 برابر 0 کے۔ y کے وقفہ سے یہ نوٹ کرتے ہوئے کہ t کریں 0 سے
اب ہم سائن t بذریعہ 2 برابر y سائن مربع l بذریعہ g ملے گا۔ ydy مربع مائنس 4 کے مربع جڑ سے 0 سے c تو ہمیں کیا ملے گا ہمیں
مربع اور u بذریعہ مربع جڑ 1 مائنس du برابر 2 dy یا du مساوی dy کا نصف حصہ cos y 2 ڈالتے ہیں ہمیں u بذریعہ 2 برابر y
i nto مربع u مربع k تقسیم 1 مائنس du بذریعہ y 2 انٹیگرل 0 سے سائن c برابر 2 پر t آخری میں انٹیگرل سلائیڈ بدل جاتی ہے
اسکوائرڈ یہ آخری ظاہر کردہ انٹیگرل ایک بیضوی انٹیگرل ہے لہذا ہم قدرتی طور پر پینڈولم مساوات کے مطالعہ میں بیضوی انٹیگرل 1 minus u
کی طرف لے جاتے ہیں کیونکہ ہم بیضوی انٹیگرلز کا مطالعہ نہیں کر سکتے ہیں ہمیں تحقیقات کی اس لائن کو ترک کرنا ہوگا اور ہمیں مکمل طور پر
مکمل طور پر اپنانا ہوگا۔ متغیرات کی علیحدگی کے طریقہ سے اس 4.13 کو حل کرنے کی کوئی بھی کوشش آپ کو پریشانی میں ڈال دے گی اب
ہم اس بیضوی انضمام کو چھوڑیں گے اور تفریق مساوات کو حل کیے بغیر حل کے معیار کے رویے کو سمجھنے کی کوشش کریں گے یاد رکھیں
کہ ہم نے دیکھا ہے۔ یہ ماضی میں تفریق مساوات کا خیال یہ ہے کہ ہمیں تفریق مساوات کو واضح طور پر حل کیے بغیر حل کے بارے میں
مربع 4 c ہم فرض کریں کہ l سے بڑا ہے بذریعہ g مربع 4 c معلومات حاصل کرنے کی کوشش کرنی چاہیے لہذا ہم فرض کریں گے کہ
c اور 4.13 کے دائیں ہاتھ کی طرف دیکھیں 4.13 کے دائیں ہاتھ کی طرف کبھی بھی 0 نہیں بن سکتا کیونکہ اگر g by l سے بڑا ہے۔
squ ared 4 g by l سے بڑا ہے کیونکہ سائن مائنس 1 اور 1 کے درمیان ہے 4.13 کے دائیں ہاتھ کی طرف ظاہر ہے کہ کبھی صفر
کو ہمیشہ وہی نشان رکھنا چاہیے اسے ہمیشہ مثبت ہونا چاہیے یا یہ ہمیشہ منفی ہونا dy کے ذریعے مشتق dt نہیں ہوتا ہے اور اس لیے
چاہیے۔ اور ابتدائی طور پر 4.11 کو دیکھیں مشتق ابتدائی طور پر مثبت تھا لہذا یہ ہمیشہ کے لئے مثبت ہونا چاہئے لہذا مشتق ہمیشہ مثبت ہے اس
کے حوالے سے بھی مونوٹون بڑھ رہا ہے t وقت کا ایک مونوٹون بڑھتا ہوا فنکشن ہونا چاہئے اور فنکشن سفید y کا t کا مطلب یہ ہے کہ
کا بینڈ سائیڈ ہم 4.13 پر واپس چلتے ہیں جو سب سے کم ہیں جو 4.13 سب سے کم بن سکتے ہیں جو 4.13 کا دائیں ہاتھ کی طرف 4.13
g مربع مائنس c 4 کا دائیں ہاتھ کم سے کم ہوتا ہے جب سائن فیکٹر 1 ہو اور 4.13 4.13 g by l مربع مائنس c 4 حاصل ہوتا ہے
مثبت ہے کہتے ہیں اسے مربع کہتے ہیں l بذریعہ
کو مربع کے طور پر ڈالتے ہیں l مربع مائنس 4 جی بذریعہ c تو ہم کیا دیکھتے ہیں اگر آپ
سے بڑا یا اس کے برابر ہونا چاہیے۔ a ہمیشہ dy by dt تو ہم دیکھتے ہیں کہ
پر سے زیادہ یا اس کے برابر نہ صرف وقت کے ساتھ بڑھتا ہوا ایک رنگ ہے بلکہ کم از کم 80 y کے اتنے t بڑا ہونا چاہیے۔ y of t تو
جتنی تیزی سے بڑھ رہا ہے یہ 80 سے بڑا یا اس کے برابر ہے اور اس طرح جیسے جیسے وقت آگے بڑھتا ہے زاویہ بڑھتا ہی چلا جاتا ہے اور
سے یہ pi تک جائے گا اور پھر 2 pi یہ انفینٹی لیکن یہ ایک زاویہ ہے یاد رکھیں کہ پینڈولم جھول رہا ہے اور اس طرح پہلے زاویہ 0 سے 2
اتنا بڑا ہے کہ پینڈولم c تک جائے گا تاکہ یہ کیا کہہ رہا ہے کہ پینڈولم پرفارم کر رہا ہے۔ سرکلر حرکتیں اس لیے پینڈولم 4 pi 6 x 8 pi
