تفریق مساوات پر سیریز کے اس چوتھے لیکچر میں طلباء کا خیرمقدم کرتے ہیں
تو آئیے اس جگہ سے شروعات کریں جہاں ہم پچھلی بار رکے تھے آئیے اس سلائیڈ کو دیکھیں جو کہ ورزش نمبر 10 ہے جہاں ہم نے روکا تھا ہم
کو چھوتے ہیں ۔ اصل اور میں نے آپ سے ان دائروں کو نیلے قلم میں کھینچنے کو کہا اور y-axis تمام حلقوں کی فیملی کو لے جاتے ہیں جو
سرخ قلم کے دائروں سے بھی کھینچیں جو نیلے دائروں کے لیے آرتھوگونل ہیں اور آپ کی تصویر کے ساتھ اس تصویر کا موازنہ دباتی اور چھٹیوں
کی کتاب کے صفحہ 635 پر دی گئی تصویر سے کرنا دلچسپ ہے۔
تو سوال یہ ہے کہ کیا آپ کی تصویر ریسنک اور چھٹیوں کی کتاب پر اس تصویر کا اندازہ لگاتی ہے جو آپ روسی تعطیلات کی کتاب میں دیکھتے
ہیں وہ تصویر ہے جو برقی ڈوپول کی وجہ سے مساوی خطوط اور قوت کی لکیروں کو ظاہر کرتی ہے اور میرے پاس سوال یہ ہے کہ ڈوپول کی
مجھے یقین Oka y اور چھٹیوں پر لگ بھگ تصویر بہتر resnick لمبائی چھوٹی اور چھوٹی ہوتی جاتی ہے کیا آپ نے جو تصویر بنائی ہے وہ
،نہیں ہے کہ ان حلقوں کی خاکہ نگاری کی ہے یا نہیں لیکن بہرحال میں یہاں آپ کو دکھاؤں گا کہ میرے پاس کیا ہے
تو آئیے دیکھتے ہیں ہاں
محور کو چھوتے ہوئے نظر آتے ہیں جو میں نے ان میں سے چار بنائے تھے اور میں نے بھی نیلے رنگ y تو وہاں آپ کو نیلے رنگ کے دائرے
پر مماس دائرے ہیں یہ ایک اچھی x-axis کے دائروں کو دائیں زاویوں سے کاٹتے ہوئے چار سرخ دائرے بنائے اور یہ سرخ دائرے اصل میں
تصویر ہے جو آپ کے پاس ہے اور ہم اگلے حصے میں دائروں کے اس دو خاندانوں پر واپس آئیں گے۔ یہ لیکچر سیریز بالکل ٹھیک ہے
تو اب واپس آتے ہیں جہاں ہم ہیں
تو آئیے چلتے ہیں
تو اب ایک اور مسئلہ پر غور کرتے ہیں دو دائروں پر غور کریں جس میں یونٹ ریڈی اور سینٹرز 2 کوما 0 اور مائنس 2 کوما 0 ہیں۔ حلقوں کی
اکائی کا رداس ہے رداس 1 ہے۔ اور مراکز کو مائنس 2 کوما 0 اور 2 کوما 0 پر رکھا گیا ہے۔ آپ آسانی سے ان دائروں کی مساوات کو صحیح طور
sy جمع 2 مربع پلس x مربع برابر 1۔ دوسرے کے لیے y مائنس 2 مربع جمع x پر لکھ سکتے ہیں کہ ایک دائرے کی مساوات کیا ہے
اسکوائر مائنس 1 آئیے ہم اسے y مائنس 2 اسکوائر پلس x ایکسپریشن e کو 0 کے برابر کہتے ہیں s 1 مربع برابر 1۔ اب پہلی مساوات
کے طور پر اور پھر s2 مربع مائنس 1 کہتے ہیں۔ کہ y جمع 2 مربع جمع x کہتے ہیں اور دوسرے ایکسپریشن کو s1 سادگی کے لیے
میں 0 کے برابر دیکھیں جہاں لیمبڈا ایک حقیقی نمبر ہے اور جیسا کہ آپ لیمبڈا میں فرق s2 پلس لیمبڈا s1 آئیے اس مساوات 1.37 کو سلائیڈ
کرتے ہیں آپ کو حلقوں کا ایک خاندان 1.37 ملتا ہے لہذا مساوات 1.37 حلقوں کے خاندان کی نمائندگی کرتی ہے اور سوال جو پوچھا گیا ہے وہ
x خاندان 1.37 کے لیے پہلی ترتیب کی تفریق مساوات کو تلاش کرنا ہے، آپ اسے کیسے کرتے ہیں آپ مساوات 1.37 لیتے ہیں اور آپ اسے
کے حوالے سے فرق کرتے ہیں، آپ کو ایک اور مساوات ملتی ہے اور آپ ان دونوں مساوا
توں کے درمیان لیمبڈا کو ختم کرتے ہیں اور آپ اپنی تفریق مساوات حاصل کریں ٹھیک ہے دائروں 1.37 کو نیلے قلم سے خاکہ بنائیں اور پھر کیا
وہاں لیمبڈا کی کوئی خاص قدر ہے جس کے لیے یہ مساوات دائرہ نہیں ہے جس کے لیے لیمبڈا کی ایک قدر ہے 1.37 کوئی دائرہ نہیں ہے یہ
کوئی اور وکر ہے ایک محدود کیس جیسا کہ یہ تھا
تو وہ کیا ہے محدود کیس آپ کی تصویر میں محدود کیس کی نشاندہی کریں سرخ قلم کے دائروں کے ساتھ خاکہ بنائیں جو نیلے دائروں کو آرتھوگونی
مائنس 2 مربع جمع sx طور پر کاٹتے ہیں تاکہ آپ کو دوبارہ ایک خوبصورت تصویر ملے۔ اور اگلی سلائیڈ میں آپ دیکھیں گے کہ وہ ایکسپریشنز
y مربع مائنس 1 جب آپ آسان بناتے ہیں
جمع 3 اور مساوات 1.37 کا کیا ہوگا؟ xمربع جمع 4 y مربع جمع x s2 جمع 3 ملتا ہے۔ اور xمربع مائنس 4 y مربع جمع x تو آپ کو
کے حوالے سے الگ کرتے ہیں آپ کو ایک اور مساوات ملتی ہے آپ کو دو x اس سلائیڈ میں تفصیل سے لکھا گیا ہے اور آپ اس مساوات کو
مساواتیں مل جاتی ہیں جن میں لیمبڈا شامل ہوتا ہے آپ صرف لیمبڈا کو ختم کرتے ہیں اور آپ کو خاندان کے لیے آپ کی تفریق مساوات مل جاتی ہے
کیا آپ مثال کے طور پر الیکٹرو سٹیٹکس میں مساوات کے منحنی خطوط کے بارے میں سوچ سکتے ہیں میں نے آپ کو ریسنک اور ہالیڈے کی کتاب
کے صفحہ 635 پر تصویروں پر ایک اشارہ دیا تھا اب آپ کو حلقوں کا ایک اور خاندان مل گیا ہے یہ دائرے ایک سیرٹا کی برابری کی لکیریں ہیں
چارجز کی ترتیب میں میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کے بارے میں سوچیں کیا آپ کی جسمانی وجدان آپ کو ایسی صورت حال بنانے میں مدد کرتی ہے
کے ذریعے مساوی خطوط بالکل ٹھیک دیے x کہ کیا یہ آپ کو چارجز کے سیٹ اپ کے ساتھ سیٹ اپ بنانے میں مدد کرتا ہے کہ اس مساوات
جمع 3 برابر 0۔ فرض کریں کہ آپ ایسا xمربع جمع 4 y مربع جمع x جمع 3 جمع لامبڈا اوقات xمربع مائنس 4 y گئے ہیں مربع جمع
ممکنہ منحنی خطوط ورزش 12 کی طرح ہیں۔ لہذا یہاں مساوات کی تصویر کشی کی eq جسمانی نظام قائم کرنے میں کامیاب ہو گئے ہیں جس کے
گئی ہے۔ مساوی لکیریں ہیں قوت کی لکیروں کے بارے میں کیا خیال ہے اگر آپ کشتی کی چھٹیوں کی کتاب کے صفحہ 635 پر تصویروں کو
دیکھیں
تو وہ مساوی لکیروں کو ٹھوس لکیروں کے ذریعے اور قوت کی لکیروں کو نقطے والی لکیروں سے دکھاتا ہے اور آپ صفحہ 635 پر ان تصویروں
میں کیا دیکھتے ہیں؟ نقطے والی لکیریں ٹھوس لکیروں کو دائیں زاویوں پر کاٹتی ہیں قوت کی لکیریں مساوی خطوط کو دائیں زاویوں پر کاٹتی ہیں
کیا ہوگا؟ طاقت کی لکیریں وہ سرخ دائرے ہوں گے جو آپ نے کھینچے ہیں اور مساوی t تو سوال یہ ہے کہ کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ
لکیریں وہ نیلے دائرے ہوں گے جو آپ نے کھینچے ہیں ٹھیک ہے شاید ایک اشارہ کے طور پر میں آپ کو بتاتا ہوں کہ آپ کو سیٹ اپ کے بارے میں
تین جہ
توں میں سوچنا چاہئے سیٹ اپ تھری ڈائمینشنل اسپیس میں ہوں اور آپ تھری ڈائمینشنل اسپیس میں لیں یہ مساوی سطحیں ہوں گی اور آپ سطح کو
جہاز سے کاٹتے ہیں آپ xy جہاز میں تصویر دیکھیں جب آپ کوئی سطح لیتے ہیں اور آپ اسے xy ہوائی جہاز سے کاٹتے ہیں اور پھر xy
جہاز کے ذریعے تصویر کو کاٹنا xy ہوائی جہاز میں ایک وکر ملتا ہے، کیا آپ کو تین جہتی جگہ میں سیٹ اپ کرنا چاہئے اور پھر xy کو
چاہئے اور کراس سیکشن کو دیکھیں میں آپ کو جواب دوں گا جس کا جواب اس پر مل سکتا ہے۔ صفحہ 107 مسئلہ 2.47 گریفتھ کی کتاب کا
تعارف برقی حرکیات کا تیسرا ایڈیشن جو 1999 میں شائع ہوا تھا برائے مہربانی کتاب کے ایڈیشن نمبر پر
توجہ دیں ٹھیک ہے
تو یہ الیکٹرو سٹیٹکس سے ایک اور مثال ہے
تو یہ کیا ہیں؟ مثالیں آپ کو دکھا رہی ہیں کہ وہ آپ کو منحنی خطوط کے دو خاندان دکھا رہے ہیں آپ کو ایک نیلے حلقے ایک نیلے حلقوں کا خاندان
اور سرخ حلقوں کا ایک خاندان اور سرخ رنگ کے منحنی خطوط اور نیلے منحنی خطوط ایک دوسرے سے دائیں زاویوں پر ملتے ہیں آگے بڑھنے
سے پہلے میں آپ کو تین مشقیں دیتا ہوں۔ منحنی خطوط کے ایک پیرامیٹرک خاندان کی طرف سے مطمئن تفریق مساوات کو تلاش کرنے کی کوشش
کرنے پر پہلے کوآڈرینٹ میں دائروں کے ایک پیرامیٹر فیملی کے لیے مساوات لکھیں جو دونوں کوآرڈینیٹ محوروں کو چھوتے ہیں
x مربع فرق c پورا مربع برابر c مائنس y پورا مربع جمع c مائنس کے ساتھ ہوگا cx کیا رداس c کوما c تو دائروں کا مرکز کیا ہوگا
ان دو مساوا c کے حوالے سے آپ کو ایک اور مساوات حاصل ہوتی ہے
مربع کو دیکھتے ہیں اور y کے برابر پیرابولا xتوں کے درمیان ختم کرتے ہیں اور آپ کو آپ کی تفریق مساوات کا مسئلہ نمبر 15 ملتا ہے آپ 8
اس پیرابولا کے ہر نقطہ پر ایک ٹینجنٹ لائن ہوتی ہے اور جیسا کہ ایک نقطہ پیرابولا کے ساتھ مختلف ہوتا ہے آپ کو لائنوں کا ایک پیرامیٹر فیملی مل