میں جاتا pi سے 4 pi اوپر جاتا ہے دائرے کو مکمل کرتا ہے اور یہ سرکلر حرکت کرتا رہتا ہے اس لیے ایک سرکٹ کے بعد زاویہ وقفہ 2
سے بڑا ہے g x l اسکوائر 4 c اور اسی طرح اگر pi سے 6 pi ہے دوسرے سرکٹ کے بعد یہ وقفہ میں چلا جاتا ہے۔ 4
تو پینڈولم میں بہت زیادہ
سے کم ہو g x l مربع 4 c توانائی ہے یہ سرکلر حرکتیں کرنا شروع کر دیتا ہے آگے آئیے دیکھتے ہیں کہ اگر
کے ذریعہ زاویائی dt میں آپ کو کچھ بہت آسان بتانے جا رہا ہوں۔ ای کیلکولس کی مشقوں سے پتہ چلتا ہے کہ i تو کیا ہوتا ہے اور یہاں
کو کسی وقت زیادہ سے زیادہ حاصل کرنا ضروری ہے کہ خاص زیادہ سے زیادہ قدر پینڈولم کا yt رفتار کا کسی وقت 0 ہونا ضروری ہے اور
طول و عرض ہوگا اور جس وقت یہ ہوتا ہے ایک چوتھائی مدت اور اس طرح پینڈولم کی مدت 4 گنا ہوگی کوئی بات نہیں اب فرض کریں کہ فرض
نہ کریں ایسا نہیں ہوتا ہے اس کا مطلب ہے کہ مشتق کبھی 0 نہیں ہوتا ہے
تو پھر کیا ہوگا اگر مشتق کبھی 0 نہیں ہے
تک نہیں پہنچ سکتا کیونکہ اگر pi y کا t ایک ہی ہونا ضروری ہے پہلے کی طرح بڑھتا جا رہا ہے لیکن اس بار t کا y تو پھر t کا y
تک پہنچ جاتا ہے pi
بذریعہ 2 اور سائن پائی بذریعہ 2 ہو جائے گا اور پھر pi بذریعہ 2 y بذریعہ 2 اس خاص مقام پر 1 ہو جائے گا کیونکہ y تو سائن اسکوائرڈ
سے کم ہے یاد رہے کہ 4.13 کا دائیں ہاتھ g by l مربع 4 c ہو جائے گا لیکن g by l مربع مائنس c 4 کا دائیں ہاتھ کی طرف 4.13
کی طرف منفی ہو گیا ہے لیکن بائیں ہاتھ کی طرف ایک مربع ہے اور یہ ایک تضاد ہے لہذا ایسا نہیں ہو سکتا ایسا ہوتا ہے پینڈولم کا زاویہ t کا y
کے قریب نہیں آتا ہے لہذا اس pi یک سنگی بڑھ رہا ہے اور یہ کہیں بھی y کا t تک نہیں پہنچ سکتا لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ pi کبھی بھی
لامحدودیت کی طرف جاتا ہے یاد رکھیں ایک t تک جانا ضروری ہے۔ ایک حد الفا جیسا کہ y کی لامحدودیت t کی کچھ حد ہونی چاہئے کیونکہ
مونوٹون بڑھنے والے فنکشن کو یا
سے کم ہونا چاہئے pi نہیں ہوسکتی ہے اور اس لئے اسے pi تو لامحدودیت پر جانا چاہئے یا اس کی ایک محدود حد ہونی چاہئے یہ محدود حد
مربع ہے وہ ہے dt بذریعہ dy جو ہم نے دیکھا ہے لیکن اب تفریق مساوات خود کہتا ہے کہ مشتق کی پھر ایک حد ہونی چاہیے کیونکہ جو مشتق
c 4 مربع مائنس g by l sine مربع y by 2 y کی ایک حد ہے

کی ایک حد ہے لہذا اس کے دائیں ہاتھ کی طرف 4.13 کی ایک حد ہوتی ہے دوسرے لفظوں میں مشتق مربع کی ایک y by 2 مربع sine تو
مربع کی ایک حد ہوتی ہے dy by dt حد ہوتی ہے
کی ایک حد ہوتی ہے کیونکہ یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اس لیے آپ کو ایسی صورت حال ملی ہے جہاں آپ کو ایک فنکشن ملا ہے جو dy by dt تو
حد تک جاتا ہے۔ اور مشتق کی بھی ایک حد ہوتی ہے لیکن سوچو ہندسی طور پر ایک فنکشن کے بارے میں سوچیں جو ایک حد تک طے کرتا ہے جیسا
لامحدودیت پر جاتا ہے جس کا مطلب ہے کہ گراف چاپلوس اور چاپلوس ہوتا جارہا ہے لہذا ہم t کہ
توقع کرتے ہیں کہ آپ
توقع کرتے ہیں کہ مشتق اگر اس کی حد ہے
کی محدود حد ہوتی ہے t پرائم f اور f کے t ایک قابل تفریق فعل ہے جیسا کہ t کی f تو اسے صفر ہونا چاہئے بالکل ایسا ہی ہے اگر
انفینٹی تک جاتا ہے t کیونکہ
کی ایک حد ہے بنیادی f کی t تو مشتق کو لازمی طور پر صفر پر جانا چاہئے میں صرف آپ کو ہندسی طور پر اس کی وضاحت کرتا ہوں کیونکہ
طور پر اس کا مطلب ہے کہ گراف بن رہا ہے۔ افقی طور پر یہ چاپلوس اور چاپلوس ہوتا جا رہا ہے اور اس لیے مشتق اگر اس کی کوئی حد ہے
تو یہ حقیقت میں صفر ہونا چاہیے لیکن کیا آپ اسے کیلکولس کا استعمال کرتے ہوئے سختی سے ثابت کر سکتے ہیں، میں تجویز کرتا ہوں کہ آپ
اسے اوسط قدر کے تھیورم کا استعمال کرتے ہوئے کریں، آئیے جیومیٹریکل پر انحصار کرنے کی بجائے اوسط کا اطلاق کریں انترجشتھان آئیے ہم
اسے سخت استدلال کے ساتھ بیک اپ کرتے ہیں آئیے وقفہ ٹی کوما ٹی پلس 1 ایف کے ٹی پلس 1 مائنس ایف پر لگرینج کا اوسط قدر کا نظریہ لاگو
c t کو لامحدودیت پر جانے دیں ، اوسط قدر کے تھیوریم میں t جمع 1 کے درمیان لیکن t اور t کے لئے ہونے والا ہے۔ c کریں کچھ
جمع 1 کی t بھی انفینٹی میں جاتا ہے اور اس طرح ہمارے پاس c انفینٹی میں جاتا ہے t جمع 1 کے درمیان ہے اس لیے جیسے کیپٹل t اور
l کی ایک حد ہے f بائیں ہاتھ کی طرف 0 پر جاتا ہے ہم جانتے ہیں کیونکہ c پرائم f برابر t کا f ہے۔ مائنس f مساوات
کا جاتا ہے t کے l جمع 1 جاتا ہے f کا t تو
کو صفر پر جانا چاہئے لہذا مشتق لازمی طور پر صفر پر c پرائم f کا جاتا ہے 0 لہذا دائیں ہاتھ کی طرف f t جمع 1 مائنس f t کا t تو
کا طول و t جانا چاہئے لہذا ہمیں اس کو سمجھنے کے دو مختلف طریقے بتائے گئے ہیں لہذا اب پینڈولم کی طرف واپس آتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ
y prime t کے قریب کہیں بھی نہیں آسکتا ہے اس کی ایک محدود حد ہونی چاہیے اس صورت میں مشتق pi عرض مونوٹون بڑھ رہا ہے۔ یہ
انفینٹی میں جاتا ہے t کو 0 پر جانا چاہیے کیونکہ
پرائم کی ایک حد y کے t سے کم ہے اور pi محدود حد الفا جو a کی طرف جاتا ہے y کی لامحدودیت t تو ہمارے پاس کیا ہے جو کہ
y سائن l آن g ڈبل پرائم پلس y ہے اور یہ حد جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے 0 ہے۔ اب کہاں کریں ہم یہاں سے جاتے ہیں مشاہدہ کرتے ہیں کہ
y برابر 0 ہمیں بتاتی ہے کہ y سائن l آن g ڈبل پرائم پلس y پرائم کی ایک حد ہے اور اس طرح یہ مساوات y کی ایک حد ہے y 0. اب
ڈبل پرائم لازمی طور پر صفر پر y لامحدودیت کی طرف جاتا ہے لیکن کیلکولس لیما کو اب ہمیں بتانا چاہیے کہ t ڈبل پرائم ہے ایک حد جیسا کہ
کی حد صفر ہونی چاہیے جس کا مطلب ہے کہ الفا صفر ہونا چاہیے y کی t جانا چاہیے اور اس لیے پینڈولم مساوات ہمیں دوبارہ بتائے گی کہ
لیکن پھر اس کا مطلب ہے کہ پینڈولم ساکن ہے یہ بالکل بھی نہیں جھول رہا ہے اور یہ ایک تضاد ہے
تو اب بتائیں کہ آخری مشق میں پوائنٹ ٹی ناٹ کیوں مقامی زیادہ سے زیادہ ہونا چاہیے یہ آسان ہے کہ پہلا مشتق 0 ہے۔ لیکن دوسرا مشتق کیا ہے
ہے 0 y سائن l ڈبل پرائم پلس جی اوور y پینڈولم کی اصل مساوات پر واپس جائیں
ہے جو منفی ہو گا لہذا دوسرا مشتق منفی ہے لہذا یہ ایک نقطہ ہے مقامی زیادہ سے زیادہ ہے y سائن l سے زیادہ g ڈبل پرائم مائنس y تو