جاتی ہے۔ ٹینجنٹ لائنز کو پیرابولا کی طرف لے جائیں تاکہ آپ کو ٹینجنٹ لائنوں کا ایک پیرامیٹر فیملی دوبارہ مل جائے مثال کے طور پر آپ مربع
پر ایک پوائنٹ لے سکتے ہیں ۔ اصلی لائن اور پیرابولا 80 مربع کوما کے ہر نقطہ کے لئے 280 اس صورت میں 2 ہے لہذا آپ مربع کوما 280
پر پوائنٹ پر ٹینجنٹ کی مساوات کو تلاش کرتے ہیں اور آپ کو لائنوں کا ایک پیرامیٹر فیملی ٹی کے ذریعہ پیرامیٹرائز کیا جاتا ہے اور تفریق 280
c مربع 9 جمع x تلاش کرتے ہیں۔ ان لائنوں کے لیے مساوات جو میں آپ کو تیسرا مسئلہ دے رہا ہوں وہ ہے منحنی خطوط کے نظام کو دیکھیں
برابر 1۔ c مربع 4 جمع y جمع

آپ کو ملنے والے حقیقی نمبروں سے مختلف ہوتا رہتا ہے۔ منحنی خطوط کا ایک پیرامیٹر کنبہ وہ مخروطی ہیں ان میں cc تو یہاں پیرامیٹر کیا ہیں
کو مائنس 100 لیتا ہوں c سے کچھ بیضوی ہیں اور ان میں سے کچھ ہائپربولاس ہیں اگر میں
کی ایک مخصوص رینج کے لیے c خوفناک حد تک منفی نہیں ہوسکتا ہے۔ لہذا c تو کوئی وکر نہیں ہے جو اس مساوات کو پورا کرتا ہے لہذا
کا ایک پیرامیٹر فیملی مل جاتی ہے ایک conics مائنس 9 سے انفینٹی مائنس 9 کو خارج کر دیا گیا آپ کو کنکس کا ایک خاندان ملتا ہے آپ کو
خاندانی خاندان میں بیضوی خاندان ہائپربولاس کے خاندان میں اس خاندان کو کنفوکل فیملی کہا جاتا ہے اور آپ کیا کرتے ہیں؟ کیا آپ کو منحنی
خطوط کے اس خاندان کی طرف سے مطمئن تفریق مساوات کو تلاش کرنا ہے

ڈیش 4 yy جمع 2 c پر 9 جمع x کے حوالے سے کیا فرق ملے گا آپ کو 2 x تو آپ اسے دوبارہ کیسے کریں گے کہ دی گئی مساوات کو
اور 1 سے 4 جمع c کے برابر ملے گا 2 منسوخ کر دے گا کہ آپ کو اصل مساوات کیا ملتی ہے اور نئی مساوات ان کو 1 سے 9 جمع c جمع
جمع c ہے۔ 9 جمع x کی مساوات کے طور پر مانتی ہے، دی گئی مساوات پہلے سے ہی سلائیڈ پر موجود ہے جس پر آپ کے پاس مساوات c
اور 1 بہ 4 c کے حوالے سے تفریق کرنے کے بعد آپ کو ایک اور مساوات ملتی ہے آپ کو 1 بہ 9 جمع x کے برابر 1 c مربع پر 4 جمع y
کی دو مساواتیں مل گئی ہیں ان دونوں مساوا c جمع