لہذا پینڈولم جھولنے لگتا ہے یہ زیادہ سے زیادہ تک پہنچ جاتا ہے اور پھر اسے واپس جھولنا پڑتا ہے کیونکہ یہ اس سے آگے نہیں جا سکتا اور
پھر کوئی یہ بحث کر سکتا ہے کہ اس کی کم از کم قدر ہونی چاہیے لیکن کیا چیز زیادہ سے زیادہ قدر کو کچھ اور کم سے کم قدر کو کچھ اور ہونے
سے روکتی ہے
تو زیادہ سے زیادہ قدر 60 ڈگری کہا جا سکتا ہے شاید کم از کم قدر مائنس ہے کیا مجھے معلوم ہے کہ میں کیسے جان سکتا ہوں کہ یہ اسی مقدار
میں دائیں طرف جھومتا ہے جیسا کہ یہ بائیں طرف ہوتا ہے مسئلہ نمبر پانچ پر نظر ڈالیں مسئلہ نمبر پانچ آپ کو بتاتا ہے کہ کس حد تک یہ دائیں
صفر ہے اور اس لئے حل ایک y طرف جاتا ہے وہی ہے جس حد تک یہ بائیں طرف جاتا ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے کہا ہے کہ صفر کا
انفرادیت کا نظریہ جسے ہم evasive عجیب فعل ہونا چاہئے یہاں ہم انفرادیت کے نظریہ کی اپیل کرتے ہیں جو ہم ثابت نہیں ہوئے ہیں۔
انفرادیت تھیوریم کا استعمال کیے بغیر ورزش 6 کو بھی حل کر سکتے ہیں ذرا مختلف طریقے سے آئیے دیکھتے ہیں کہ ہم
توانائی کی مساوات کا استعمال کرتے ہیں ٹھیک ہے
مائنس بیٹا ہے لہذا ampl itude تو فرض کریں کہ زیادہ سے زیادہ طول و عرض الفا ہے اور کم از کم
2۔ لیکن بائیں ہاتھ کی طرف 0 ہے y by سائن اسکوائر l پر gمربع مائنس c 4 پورا مربع برابر dy by dt توانائی کی مساوات کو دیکھیں
پر gاسکوائر برابر c 4 قدر الفا یا مائنس بیٹا لیتا ہے کیونکہ الفا زیادہ سے زیادہ ہے۔ اور مائنس بیٹا ایک کم از کم ہے اور اس لیے ہمیں y جب
سائن اسکوائر بیٹا 2 کے برابر ہوتا ہے۔ لہذا ان دو چیزوں کو مساوی کرنے سے l پر gمربع برابر c 4 سائن اسکوائرڈ الفا 2 کے برابر اور l
جس سے ہم مائنس بیٹا کے برابر الفا نکالتے ہیں جو مسئلہ نمبر 6 کی بحث کو مکمل کرتا beta by 2 ہمیں سائن اسکوائر الفا بذریعہ 2 ملے گا۔
سے کم ہے g سے 4 l مربع c ہے جو کہ آپ کو بتاتا ہے کہ اگر
تو پینڈولم دوغلی حرکت دکھاتا ہے یہ دائیں طرف جاتا ہے اور پھر یہ واپس آتا ہے اور اس میں کم از کم ہوتا ہے اور یہ دوبارہ آگے بڑھنا شروع کر
سے بڑا ہوتا ہے gسے 4 l مربع c دیتا ہے اور اس میں دوغلی حرکت ہوتی ہے جب کہ اگر
تو یہ سرکلر حرکات کو انجام دیتا ہے
کیا یہ ہے کہ پینڈولم کو ہمیشہ کے l مربع برابر 4 جی بذریعہ c ہوتا ہے اگر g by l wha t مربع برابر c 4 تو اہم قدر پر کیا ہوتا ہے
ہمیں اس کی تحقیق کرنی چاہیے اور دیکھنا چاہیے کہ کیا ایسا ہوتا ہے اس نازک pi لیے سب سے اوپر تک پہنچنے کے لیے وقت لگتا ہے زاویہ
ہم واحد طور پر خوش قسمت ہیں کہ ہم حقیقت میں تفریق مساوات کے انضمام کو l مربع چار جی کے برابر ہوتا ہے بذریعہ c صورت میں جب
مکمل کر سکتے ہیں
تو آئیے دیکھتے ہیں کہ اسے کیسے کرنا ہے
l مربع برابر 4 جی بذریعہ c تو یاد رکھیں
کو کامن لیا جا سکتا ہے اور ہمیں ایک مائنس l چار جی بذریعہ l مربع برابر چار جی بذریعہ c تو مساوات پر واپس جائیں چار پوائنٹ ایک تین
بذریعہ دو ہے لہذا مساوات 4.13 نازک صورت میں بہت آسان بناتی ہے لہذا ہمیں y بذریعہ دو ملتا ہے جو کہ کوزائن مربع y مربع sin