برابر ہے جو بھی لے لے c برابر ہے جو کچھ بھی 1 پر 4 جمع sc توں کو ایک ساتھ حل کریں آپ کو مل جائے گا 1 سے 9 پلو
دور ہو جاتا ہے اور آپ کو ایک تفریق مساوات ملتی c برابر کسی چیز کے لے فرق c برابر کسی چیز کے 4 پلس c جمع 9 reciprocals
یہ ایک بہت ہی دلچسپ مشق ہے براہ کرم اسے کریں کیونکہ ہم بہت جلد اس conics ہے جو اس ایک پیرامیٹر فیملی سے مطمئن ہوتی ہے
اور چھٹی کی کتاب resnick مسئلے کی طرف واپس آنے والے ہیں ٹھیک ہے اگلی چیز جو ہم کرتے ہیں وہ ہے آرتھوگونل ٹریجیکٹریز اگر آپ
کے صفحہ 635 پر جائیں جیسا کہ تجویز کیا گیا ہے کہ قدرتی طور پر آپ کو درج ذیل کی طرف لے جایا جائے گا۔ ہوائی جہاز میں منحنی خطوط
کی ہندسی ترتیب جسے ہوائی جہاز میں منحنی خطوط کے آرتھوگونل نظام کہا جاتا ہے

تو ہوائی جہاز میں منحنی خطوط کے آرتھوگونل نظام کیا ہیں وہ ہوائی جہاز میں منحنی خطوط کے دو نظام ہیں ایک منحنی خطوط کا ایک سیٹ اور
میں دائیں زاویوں پر کاٹتا ہے جیسے آپ کے نیلے حلقے اور c2 میں ہر ایک منحنی خطوط ہر ایک منحنی کو c1 منحنی خطوط کا ایک مجموعہ
آپ کے سرخ دائرے ہر نیلے دائرے ہر سرخ دائرے سے آرتھوگونی طور پر ملتا ہے

منحنی خطوط کا ایک نظام ہے جو منحنی c2 تو ایسے دو نظام ایک دوسرے کے آرتھوگونل ٹریجیکٹریز کہلاتے ہیں لہذا ہم کہتے ہیں کہ فیملی
کے خاندان کے لئے ہے اور اس کے برعکس آرتھوگونل ٹریجیکٹری کا جملہ اس تناظر میں کثرت سے استعمال ہوتا ہے ہم کہتے ہیں c1 خطوط
ایک دوسرے کے آرتھوگونل ٹریکجٹریز c2 اور c1 اور اس کے برعکس یا ہم کہیں گے کہ c1 آرتھوگونل ٹریجیکٹری ہے فیملی c2 کہ فیملی
ہیں وہ ایک دوسرے کے لیے آرتھوگونل ہیں کیوں ہم آرتھوگونل ٹریکجٹریز کا مطالعہ کریں جو ان کے بارے میں خیال رکھتے ہیں وجہ نمبر ایک وہ
خوبصورت جیومیٹری ہمیشہ دلکش ہوتی ہے وہ خوبصورت چیزیں ہیں

تو یہ کافی اچھی وجہ ہے لیکن جو لوگ حقیقت پسندانہ مثالیں دیکھنا چاہتے ہیں وہ فلوڈ میکانکس میں نظر آتے ہیں وہ آپٹکس میں نظر آتے ہیں یاد
کرتے ہیں کہ آپٹکس میں آپ کو لہروں کے محاذ ملتے ہیں اور آپ کو شعاعیں ملتی ہیں وہ شعاعیں ہمیشہ دوس
توں کے لیے کھڑی رہتی ہیں لہذا لہر والے دوست ایک بنتے ہیں۔ اشیاء کا خاندان اور شعاعیں اشیاء کا ایک مختلف مجموعہ بناتی ہیں اور ایک کے
زاویہ اس طرح آرتھوگونل ٹریجیکٹرز قدرتی طور پر آپٹکس میں ظاہر ہوتے ہیں ریاضیاتی ht عناصر دوسرے کے عناصر کو رگ پر کاٹتے ہیں۔
نقشہ نگاری میں ظاہر ہوتے ہیں نقشہ نگاری کیا ہے یہ نقشہ بنانے کی سائنس ہے نقشہ سازی کی سائنس بہت پرانی ہے اور یہ بہت امیر اور بہت
ریاضیاتی ہے فن لینڈ کے فن لینڈ کے نقش نگار کارٹوگرافرز۔ انہوں نے کارٹوگرافی کی سائنس میں ایک غیر معمولی کام کیا ہے اگر آپ نے کبھی دنیا
کو دیکھا ہے

تو کیا آپ نے دیکھا ہے کہ عرض البلد اور عرض البلد ایک دوسرے کو آرتھوگونی طور پر کاٹتے ہیں لہذا عرض البلد اور طول بلد کا خاندان
آرتھوگونل ٹریکجٹریز کا ایک جوڑا بناتا ہے۔ جغرافیہ میں آرتھوگونل ٹریجیکٹریز ظاہر ہوتے ہیں اور کیلکولس جغرافیہ میں ایک اہم کردار ادا کرتا ہے
میککلری جان میکلیری جیومیٹری کی کتاب کے باب 8 کو تفریق نقطہ نظر سے دیکھیں باب 8 پر ایک حیرت انگیز کتاب ہے جسے آپ دیکھتے ہیں کہ
کارٹوگرافی پر بحث ہو رہی ہے وہاں کچھ خوبصورت تاریخی حوالے ہیں اور وہ بات کرتا ہے۔ کچھ نظریات کے بارے میں 18 ویں اور 19 ویں
صدی کے اوائل کے دو عظیم ماسٹروں اور گاؤس کی طرف واپس آکر انہوں نے نقشہ نگاری میں اپنا حصہ ڈالا ہے ایک اور ریاضی دان جس کا نام
نقش نگاری کی سائنس میں ظاہر ہوتا ہے وہ لیمبرٹ ہے جو ایک ریاضی دان بھی ہے اب ہم ایک علاقے کی طرف بڑھیں گے۔ ریاضی کے اندر اور
وضاحت کریں کہ آرتھوگونل ٹریجیکٹری یہاں پر کیسے ظاہر ہوتی ہے اور ریاضی کے اس شعبے کو پیچیدہ متغیر کے فنکشنز کا نظریہ کہا جاتا
ہے اور یہ آئیڈیاز ایرو اسپیس انجینئرنگ کے ذریعے پیچیدہ متغیرات کے فنکشنز کے نظریہ کو ایرو اسپیس انجینئر استعمال کرتے ہیں۔ پیچیدہ
متغیرات کے فنکشنز کے نظریہ سے آنے والی کچھ آسان مثالیں میں آپ کو یقین دلاتا ہوں کہ ہم ایسی کوئی بھی چیز استعمال نہیں کریں گے جس
سے آپ پہلے ہی سے واقف نہ ہوں جس کے بارے میں میں نے یہاں بات کی ہے وہ آپ کے 12 معیاری نصاب سے آگے بڑھ جائے گی لہذا
گھبرائیں نہیں۔ ایک پیچیدہ متغیر کے فنکشنز کا نظریہ

f مربع یو سیبیا اس کو حقیقی اور خیالی حصوں میں درجہ بندی کریں z کے برابر ہے z کے f تک جو c سے f تو آئیے ایک فنکشن لیں
کے طور پر لکھیں اور آپ اس iy جمع x کو z کے اصلی حصے کیا ہیں f کے z لکھیں اور اس طرح uxy plus ivxy برابر z کا
کا حصہ xy مربع کیا ہے خیالی پر y مربع مائنس x کو مربع کریں کہ حقیقی حصہ

اور 2 a مربع برابر y مربع مائنس x برابر مستقل دوسرے الفاظ میں ہم v تو اب ہم منحنی خطوط کے نظام کو دیکھتے ہیں یو برابر مستقل اور
کو دیکھتے ہیں b برابر xy

لے لیں uxy مربع یہ اصلی حصہ iy جمع x ہے z مربع z مساوی z کا f تو پھر آپ ایک پیچیدہ متغیر کا فنکشن لے رہے ہیں۔ یعنی
لیں bxy خیالی حصہ

کے برابر سیٹ کریں ایک مستقل v کو مستقل کے برابر سیٹ کریں اور u دائیں اور vxy 2 xy مربع کیا ہے y مربع مائنس uxyx تو
مربع مائنس x کے وہ کیا ہے منحنی خطوط a برابر uxy کیا یہ منحنی خطوط کا خاندان ہے b برابر ہے vxy اور a برابر ہے uxy تو
ملے گا۔ مستطیل af دوبارہ آپ کو b برابر xyکیا ہے 2 b برابر v وہ مستطیل ہائپربولاس کا ایک خاندان ہے یہ خاندان a مربع برابر ہے y
کاٹتا ہے a مربع برابر y مربع مائنس x میں آپ کو اس بات کی تصدیق کرنے کے لیے چھوڑ دوں گا کہ amily ہائپربولاس کی
لیتے ہیں جو کہ دونوں منحنی hyperbola to xy برابر b orthogonally یعنی اگر آپ ایک پوائنٹ x naught y naught
ڈھلوان کی پیداوار -1 ہے کیلکولس آپ کو بتائے گا کہ ان x nought y nought خطوط پر ہوتا ہے نقطہ پر دو منحنی خطوط کی ڈھلوانیں

y مربع مائنس x ڈھلوانوں کی گنتی کیسے کی جائے اور مشتقات کی گنتی کیسے کی جائے تاکہ یہ معلوم ہو سکے کہ یہ دونوں منحنی خطوط ایک دوسرے کے آرتھوگونل ہیں لہذا یہ آپ کو ایک آرتھوگونل ٹریکجٹری کی ایک بہت اچھی مثال xy کے برابر b اور 2 کے برابر ہیں۔ a مربع مربع x اور نیلے رنگ کے منحنی خطوط b برابر xyدیتا ہے دو آرتھوگونل ٹریکجٹریز یہاں ایک تصویر ہے سرخ منحنی منحنی خطوط ہیں 2 مربع پہلے کے برابر ہیں تصویر میں جو آپ دیکھ رہے ہیں کہ چوراہے کے مقام پر وہ آرتھوگونل دکھائی دیتے ہیں وہ تصویر ریاضی کی y مائنس بدولت کافی حد تک درست ہے اور یہاں میں ان میں سے ایک کا شکریہ ادا کرنا چاہوں گا ریاضی کے شعبہ کے ڈینٹ آدتیہ مہیشوری جنھوں نے یہ مائنس 0 پر c تصویر بنائی اور اگلی تصویر ٹھیک ہے آئیے ہم پیچیدہ تجزیہ سے ایک اور مثال لیتے ہیں آئیے ایک فنکشن لیتے ہیں جس کی تعریف پر یہ فنکشن پورے پیچیدہ جہاز پر بیان کیا جاتا ہے سوائے 0 کے جب اس کی z جمع 1 کیا ہے؟ z کے برابر f z کی گئی ہے۔ یہ فنکشن ڈومین میں ایک r cos t کے علاوہ ir sine t so z ایک دائرے z وضاحت نہیں کی گئی ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے جب یاد رکھیں کہ ہم پیچیدہ نمبروں کو آرگن جہاز میں پوائنٹس کے طور پر سوچ رہے ہیں ir sine t کا پتہ لگاتا ہے۔ پلس r cos t دائرے کو مختلف t اور r cos t comma r sine t کو z اور آپ پیچیدہ نمبروں کی اس ہندسی نمائندگی سے واقف ہیں لہذا میں پیچیدہ نمبر کا ir sine t اور r cos t کا کیا ہوتا ہے z کے f ڈومین میں ایک دائرے کا پتہ لگاتا ہے کہ z ہونے دیں تاکہ آپ کو ایک دائرہ ملے کیا ہوتا ہے تصویر کے منحنی خطوط کا کیا ہوتا ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ ان تصویری منحنی خطوط کو سمجھنے کے لیے یہ ایک دلچسپ مشق ہے۔

تو z کا f اگر z r cos t کیا ہے پلس ir sine t ہے

آپ کو یقینا کمپلیکس کنجوگیٹ یا ڈینومینیٹر t سائن ir پلس r cos t جمع 1 پر ir sine t پلس cos t کیا ہے f کا zr تو ملے گا جو سلائیڈ میں r sine t مائنس 1 پر r کوما r cos t جمع 1 پر r استعمال کرنا ہوگا اور چیز کو دوبارہ لکھیں اور آپ کو مختلف ہو کہ یہ 1.42 کیا ظاہر کرتا ہے 1.42 بیضوی کا پیرامیٹرائزیشن ہے 1.42 بیضوی کی t کے طور پر ظاہر ہوتا ہے تاکہ 1.42 ایک بیضوی ہے ٹھیک ہے بیضوی کے بڑے محور کیا cos t comma b sine t نمائندگی کرتا ہے۔ جیسا کہ آپ اچھی طرح جانتے ہیں کہ r مائنس 1 پر r کیا ہے نیم معمولی محور r جمع 1 پر r ہیں نیم بڑے محور

کا نیم اہم محور نیم معمولی محور اور r مائنس 1 پر r اور نیم معمولی محور r پلس 1 پر r تو یہ ہے نیم بڑے محور کے ساتھ ایک بیضوی مربع کے برابر ہے ٹھیک ہے e مربع کے درمیان کیا تعلق ہے ایک مربع 1 مائنس b سنکیتا

کیا ہے i تو آپ بیضوی کی سنکی پن کا حساب لگا سکتے ہیں اس بیضوی کی قوت

e مربع کے برابر ایک مربع میں 1 مائنس b کیا یاد ہے ae کوما صفر ہے لیکن ae کوما صفر اور مائنس ae تو بیضوی کے فوکس کیا ہیں یہ مربع

r مائنس 1 پر br کیا ہے r پلس کیا ہے 1 پر ar مربع ہے لیکن b مربع ایک مربع مائنس e تو ایک مربع