y کا t naught بذریعہ 2۔ اب مشاہدہ کریں کہ اگر y مربع cos ملتا ہے۔ g by l پورا مربع برابر 4 dt بذریعہ dy مساوات 4.14
t ہونا چاہئے اور pi کا y t naught آخری مساوات کا دائیں ہاتھ آپ کو بتائے گا کہ t naught پرائم 0 کے برابر کسی محدود وقت پر
بھی پینڈولم کی مساوات y of t identically pi فنکشن const ant پرائم ہونا چاہئے۔ 0 ہو لیکن نوٹ کریں کہ y کا naught
کو مطمئن کرتا ہے اور یہ ابتدائی حالات 4.15 کو بھی پورا کرتا ہے اور اس طرح ایک بار پھر غیر معمولی انفرادیت کا نظریہ جس کا ہم نے بیان

بھی نہیں کیا ہے اس کے لیے اپیل کی جا سکتی ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ ہمارا حل مستقل حل تھا لیکن یہ ہے ایسا نہیں ہے کیونکہ اگر یہ ایک مستقل حل ہے
کبھی ختم نہیں t پرائم y ہے لہذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ l جی بذریعہ c 4 تو مشتق کا 0 ہونا ضروری ہے ہم فرض کر رہے ہیں کہ ہوتا ہے اور ہم 4.14 کے دونوں اطراف کا مثبت مربع جڑ لے سکتے ہیں۔ ہمارے پاس اہم کیس کے لیے درج ذیل متغیر الگ کرنے والی مساوات ہے کا 0 برابر 0۔ y اور l cos y by 2 بذریعہ g دو بار جڑ کے برابر dt بذریعہ dy
تو آئیے ہم متغیرات کو الگ کر کے مساوات 4.16 کو حل کرنے کی کوشش کریں
بذریعہ y بذریعہ 2 پلس ٹین y بذریعہ لائیں 2 بائیں طرف اور انٹیگریٹ کریں آپ کو لاگ سیکنٹ پلس ٹین ملے گا آپ کو لاگ سیکنٹ cos y تو اور صرف سادگی کے s آپ اسے صرف lt سے ظاہر کریں کہ روٹ جی بذریعہ s دائیں ہاتھ کی طرف کو lt ملے گا جڑ جی بذریعہ 2 بذریعہ 2 ڈالتے ہیں y لیے آپ تھیٹا کے برابر
s کے طور پر لکھی جا سکتی ہے یا سیکنٹ تھیٹا پلس ٹین تھیٹا برابر ای کے پاور s تو آخری مساوات لاگ سیکنٹ تھیٹا پلس ٹین تھیٹا برابر ہم حاصل کرتے ہیں equation 4.17 reciprocal لے لیں reciprocal تو سیکنٹ تھیٹا پلس ٹین تھیٹا برابر ای کے پاور ہے secant theta minus tan theta equals e to power مائنس s ہمیں جوڑ کر اور گھٹانے سے secant theta ملتا سے ظاہر s کو پاور مائنس e پلس s کی طاقت e سے ایک نصف se کے پاور مائنس s plus e کے 1 نصف کے برابر پاور e ہے سے پاور مائنس e مائنس s کا نصف ہے پاور e کا ہائپربولک کوزائن ہے اور پھر کیا ہے ٹین تھیٹا ٹین تھیٹا cosh x cosh s کیا جائے گا وہ ہائپربولک سائن ہے لہذا ہمیں یہ مساوات 4.19 سیکنٹ تھیٹا ہائپربولک کوزائن ہے اور ٹین تھیٹا ہائپربولک سائن ہے لہذا اب ہم حقیقی ڈومین s مثلثی فنکشنز سے ss میں رہ کر پیچیدہ ڈومین میں جانے کے بغیر ہائپربولک فنکشنز اور ٹرائیگونومیٹرک فنکشنز کے درمیان تعلق دیکھتے ہیں۔
کے اس فنکشن تھیٹا کو 4.19 کے ذریعہ دیا گیا ایک نام ہے اسے کرسٹوفر گورمنڈ s ہائپربولک فنکشنز تک متغیرات کی حقیقی تبدیلی کے ذریعہ کے اعزاز میں گرامین کہا جاتا ہے یہ نام آرتھر کیلی نے 1862 میں دیا تھا اس کی ایک بہت ہی دلچسپ تاریخ ہے۔ کرسٹل الجبرا والیم 2 کے صفحہ 312 میں گڈ رومین پایا جا سکتا ہے جو 1900 کی دہائی میں شائع ہوا تھا درحقیقت یہ 1900 کی دہائی سے پہلے شائع ہوا یہ بعد کا ایڈیشن ہے اچھے رومانوی کا الٹا کارٹوگرافی اور نیویگیشن میں ظاہر ہوتا ہے یاد رکھیں کہ جب ہم بحث کرتے ہیں