مربع کیا ہے یہ 4 ہے۔ b تو ایک مربع مائنس

مربع 4 ہے e تو مربع

ہے۔ ae 2 تو

کی قیمت کچھ بھی ہے r تو فوکس یا بیضوی 2 کوما 0 اور مائنس 2 کوما 0 ہیں۔ یہ بہت دلچسپ ہے کیونکہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کہ مختلف ہوتا ہے آپ کو r آپ کو ایک ہی فوکس ملتا ہے یہ تمام بیضوی یہ تمام تصویری منحنی خطوط ہیں جیسا کہ r cos t پلس ir sine t ملتا ہے کہ آپ کو مرتکز دائروں کا ایک پورا گروپ ملتا ہے جو تصویر کے منحنی خطوط ہیں۔ تمام بیضوی لیکن ان تمام بیضوی کا ایک ہی فوکی کو زکووسکی فنکشن کہا z پلس 1 پر z کے برابر f z ہے انہیں کنفوکل بیضوی کہتے ہیں ان سب کا فوکس ایک ہی ہے لہذا یہ فنکشن 1.41 ٹریس لیتے ہیں۔ اصل میں z اگر آپ وہ origin to ellipse جاتا ہے لہذا زوکووسکی فنکشن دائرے لیتا ہے جو مرکز میں ہوتا ہے۔ کی تصویر ایک بیضوی نشان کا پتہ لگاتی ہے لیکن بیضوی کا فوکس مائنس دو کوما صفر ہے لہذا ان کو زوکوسکی z دائرہ sa مرکز کے ساتھ بیضوی کہا جاتا ہے لہذا اگلی سلائیڈ ایک مشق ہے جو میں نے ابھی آپ کے لیے فوکس کا تعین کرنے کے لیے کی ہے۔ زکووسکی بیضوی کے وہ کی ایک بہت ہی خاص قدر کے لیے بیضوی نہیں ملتا ہے جسے میں آپ r کی ایک قدر کے لیے آپ کو r کیا ہیں 2 کوما 0 اور مائنس 2 کوما 0۔ کو دائرے کے طور پر لینے کے بجائے ایک دائرے کو ٹریس کرنے کے طور پر z پر چھوڑ دوں گا کہ اس کا اگلا پتہ لگائیں۔ اسی طرح کا مسئلہ کے ساتھ ایک زاویہ تھیٹا بناتا ہے x-axis اصل سے لامحدودیت تک سرنی کا پتہ لگاتا ہے رے کو ایک مثبت z ہم فرض کرتے ہیں کہ سائن i تھیٹا پلس cos میں t کے برابر ہے z کے بارے میں کیسے سوچتے ہیں؟ تھیٹا پلس یہ سائن تھیٹا یہ t cosine تو آپ اس رے جمع 1 پر f z کا z تلاش کرنا چاہتا ہوں لہذا f کی تصویر z سے انفینٹی تک مختلف ہوتی ہے اور تھیٹا فکسڈ ہے لہذا میں a 0 تھیٹا پر ہے مختلف ہوتا ہے اور تھیٹا طے ہوتا ہے جو آپ کو ملتا ہے جیسا کہ تصویر تصویر کو گھما دیتی ہے۔ منحنی خطوط t ہے اور جیسا کہ z ہائپربولاس ہیں میں ان کو زکووسکی ہائپربولاس کہنے جا رہا ہوں ان زکووسکی ہائپربولاس کے فوکس کو تلاش کریں یہ اندازہ لگانے کے لئے کوئی انعام نہیں ہے کہ وہ 2 کوما 0 اور مائنس 2 کوما 0 ہونے جا رہے ہیں۔ ہائپربولاس بھی کنفوکل ہیں اور ان کا فوکس وہی ہے جیسا کہ بیضوی اسلئے کونکس کا پورا کنبہ کنکس کا ایک کنفوکل خاندان ہے ظاہر کرتا ہے کہ زکووسکی ہائپربولاس نے زکووسکی بیضوی کو آرتھوگونلی طور پر ایک بار پھر کاٹ دیا ہے ہمیں اہ منحنی خطوط کا ایک آرتھوگونل نظام ملا ہے آپ کو منحنی خطوط کے دو خاندان ملے ہیں ایک بیضوی خاندان اور ہر ایک ہائپربولاس کا خاندان بیضوی ہر ہائپربولا کو کاٹ دے گا آرتھوگونلی طور پر ہمارے پاس آرتھوگونل ٹریجٹریز کا ایک جوڑا ہے یہ دلچسپ کیوں ہے یا یہ کیوں اہم ہے یہ دلچسپ ہے کیونکہ جیومیٹری خوبصورت ہے یہ اہم ہے کیونکہ زوکوسکی نے اسے ایرفوائلز کی تعمیر میں استعمال کیا اس لئے ایرو اسپیس انجینئرنگ میں ایپلی کیشنز موجود ہیں اور میں نے دیا آپ کو اس ویب سائٹ کا ایک خاص لنک ہے جہاں آپ ناسا دی گلن کے ذریعہ ایک مضمون تلاش کرسکتے ہیں۔ ریسرچ لیبارٹری جہاں آپ کو اس بات کی تفصیلات ملیں گی کہ زکووسکی نے اسے ایئرفوائلز کی تعمیر میں کیسے استعمال کیا اب زکووسکی فنکشن کو ایرو اسپیس انجینئرنگ کے علاوہ بالکل مختلف فیلڈ میں بھی لاگو کیا جا سکتا ہے اور یہی اگلی سلائیڈ میں ہونے والا ہے لیکن اس سے پہلے کہ میں اس پر آؤں۔ کہ میں پیچیدہ فنکشن تھیوری سے ایک اور مشق کو دوبارہ دیکھنے جا رہا ہوں یہاں ہم ایک مختلف مربع کے ذریعہ دیا جاتا ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ افقی لائنوں z برابر z کے f تک c سے f c فنکشن لیتے ہیں ایک بہت ہی عمدہ فنکشن ic جمع t کی تصویر

کو مختلف ہونے دیں t کو ٹھیک کریں اور c تو اپنے

کے برابر t plus ic کو z سے گزرتی ہے لہذا اگر میں c ایک افقی لکیر ہے جو پوائنٹ 0 کوما ic پلس t ٹریس t plus ic تو لیتا ہوں

ڈی سی iاسکوائر کیا جائے گا بی ٹی اسکوائر مائنس سی اسکوائر پلس 2 z تو

مائنس انفینٹی سے پلس انفینٹی تک مختلف ہوتا ہے 20 z تو یہ کیا پتہ چلتا ہے جب

اور کیا یہ ola وہ پیرابولاس ہیں اس پیراب کا فوکس تلاش کرتے ہیں tcاسکوائرڈ کوما 2 c اسکوائر مائنس t تو کیا ہوتا ہے وکر پر منحصر ہے آپ c توجہ

توقع کرتے ہیں کہ جواب نفی میں ہوگا اور یہ پیرابولاس کا ایک کنفوکل خاندان ہوگا لیکن براہ کرم اب تحقیق کریں کہ ہم افقی لکیروں کی تصویر لے

کوما a جمع یہ ایک عمودی لکیر ہے جو نقطہ a اصل نمبروں پر چلتا ہے t رہے ہیں آئیے عمودی لائنوں کی تصویر کو دیکھتے ہیں اور جب
کو ایک جمع کے برابر لیتا ہوں z سے گزرتی ہے۔ لہذا اگر میں 0
تاکہ دلیل میں ایک نقطہ کے طور پر طیارہ ہم ایک مربع مائنس ٹی مربع کوما 280 iat مربع جمع 2 t مربع ایک مربع مائنس z تو کیا ہوتا ہے
کو دیکھ رہے ہیں یہ پیرابولا کے لیے ایک پیرامیٹرائزیشن ہے وہاں پیرابولا کے لیے ایک پیرامیٹرک شکل ہے دوبارہ اس پیرابولا کو تلاش کریں اس
پیرابولا کا فوکس تلاش کریں اور جانچیں کہ آیا یہ پیرابولا اگلی مشق پر منحصر ہے کہ ورزش 19 کے پیرابولاس ورزش کے پیرابولاس کو کاٹتے
ہیں 20 آرتھوگونل طور پر ایک بار پھر ہمیں آرتھوگونل ٹریکجٹریز کا ایک جوڑا نظر آتا ہے لہذا اب ہم نے پیچیدہ فنکشن تھیوری سے تین مثالیں حاصل
آئیڈیاز پیچیدہ متغیر کے فنکشنز کا نظریہ ریاضی کی ایک گہری شاخ eep کی ہیں جن کا استعمال ہم نے نہیں کیا ہے۔ پیچیدہ فنکشن تھیوری سے
ہے لیکن ہم اس میں سے کوئی بھی استعمال نہیں کر رہے ہیں ہم صرف ان چیزوں کو دیکھ رہے ہیں جو آپ کے نصاب میں اچھی طرح سے ہیں یعنی
جمع 1 کی گنتی کیسے کی جائے اور صرف پیچیدہ z پر z ایک پیچیدہ نمبر کو مربع کرنے کا طریقہ ہر کوئی جانتا ہے۔ یہ کیسے کریں کہ
ضرب اور پیچیدہ تقسیم کے ان ابتدائی تصورات کو استعمال کرتے ہوئے ہم نے آرتھوگونل ٹریکجٹریز کی تین خوبصورت مثالیں حاصل کی ہیں ٹھیک
ہے
تو اب ہم دوبارہ تصویر کو دیکھتے ہیں کہ آدتیہ نے یہ تصویریں بنائی ہیں۔ ریاضی کا استعمال کرتے ہوئے آپ سرخ پیرابولاس اور نیلے پیرابولاس
کو دیکھتے ہیں آپ انہیں آرتھوگونلی طور پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں ہر نیلے رنگ کا منحنی خطوط ہر سرخ منحنی خطوط کو
آپس میں جوڑتا ہے اور تقطیع کے مقام پر تقطیع کا زاویہ 90 ڈگری ہے لہذا براہ کرم خود ہی آزمائیں اب ایسا کرنا بہت دلچسپ ہے۔ فلکیات کی
اور یہاں ہم ایک بہت ہی خوبصورت تھیوریم کی echanics خدمت میں زکووسکی فنکشن دی زوکووسکی فنکشن کا وعدہ کیا ہوا اطلاق آتا ہے۔
طرف آتے ہیں جسے بولن تھیوریم کہا جاتا ہے جو کہ 1911 کا ہے۔ یہ قابل ذکر ہے کہ زکووسکی فنکشن آسمانی میکانکس میں ایپلی کیشنز تلاش
کرتا ہے اور وہ زکووسکی بیضوی اور ہائپربولاس بولن کے تھیوریم کے ثبوت میں نمایاں ہوں گے یہ ایک پرانا نتیجہ ہے۔ بولون کے لیے کہ نقشہ
برابر 0۔ یہ w مربع پلس ds بذریعہ d 2 w مربع ہے سیاروں کی حرکت کی مساوات کو اس مساوات میں بدل دیتا ہے w مساوی w کا f
نہیں ہے۔ اصل وقت یہ ایک ری اسکیل شدہ وقت ہے بولن کے تھیوریم کے ثبوت میں زکووسکی s تفریق مساوات اب تک یقیناً آپ کو معلوم ہے کہ
میپ اور زکووسکی بیضوی خصوصیات بولن کے تھیوریم کا کہنا ہے کہ ایک بہت ہی واضح تبدیلی ہے جو تفریق مساوات کے ایک بہت ہی پیچیدہ
نظام کو تبدیل کرتی ہے یعنی تفریق مساوات جو حرکت کی رفتار کو کنٹرول کرتی ہے۔ سورج کے گرد سیارے دو جسموں کا مسئلہ سورج اور سیارہ
صرف ان دو جسموں کا نظام تفریق ہے۔ سورج کے گرد کسی سیارے کی حرکت کو کنٹرول کرنے والی ایک مساوات کو سیاروں کی حرکت اور اس
تفریق مساوات کا ارتقاء مساوی منتقلی کے ذریعے اس معصوم نظر آنے والی تفریق مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے، لیکن وہ تجزیاتی شکل جس
میں ہم ہیں بولن کی وجہ سے دیا گیا ہے آپ آسانی سے کیپلر کے سیاروں کی حرکت کے پہلے قانون کو ثابت کرنے کے لیے اس خیال کو استعمال
کر سکتے ہیں کوئی یہ ثابت کر سکتا ہے کہ سیارے سورج کے گرد بیضوی مدار میں گھومتے ہیں جس کی ایک وجہ بہت آسان ہے آپ آسانی سے
d2 w صفر کے برابر ہے لہذا ہمیں اس تفریق مساوات کو حل کرنا ہے w مربع پلس ds بذریعہ d2 w اس مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔
ہے۔ y ہے اور اس کا ایک خیالی حصہ x ایک پیچیدہ عدد ہے اس کا حقیقی حصہ w برابر 0۔ اب آپ دیکھیں گے کہ w مربع پلس ds بذریعہ
برابر 0 یہاں سادہ ہارمونک حرکات y مربع پلس d 2 y x ds برابر 0 x مربع پلس d 2 x x ds تو یہ مساوات واقعی دو مساواتیں ہیں
حاصل کرنے کی w کا s میں لے سکتے ہیں اور ہمیں s کو ب سائن y اور s کو کوزائن x کی دو مساواتیں ہیں آپ عام طور پر آپ
w ہے f کا w جس کے تحت اصل رفتار کیا ہے یاد رکھیں کہ فنکشن sine کا s کے برابر cosine کے ib جمع s ضرورت ہے
مربع ہوگا z w تھا سیارے کے موونگ پوائنٹ کا موونگ پوائنٹ کوآرڈینیٹ اس لیے zz مربع کے برابر اصل کوآرڈینیٹ
کا abi sinus جمع 2 s مربع سائن مربع b مائنس s مربع ہے cos ہے جو ایک مربع w مربع کا s z s کا s تو سیارے کی پوزیشن
سبب بنتا ہے
کو ختم کریں cosines کا خیالی حصہ لیں اور علامات اور z کا حقیقی حصہ اور z تو اب اگر آپ
تو کیا ہوگا؟ کیا ہم دیکھتے ہیں کہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ بیضوی کی پیرامیٹرک مساوات ہے
کہیں اور اس طرح بیضوی کی یہ y کے خیالی حصے کو s کے نام سے پکاریں اور x کے s تو مثال کے طور پر اس حقیقی حصے کو
2 n sine 2s si مربع s sine مربع s cosine 2 کے لحاظ سے s مربع cos مساوات کیا ہے پہلے سائن کے کوزائن کو ختم کریں
برابر 1 کا استعمال کریں اور آپ کو یہ sمربع 2 cos جمع sمربع 2 sine کے لحاظ سے مساوات sine 2s اسباب کی شرائط sinus
سے تقسیم کیا گیا ہے۔ مربع پورے b مربع کو مربع جمع b مائنس ایک مربع مائنس xمساوات اور وہ مساوات ملتی ہے جو آپ دیکھتے ہیں کہ 2
مربع 1 کے برابر یہ ایک بیضوی فوکی ہے جس کا فوکی اصل میں ہے یہ کوآرڈینیٹ جیومیٹری میں ایک بہت b مربع بذریعہ مربع y مربع جمع
آسان مشق ہے اور میں آپ سے گزارش کرتا ہوں کہ ایسا کریں
مساوات کی بدلی ہوئی مساوات ایک بیضوی w w تو ہم نے یہاں کیا ثابت کیا ہے؟ بولن کے تھیوریم کو یہ ثابت کرنے کے لیے استعمال کیا کہ اگر
ہے
ہے۔ ایک بیضوی z کا مقام z مساوات کا مربع ہے اور بیضوی کا مربع ایک اور بیضوی ہے جس کا فوکس اصل پر ہے لہذا w مساوات z تو
ہے جس کی اصل پر ایک فوکس ہے یعنی کیپلر کا پہلا قانون قائم کیا گیا ہے ٹھیک ہے حالانکہ بولن کا تھیوریم تفریق مساوات پر ایک نظریہ ہے ہم
اسے یہاں ثابت نہیں کریں گے کیونکہ یہ واقعی نصاب میں نہیں ہے لیکن میں صرف چیونٹی آپ کو بتانے کے لیے کہ تفریق مساوات کا نظریہ
نکل کر فزیکل سائنسز فزکس فلکیات کارٹوگرافی ایرو اسپیس انجینئرنگ کے مختلف حصوں تک پہنچ جاتا ہے اور یہ تھیوری نیوٹن کو پہلے ہی معلوم
تھا اور یہ کشش کے دوہرے قوانین کے نام سے جانا جاتا ہے ۔ کشش کے ان دوہرے قوانین کا کیا مطلب ہے اس تجزیاتی شکل میں جس میں ہم نے
بتایا ہے کہ تھیوریم بولن کی وجہ سے ہے درج ذیل دو سلائیڈوں میں میں آپ کو دو حوالے دینے جا رہا ہوں اور یہ دونوں حوالہ جات عظیم استادوں
کی لکھی ہوئی کتابیں ہیں ان میں سے ایک ہے۔ ایک عظیم ریاضی دان اور دوسرا ایک عظیم طبیعیات دان پہلا وی آرنلڈ ہے جس نے ہیوگینز بیرو نیوٹن
اور ہلک کے نام سے ایک کتاب لکھی اور ہم نے لیکچرز کا یہ سلسلہ نیوٹن کے کارنامے کے بارے میں بات کرتے ہوئے شروع کیا کہ نیوٹن کے کام
نے فلکیات کو ایک تجرباتی سائنس سے تبدیل کیا۔ ایک متحرک سائنس میں یہ چھوٹی کتاب آئزاک بیرو سے جدید دریاف
توں تک کا ایک خوشگوار سفر ہے۔ نیوٹن کے بعد کے دور کی دو صدیوں پر محیط فلکیات میں نیوٹن کے اصول کے بعد دو صدیوں پر محیط سفر زحل
کے حلقوں میں کرک ووڈ خلا کی دریافت کے ذریعے قابل ذکر آسانی کے ساتھ آگے بڑھتا ہے جس میں نیوٹن کے پرنسپیا میں الجبری جیومیٹری تھیم
کی ظاہری شکل پر کچھ گہری تجاویز پر تبصرے ہوتے ہیں۔ ضمیمہ کی عمر 94 میں۔ بحث قائل طور پر ہندسی اور خوبصورت ہے آسمانی میکانکس
کی فتح 69 صفحہ 69 پر بدنام زمانہ تھری باڈی مسئلہ پیئر سائمن لاپلیس کے یادگار کام اور آخر میں پوئن کیئر پوئن کیئر آسمانی میکانکس میں
انقلابی نئے طریقے ہیں جن میں سے ایک کے ذریعہ وضاحت کی گئی ہے۔ جدید آسمانی میکانکس میں سب سے نمایاں شراکت کرنے والوں میں
دوسرا حوالہ نوبل انعام یافتہ ایس چندر شیکر کا ہے جس نے عام قارئین کے لیے ایک کتاب نیوٹن پرنسپیا لکھی جسے آکسفورڈ یونیورسٹی پریس نے
میں شائع کیا۔ عنوان یہ کوئی آسان نہیں ہے ۔ ایڈنگ لیکن یہ اس کوشش کے قابل ہے کہ عام قاری کا مطلب عام آدمی نہیں ہے اس کا مطلب 1996
ہے کہ آپ وہ طلباء جو بیک وقت کیلکولس سیکھ رہے ہیں وہ فزکس سیکھ رہے ہیں وہ کیمسٹری سیکھ رہے ہیں وہ فزکس اور ریاضی کے کافی علم
سے آراستہ ہیں یہ ایسے طلباء کے لیے ہے۔ کہ یہ کتاب لکھی گئی ہے یقیناً یہ کتاب 600 صفحات کی کتاب ہے اور صفحہ 1 سے صفحہ 600