تو ہمیں پہلے ہی کارٹوگرافی کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔ آرتھوگونل ٹریجیکٹریز اور دوبارہ کارٹوگرافی آتی ہے اور یہ مرکیٹرز پروجیکشن کے سلسلے میں کارٹوگرافی اور نیویگیشن میں آتی ہے لہذا میرکیٹر کیا تعمیر کرنے کی کوشش کر رہا تھا وہ ایک نقشہ بنانے کی کوشش کر رہا تھا وہ ایک نقشہ بنانے کی کوشش کر رہا تھا جس میں کرہ پر لوکسوڈرومز مل رہے ہیں۔ آپ کے ہوائی جہاز کے نقشے پر نقشے پر سیدھی لکیروں کی طرح نقشہ لگایا گیا ہے آپ مجھ سے پوچھیں گے کہ تالا کیا ہے۔ دکھائے گئے کمرے میں آپ کو اس کی وضاحت کرتا ہوں اب لوکسوڈرومز اس خاصیت کے ساتھ دنیا کے منحنی خطوط ہیں کہ وہ ایک ہی زاویہ پر طول البلد کو کاٹتے ہیں وکر ایک ہی زاویہ پر ایک مستقل زاویہ پر تمام عرض البلد کو کاٹتا ہے کیوں ایسے منحنی خطوط اہم ہیں کیونکہ وہ اہم ہیں کیونکہ یاد رکھیں کہ نیویگیشن کے حوالے سے بحری جہاز بڑی طاق
تور چیزیں ہیں جب آپ سمندر کے اس پار ایک مقام سے دوسرے مقام تک جانا چاہتے ہیں
تو آپ سوچ سکتے ہیں کہ بہترین آپشن یہ ہے کہ مختصر ترین راستہ اختیار کیا جائے مختصر ترین راستہ ایک بڑا دائرہ ہے جو دو پوائنٹس کو جوڑتا ہے۔ زمین کی سطح لیکن مسئلہ یہ ہے کہ جب آپ عظیم دائرے کے ساتھ سفر کرتے ہیں
تو عظیم دائرہ طول البلد کو ایک ہی زاویہ پر نہیں کاٹتا ہے اور تقطیع کا زاویہ بدلتا رہتا ہے اس لیے جہاز کو مسلسل چلانا پڑتا ہے جہاز کی سمت مسلسل تبدیل ہونا اور جہاز جیسی طاق
عظیم دائروں کے ساتھ بلکہ وہ لوکسوڈرومز کے el تور چیز کے ساتھ کرنا بہت مشکل اور بہت مہنگا ہو گا اس لیے جہاز سفر نہیں کرتے منحنی خطوط کے ساتھ سفر کرتے ہیں جو ایک ہی زاویہ پر طول البلد کو کاٹتے ہیں لہذا اب اگر آپ زمین کی سطح پر لاک سنڈروم لیں گے تو یہ آپ کے ہوائی جہاز کے نقشے پر کیا مطابقت کرے گا نقشہ ایک پلانر آبجیکٹ ہے جس پر پرنٹ کیا گیا ہے۔ کاغذ کی شیٹ اور مرکٹر اس طرح نقشہ تیار کرنے کی کوشش کر رہا تھا کہ دنیا پر موجود یہ لوکسوڈومز نقشے پر سیدھی لکیروں کے مطابق ہوں اس کوشش میں کہ اس کا سامنا اچھے رومانوی فنکشن کے الٹا ہوا
تو میں آپ کو دو دیتا ہوں۔ ان میں سے ایک کا حوالہ جاہن میککلری کی کتاب جیومیٹری کے باب آٹھ سے پہلے ایک تفریق نقطہ نظر سے پیش کیا جا چکا ہے میں نے اس کتاب کا پہلے ذکر کیا ہے اور دوسری کتاب جس کا میں ذکر کروں گا وہ ہے ro Wells اور hl resnikoff انتہائی دلچسپ کتاب دوسری ہے۔ ایک بہت ہی دلچسپ کتاب وہ نیویگیشن ریاضی اور نیویگیشن کے mathematics and Civilization بارے میں بھی بات کرتا ہے کہ کیلکولس کس طرح نیوی گیشن مسائل میں آتا ہے
ہے اور یہ pi by 2 مائنس s کے 2 ٹین الٹا ہے اور پاور e کا تھیٹا s پر کچھ مشقیں ہیں۔ مینین سے پتہ چلتا ہے کہ ro تو یہاں اچھے کے اس مساوات تھیٹا میں s ظاہر کرتا ہے کہ اچھا رومانوی ایک عجیب فنکشن ہے اور جہاں تک اس مسئلے کا تعلق ہے آپ کے لیے بہت کم ہے میں جو واضح طور پر s کو پاور e سے s سے پاور e 2 فرق کریں آپ فوراً 2 ٹین کی معکوس اصطلاح میں فرق کریں جو کہ 2 پر 1 پلس سے بدلے s کو مائنس s کی جگہ s مثبت ہے اور اس طرح یہ ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے آپ کیسے چیک کریں گے کہ یہ ہے ایک عجیب فنکشن کے الٹا e 1 کیا ہوتا ہے یہ s کا ٹین الٹا پاور مائنس e سے لیکن s کے 2 ٹین الٹا حاصل ہوتا ہے پاور مائنس e سے آپ کو s کو مائنس s کا پاور e پر cot inverse of e کی طرف لیکن کیا ہے s کا ٹین ہوتا ہے پاور s pi by 2 minus tan inverse of e کا ہو جائے گا 2۔ pi by 2 pi مائنس pi بن جائے گا اور pi by 2 pi پاور اور 2 گنا