تک نہ پڑھی جائے میں آپ کو مشورہ دیتا ہوں کہ براہ راست صفحہ 57 پر جائیں اور آپ کیپلر کے ذریعے سیاروں کی حرکت کے تین قوانین کے
مکمل ثبوت دیکھیں۔ نیوٹن کے حرکت کے قوانین اور اس کے کشش ثقل کے عالمگیر قانون کو اس کے بعد آپ باب چھ کے ضمیمہ کو پڑھ سکتے ہیں
جہاں وہ سیاروں کی کشش کے دوہرے قوانین پر بحث کرتا ہے اور آپ کو وہاں بولن کے تھیوریم کا ثبوت بھی نظر آئے گا اور پھر آپ آگے بڑھ
سکتے ہیں۔ کیپلر مساوات کے باب سات تک اور الجبری جیومیٹری پر نظریہ جو نیوٹن کے اصول میں موجود ہے میں ایک دلکش ای کے حوالے سے
مزاحمت نہیں کر سکتا ایس چندر شیکھر کا مقالہ اور مضمون نیوٹن کی ذہانت کا مائیکل اینجلو کے ساتھ موازنہ کرتا ہے حوالہ اس سلائیڈ میں آٹھ
نمبر تین کے طور پر دیا گیا ہے چندر شیکر نے نیوٹن کی پرنسپیا کی تحریروں کا موازنہ مائیکل اینجیلو کی پینٹنگ سے کیا ہے یا سسٹین چیپل کی
چھت کا موازنہ مائیکل اینجیلو میں کیا ہے۔ تخلیقی صلاحی
توں کے انتہائی نایاب درجے کے کام کے طور پر آئیے دیکھتے ہیں کہ چندر شیکر کا کیا کہنا ہے میں آپ کو اس خوبصورت مضمون سے صرف
ایک اقتباس دوں گا اور میں آپ کو پرزور مشورہ دیتا ہوں کہ آپ اس مضمون کو اس کے خوبصورت انداز کے ساتھ ساتھ پرنسپیا اور مواد کے لیے
پڑھیں ۔ دونوں دائروں میں فریسکوز انسانی تخلیقی صلاحی
توں کے اعلیٰ ہے مثال اظہار ہیں میں ان کے بارے میں مزید کچھ نہیں کہنا چاہتا لیکن مجھے امید ہے کہ اس نے آپ کو نیوٹن اور مائیکل اینجیلو پر
فرض trajectories جینڈر شیکر کے اس مضمون کو پڑھنے پر آمادہ کیا ہوگا اب آئیے آرتھوگونل میں تفریق مساوات کی طرف آتے ہیں۔
ہم c2 کیا یہ ہمیشہ تلاش کرنا ممکن ہے۔ ایک آرتھوگونل سسٹم آف ٹریجیکٹریز c1 کریں کہ ہمیں منحنی خطوط کا ایک پیرامیٹر خاندان دیا گیا ہے
نے آرتھوگونل ٹریکجٹریز کے جوڑوں کی بہت سی مثالیں دیکھی ہیں لیکن اب میں آپ کو منحنی خطوط کا ایک پیرامیٹر فیملی دیتا ہوں اور میں آپ
سے پوچھتا ہوں کہ کیا کوئی آرتھوگونل ٹریجیکٹری ہے اور اس مسئلے کو سمجھنے کے لیے اسے کیسے تلاش کیا جائے، آئیے ہم فرض کریں کہ
c مساوی 0۔ ہم نے مثالیں دیکھی ہیں کہ آپ کے پاس ایک پیرامیٹر mdx plus ndy تفریق مساوات کو جنم دیتا ہے c1 منحنی خطوط کا نظام
کو دو مساوات کے درمیان ختم کرتے ہیں c کے ساتھ منحنی خطوط کا نظام ہے جس میں آپ فرق کرتے ہیں آپ کو ایک اور مساوات ملتی ہے آپ
اور آپ تفریق مساوات حاصل کریں ہم نے اس قسم کی بے شمار مثالیں دیکھی ہیں
کے برابر 0 ملی ہے۔ اب میں نے آپ کو پچھلے لیکچر mdx plus ndy تو اب میں فرض کرتا ہوں کہ یہ ہو گیا ہے اور آپ کو تفریق مساوات
میں پہلے ہی بتایا تھا کہ یہ تفریق مساوات 1.43 ہے۔ فرسٹ آرڈر سسٹم کے فیز منحنی خطوط کی تفریق مساوات یہ پہلا آرڈر سسٹم کیا ہے جس
vector کے برابر ہے m مائنس dt بذریعہ n y برابر dt بذریعہ dx کے مرحلے کے منحنی خطوط مساوات 1.43 ہیں 1.43
منحنی خطوط کا مماس ہے اور چونکہ آرتھوگونل ٹریجیکٹرز اصل کے لیے آرتھوگونل ہیں پہلے کا ٹینجنٹ دوسرے کے لیے mxyj مائنس nxyi
جہاں دو نظاموں کے ٹینجینٹ ایک دوسرے nj پلس ہونا چاہیے۔ mi نارمل بن جاتا ہے اس لیے آرتھوگونل ٹریجیکٹریز کے ٹینجنٹ ویکٹرز کو
کے لیے کھڑے ہوتے ہیں اس لیے پہلے کا ٹینجنٹ دوسرے کے لیے نارمل ہوگا اس لیے آرتھوگونل ٹریجیکٹریز اس سسٹم کے فیز منحنی خطوط ہیں
کے برابر ہے۔ لہٰذا 0 mdy مائنس ndx برابر آرتھوگونل ٹریجیکٹریز کے لیے تفریق مساوات dt بذریعہ dy برابر اور dt بذریعہ dx
کے نظام کو دیکھتے ہوئے ہم تفریق مساوات حاصل کرتے ہیں اور پھر ہم دیگر تفریق مساوات کے ذریعے آرتھوگونل ٹریجیکٹریز c1 منحنی خطوط
کے لیے تفریق c2 کے لیے اور پھر ہم c1 دیا جاتا ہے ہم تفریق مساوات حاصل کرتے ہیں۔ c1 سے c1 حاصل کرتے ہیں لہذا پہلے ہمیں
ہے جب بھی میں نے wh حاصل کرتے ہیں تاکہ یہ تھیوریم 1 c2 مساوات حاصل کرتے ہیں اس تفریق مساوات کو حل کرتے ہیں اور خاندان
برابر صفر ndy پلس mdx ابھی کہا ہے اس تھیوریم کے طور پر خلاصہ کیا جا سکتا ہے اگر منحنی خطوط کا ایک پیرامیٹر فیملی تفریق مساوات
کے ذریعہ دیا جاتا ہے
کے برابر ہے لہذا وسیع حالات میں منحنی خطوط کا کوئی بھی ایک i صفر mdy مائنس ndx تو آرتھوگونل ٹریکجٹریز کے لئے تفریق مساوات
پیرامیٹر فیملی آرتھوگونل ٹریجٹری کو تسلیم کرتا ہے میں وسیع حالات کہتا ہوں کیونکہ ہم حقیقت میں تفریق مساوات کے لیے وجودی تھیورمز پر
بحث نہیں کر رہے ہیں اور ہم نہیں جا رہے ہیں اور یہ وجودی تھیورمز مناسب حالات میں درست ہوں گے لیکن عملی حالات میں یہ حالات ہمیشہ
رہیں گے۔ مطمئن
تو آئیے اب ہم اسے آرتھوگونل ٹریکجٹریز کے کچھ مخصوص نظاموں پر آزماتے ہیں جن کا ہم نے پہلے سامنا کیا یقیناً مرتکز دائروں کا خاندان ہے
کے برابر 0 اخذ کیا ہے ydy جمع xdx اس کے لیے ہم نے اسے
برابر 0 یہ ایک متغیر الگ ہونے والی مساوات ہے اور اس کے حل xdy مائنس ydx تو تفریق مساوات کیا ہیں؟ آرتھوگونل ٹریجیکٹریز کے لیے
کے برابر ہیں اس لیے آرتھوگونل ٹریجیکٹری اصل کے ذریعے لکیریں ہیں اور ہر کوئی جانتا ہے کہ ایک دائرہ جس کے x یا mx برابر ہیں y
مربع y مربع مائنس x ذریعے اصل میں مرکز کے ذریعے ایک لکیر کاٹتا ہے آرتھوگونل طور پر ہم لے لیتے ہیں۔ اگلا ہم لے لیتے ہیں ہائپربولاس
ydx plus xdy کے برابر 0 ملے گا کیا آرتھوگونل ٹریجیکٹریز ydy مائنس x dx کو فوراً غائب کریں آپ کو c کا فرق کریں c برابر
برابر mod xy کے لئے تفریق مساوات ہے اس تفریق مساوات کو حل کریں ایک متغیر الگ ہونے والی مساوات ہے اور آپ کو equal to 0
c مربع برابر y مربع مائنس x سے مطلق قدروں کو ہٹاتے ہیں اور آپ کو مستطیل ہائپربولاس ملتا ہے جو ارکان کو کاٹتا ہے c ملتا ہے
اب ہم ایک اور مثال لیتے ہیں آپ منحنی خطوط کے اس ایک پیرامیٹر فیملی کو لیتے ہیں پاور مائنس ایکس مربع تک پہنچنے کے orthogonally
xce سے فرق کرتے ہیں جس طرح سے آپ کو مائنس 2 a کے برابر سیدھے dx لیے آرتھوگونل ٹریجیکٹریز کو تلاش کریں جس میں آپ اسے
ہے y مربع x کی طاقت مائنس ce مربع پر لیکن x حاصل ہوتا ہے پاور مائنس
dy کے برابر حاصل کرتے ہیں لہذا منحنی خطوط 1.47 کے خاندان کے لئے تفریق مساوات وہی ہے جو xy مائنس 2 dx بذریعہ dy تو ہم
کا ایک فنکشن y کو x برابر ہے 0۔ ہم dx مائنس xy dyبرابر ہے 0 سے۔ آرتھوگونل ٹریکجٹریز کے لیے تفریق مساوات 2 xydx جمع 2
ایک مثبت مستقل ہٹانا ہے۔ مطلق a مربع کے برابر ہے جہاں y کی طاقت ae کو mod x سمجھیں گے اور ان محلولوں کو ضم کریں گے جو
کے برابر 0 یہاں شامل نہیں ہے کیونکہ جب آپ متغیرات کی x قدر اور آپ کو آرتھوگونل ٹریجیکٹوریس کا ایک خاندان ملتا ہے نوٹ کریں کہ
علیحدگی کا طریقہ کرتے ہیں
کے برابر 0 بھی ایک خاص حل ہے اور ہمیں ملتا ہے۔ یہ قابل فہم ہے کیونکہ اصل نظام کے تمام منحنی x سے تقسیم کر رہے ہیں اور x تو ہم
محور کو کاٹتے ہیں y خطوط گھنٹی کی شکل کے منحنی خطوط ہیں جب وہ
مربع y پاور e ملے گا۔ c کے برابر x تو ان سب میں ٹینجنٹ افقی ٹینجنٹ ہوتے ہیں اور اس لیے مطلق قدر کی اصطلاح کو ہٹانے سے آپ کو
کے کنیے کے لئے آرتھوگونل ٹریکجٹریز کا تعین y کوئی بھی مستقل کنواں ہے اب ہم چند مثالوں کی طرف آتے ہیں لہذا پیرابولاس c میں جہاں
محور آرتھوگونل ٹریکجٹریز y مربع کے لئے یہ پہلا مسئلہ ہے دوسرا مسئلہ دائروں کے خاندان پر غور کرنا ہے اصل میں kx برابر y کریں
کے لیے تفریق مساوات تلاش کریں، ذہن میں رکھیں کہ میں آپ سے صرف یہ کہہ رہا ہوں کہ تفریق مساوات کو مربوط کرنے والے آرتھوگونل
کو 1 f کے فنکشن z ٹریکجٹریز کے لیے تفریق مساواتیں تلاش کریں اگلے باب میں جب آپ یکساں تفریق مساوات پر بحث کریں گے اور پھر
کے منحنی z کے برابر 1 پر z کے f کے برابر سمجھیں اس نقشے کے نیچے افقی اور عمودی لکیروں کی تصویریں تلاش کریں z کے اوپر
f خطوط حاصل کریں اور ورزش 23 سے متعلق ہوں۔ ہم نے پیرابولاس کے ساتھ اسی طرح کی ورزش کی ہے۔ اب میں آپ سے کہہ رہا ہوں کہ
کے برابر ہے آپ کو پیچیدہ تجزیہ سے آنے والی چوتھی مثال ملے گی۔ اور آخری سلائیڈ آج کے z کے ساتھ وہی مشق کریں جو 1 پر z کے
لیکچر کے لیے دو مزید مشقوں کے بارے میں ہے، سماکشی حلقوں کے ایک پیرامیٹر فیملی کے لیے آرتھوگونل ٹریکجٹریز کے لیے تفریق مساوات

برابر 0 لیکن حلقوں کے مراکز 2 کوما 0 تھے۔ اور مائنس 2 کوما 0 اور lambda s 2 جمع s 1 تلاش کریں ایک پوائنٹ 1.37 یاد رکھیں کہ رداس 1 اور ہمیں سماکشی حلقوں کا ایک خاندان ملا ہے جس نے آرتھوگونل ٹریجیکٹری کے لیے تفریق مساوات تلاش کی ہے میں آپ سے تفریق مساوات کو حل کرنے کے لیے نہیں کہہ رہا ہوں بس تفریق مساوات حاصل کریں اور آخر میں میں نے آپ سے پوچھا کنفوکل کونکس کا خاندان کنفوکل کونکس کے اس خاندان کے لیے تفریق مساوات کا تعین کرنے اور آرتھوگونل ٹریکجٹریز کے لیے تفریق مساوات کا پتہ لگانے کے لیے آپ کو کچھ حیرت انگیز ہوتا نظر آئے گا اور میں چاہوں گا کہ آپ اس رجحان کی وضاحت تلاش کریں، مجھے لگتا ہے کہ ہم آج کے لیے یہاں رک جائیں گے اور ہم لیکچرز کا یہ سلسلہ جاری رکھیں گے اور اگلے لیکچر میں میں ہم جنس تفریق مساوات پر بات کروں گا شکریہ تم