کا s جو تھیٹا کا مائنس ہے s کا پاور e ہے 2 مائنس 2 ٹین الٹا pi کا s تو تھیٹا مائنس
میں ظاہر ہوا j 2014 میں نمودار ہوا جو مسئلہ j 2014 تو تھیٹا ایک عجیب فنکشن ہے اگلا مسئلہ بہت دلچسپ ہے کیونکہ اسی طرح کا ایک کی ایک عجیب cosecant تھیٹا کو پاور 17 میں ضم کرنا ہے اب جب آپ کسی سیکنٹ کی عجیب طاقت لیتے ہیں اور ایک cosecant ایک طاقت آپ کو معلوم ہے کہ اگر آپ حصوں کے حساب سے انضمام شروع کرتے ہیں
تو آپ کو اسے بار بار کرنا پڑے گا اور یہ مزہ نہیں آئے گا لہذا آپ بار بار حصوں کے ذریعے انضمام سے بچنے کا طریقہ چاہتے ہیں کی عجیب طاقت کو ضم کرنے کے لیے اچھا رومانیہ آپ کو ایسا کرنے میں مدد کرے secant کی طاق طاقت یا cosecant تو کیسے ایک تاکہ secant theta to power 17 d تھیٹا گا
s کے برابر پاور e پلس ٹین تھیٹا secant theta تو آپ یہ کیسے کریں گے
s تو آپ کو کیا ملے گا آپ کو پوٹ سیکنٹ تھیٹا پلس ٹین تھیٹا ای کے برابر ہے پاور
تو ہمیں سیکنٹ تھیٹا ہائپربولک کوزائن کے برابر ملتا ہے لہذا فرق کریں
سو سیکنٹ تھیٹا ڈی تھیٹا وائی ہائپربولک سائن ایس ٹی ایس کو ٹین تھیٹا ds تو سیکنٹ تھیٹا ٹین تھیٹا ڈی تھیٹا ہائپربولک سائن ٹائمز کے برابر ہوگا سے تقسیم کیا جائے گا لیکن ٹین تھیٹا ہائپربولک سائین ایس ڈی ایس کے برابر ہے لہذا سیکنٹ تھیٹا ڈی تھیٹا ڈی ایس کے برابر ہے لہذا آپ کا پاور آئیے اب ہم انضمام کی ds تھیٹا ڈی تھیٹا کا انٹیگرل سیکنٹ پاور 16 کا انٹیگرل سیکنٹ بن جائے گا جو کہ ہائپربولک کوس ہے طاقت 16 گنا 17 کو یاد رکھیں cosh s حدود کو شامل کرتے ہیں مساوات سیکنٹ تھیٹا مساوی

کے مساوی ہوگا ۔ آپ کے لیے یہ چیک کرنا آسان s ہوگا لاگ 2 جمع جڑ 3 کے برابر pi by 3 ہوگا اور تھیٹا برابر s تو جب تھیٹا مساوی 0 ہے

کو s پلس ای میں پاور مائنس s تو ہمیں کیا ملتا ہے کہ انٹیگرل 1 سے 2 میں تبدیل ہو جائے گا پاور 16 0 میں لاگ 2 پلس روٹ 3 ای سے پاور سے 2 تک ہے اور اس لیے آپ اسے s سے پاور مائنس e پلس s سے پاور e صرف cos تک بڑھایا جائے گا اور ہائپربولک ds پاور 16 بائنومیئل تھیوریم کے ذریعے بڑھا سکتے ہیں یہ بہت آسان ہے خاص طور پر جب آپ کو یقینی انٹیگرلز موجود نظر آئیں تو آپ کو بار بار حصوں اور si۔ کے ذریعے انضمام کرنے کی ضرورت نہیں ہے milarly آپ cosecant theta to the power 17 ڈالتے ہیں یہاں آپ u OK کو e to the power مائنس cot theta کو آزما سکتے ہیں cosecant theta

تو مجھے امید ہے کہ آپ نے تفریق مساوات کی دنیا میں اس مختصر سفر کا لطف اٹھایا ہو گا اور میں صرف چند الفاظ کہنا پسند کروں گا۔ نتیجہ اخذ کرنے کے لیے میں نے آپ کو تفریق مساوات کے بہت سے دلچسپ حصوں سے دیکھا ہم نے بہت سی ہندسی مثالیں دیکھیں ہم نے طبیعیات کی مثالیں دیکھیں ہم نے حیاتیات کی مثالیں دیکھیں ہم نے آرتھوگونل ٹریکجٹریز کو دیکھا ہم نے بہت سی ایپلی کیشنز کو دیکھا ہم نے فلکیات اور اس طرح کی چیزوں کو دیکھا اور میں نے آپ کو بہت سے حوالہ جات دیے ہیں اور میں آپ کو دو مزید حوالہ جات دوں گا اور پہلا حوالہ ایپلی کیشنز اور کی تفریق مساوات کی ایک بہت ہی خوبصورت کتاب ہے، دوسرا ایڈیشن جس کا میں ذکر کر رہا ہوں وہ gf simmons تاریخی نوٹوں کے ساتھ ٹاٹا میک گرا ہل کے تیسرے ایڈیشن نے شائع کیا ہے۔ بھی منظر عام پر آچکا ہے لیکن دوسرا ایڈیشن ہمارے مقاصد کے لیے کافی ہوگا یہ بہت اچھی کتاب ہے ys قابل رسائی ہیں طلباء کے لیے 80 صفحات پہلے آتا ہے کو پڑھ کر لطف تاریخی مضمون پڑھ کر خوشی ہوئی نامور ریاضی دانوں پر کہ وہ آپ کے لیے جیومیٹری کے منحنی خطوط کے متعدد ایپلی کیشنز کے حصول کے لیے برانچز ٹو کرون مسئلہ اور آرتھوگونل ٹریجٹریز دستیاب ہیں اس لیے کتاب ہندوستانی ایڈیشن میں دستیاب ہے اور دوسری کتاب جس کا میں ذکر کرنا چاہوں گا وہ ہے اسپیواک کی اسپیویکس کیلکولس ایک بہت ہی خوبصورتی سے لکھی گئی کتاب ہے یہ کیلکولس پر احتیاط سے لکھی گئی کتاب ہے اور باب 17 پر آپ کو نیوٹن کے قوانین حرکت سے کیپلر کے قوانین کا اخذ نظر آئے گا اور یہ 1994 میں شائع ہوئی تھی۔

تو اب ہمارا سفر اپنے اختتام کو پہنچ گیا ہے اور مجھے امید ہے کہ آپ نے امتیازی مساوات کی دنیا میں اس سفر سے لطف اندوز ہوئے ہوں گے میں الوداع کہنا چاہوں گا لیکن ایسا کرنے سے پہلے بہت سارے لوگوں کا شکریہ ادا کرنا میری خوشی ہے جو میں اب کروں گا۔ پروفیسر نیلا نٹراج شعبہ ریاضی کی سربراہ، میری ساتھی اور اس پروگرام کے آئی آئی ٹی بی کوآرڈینیٹر کا شکریہ ادا کرتے ہوئے شروع کریں اور میں خاص طور ، پر اس کا شکریہ ادا کرتا ہوں کہ انہوں نے مجھے یہ لیکچر دینے کا موقع فراہم کیا اور اس سے بھی اہم بات اس کی مسلسل حوصلہ افزائی اور حمایت کے لیے خاص طور پر جب میرا جوش کم ہو رہا تھا اس نے مجھے آگے بڑھنے کے لیے بہت ضروری حوصلہ دیا اور پھر میں اپنا شکریہ ادا کرنا چاہوں گا۔ ساتھی پروفیسر شانتنو ڈے جنہوں نے ان ویڈیوز کو سنا ہے مشقوں کے ذریعے کام کیا اور پروف ریڈنگ کے اپنے محنتی کام کے لئے اور مجھے تصحیح کی ایک بہت بڑی فہرست دینے کے لئے جو میں نے شامل کی ہے پھر میں پروفیسر وکرم گدری کا شکریہ ادا کرنا چاہوں گا جو سی ڈیپ کے سربراہ ہیں۔ ہمیں اس خوبصورت سی ڈی اسٹوڈیو کو اس کی جدید ترین سہولیات کے ساتھ پیش کرنے کے لیے اور آئی آئی ٹی دہلی کے پروفیسر نیلادری چٹرجی جو اس پروگرام کے کوآرڈینیٹر ہیں، میں اپنے شعبہ کے پی ایچ ڈی کے طالب علم آدتیہ مہیشوری کا شکریہ ادا کرنا چاہوں گا جنہوں نے ان میں میری مدد کی۔ اعداد و شمار اور آخری اور سب سے اہم بات یہ ہے کہ میں تکنیکی عملے کا تہہ دل سے شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جو مسلسل کام کر رہے ہیں اور جنہیں ہر وقت اپنی بیماری کے ساتھ رہتا ہوں اور ان کا میں بہت زیادہ مقروض ہوں اور وہ مسٹر ترون نیگی ہیں ان سب کے لیے میں اپنا شکریہ ادا کرتا ہوں اور میں آپ کا شکریہ ادا کرتا ہوں میرے تمام طلباء آپ کو الوداع دیکھتے ہیں آپ کا بہت بہت شکریہ آپ کا