అవకలన సమీకరణాలపై సిరీస్‌లోని ఈ నాల్గవ ఉపన్యాసానికి విద్యార్థులను స్వాగతించండి
కాబట్టి మనం చివరిసారి ఎక్కడ ఆగిపోయామో
అనే స్లయిడ్‌తో ప్రారంభిద్దాం వ్యాయామ సంఖ్య 10 స్లయిడ్‌ని చూద్దాం, మేము ఎక్కడ ఆపివేస్తామో అక్కడ
y-అక్షాన్ని తాకిన అన్ని సర్కిల్‌ల కుటుంబాన్ని తీసుకుంటాము.
ఈ
సర్కిల్‌లను నీలిరంగు పెన్‌తో గీయమని మరియు నీలిరంగు వృత్తాలకు ఆర్తోగోనల్‌గా ఉండే ఎరుపు పెన్ సర్కిల్‌లను కూడా గీయమని నేను మిమ్మల్ని అడిగాను
మరియు మీ చిత్రంతో ఈ చిత్రాన్ని
ఇప్పటికే ఉదహరించిన గ్రామీణ మరియు సెలవులు పుస్తకంలోని 635వ పేజీలోని చిత్రంతో పోల్చడం ఆసక్తికరంగా ఉంది కాబట్టి ప్రశ్న మీ చిత్రం
రెస్నిక్ మరియు హాలిడేస్ బుక్‌పై ఈ చిత్రాన్ని సుమారుగా అంచనా వేస్తుందా మీరు రష్యన్ హాలిడేస్ బుక్‌లో చూసే చిత్రం ఈక్విపోటెన్షియల్ లైన్‌లు మరియు ఎలక్ట్రిక్ ద్విధ్రువం కారణంగా ఏర్పడే శక్తి రేఖలను వర్ణించే చిత్రం
మరియు నా వద్ద ఉన్న ప్రశ్న పొడవు ఎంత ద్విధ్రువం చిన్నదిగా మారుతుంది మరియు
మీరు రూపొందించిన చిత్రం చిన్నదిగా మారుతుంది రెస్నిక్ మరియు హాలిడేలో ఉన్న చిత్రాన్ని ఇంచుమించుగా అంచనా వేస్తుంది
సరే నాకు ఖచ్చితంగా తెలియదు ఈథర్ ఆ సర్కిల్‌ల స్కెచింగ్‌ని పూర్తి
చేసాను, అయితే నేను ఇక్కడ నా వద్ద ఉన్న వాటిని మీకు చూపుతాను కాబట్టి అవును చూద్దాం కాబట్టి
నేను వాటిలో నాలుగు గీసిన y అక్షాన్ని తాకిన నీలిరంగు వృత్తాలు మరియు నేను కూడా నాలుగు ఎరుపు వృత్తాలు గీసాను నీలిరంగు
వృత్తాలు లంబ కోణంలో ఉంటాయి మరియు ఈ ఎరుపు వృత్తాలు వృత్తాలు మూలం వద్ద x- అక్షానికి టాంజెంట్‌గా ఉంటాయి, ఇది మీ వద్ద
ఉన్న చక్కని చిత్రం మరియు మేము ఈ ఉపన్యాస సిరీస్‌లోని తర్వాతి భాగంలో ఈ రెండు కుటుంబాల సర్కిల్‌లకు తిరిగి వస్తాము
కాబట్టి ఇప్పుడు మనం ఉన్న ప్రదేశానికి తిరిగి
వెళ్లాం కాబట్టి ఇప్పుడు మనం మరొక సమస్యను పరిశీలిద్దాం యూనిట్ వ్యాసార్థం మరియు కేంద్రాలు
2 కామా 0 మరియు మైనస్ 2 కామా 0 ఉన్న రెండు సర్కిల్‌లను పరిశీలిద్దాం.
సర్కిల్‌లు యూనిట్ వ్యాసార్థం వ్యాసార్థం 1 మరియు
కేంద్రాలు ఇక్కడ ఉంచబడ్డాయి మైనస్ 2 కామా 0 మరియు 2 కామా 0.
మీరు
ఈ సర్కిల్‌ల సమీకరణాన్ని సులభంగా వ్రాయవచ్చు వృత్తాలలో ఒకదాని యొక్క సమీకరణం
x మైనస్ 2 స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ 1కి సమానం.
మరొకదానికి x ప్లస్ 2 స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y
స్క్వేర్డ్ సమానం 1.
ఇప్పుడు ca మొదటి సమీకరణం s 1 0కి సమానం e వ్యక్తీకరణ x మైనస్ 2
స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ మైనస్ 1 మనం దానిని సింప్లిసిటీ కోసం s1 అని పిలుద్దాం మరియు ఇతర వ్యక్తీకరణ
x ప్లస్ 2 స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ మైనస్ 1 దాన్ని s2 అని పిలుద్దాం.

స్లయిడ్ s1 ప్లస్ లాంబ్డా s2 స్లయిడ్‌లో 1.
37 ఈ సమీకరణాన్ని చూడండి, ఇక్కడ లాంబ్డా అనేది వాస్తవ సంఖ్య మరియు
మీరు లాంబ్డాను మార్చినప్పుడు మీరు 1.
37 సర్కిల్‌ల కుటుంబాన్ని పొందుతారు కాబట్టి 1.
37 అనే సమీకరణం సర్కిల్‌ల కుటుంబాన్ని సూచిస్తుంది
మరియు అడిగిన ప్రశ్న కుటుంబానికి మొదటి ఆర్డర్ అవకలన సమీకరణాన్ని
కనుగొనడానికి 1.
37 మీరు దీన్ని ఎలా చేస్తారు మీరు సమీకరణం 1.
37ని తీసుకుంటారు మరియు మీరు
దాన్ని xకి సంబంధించి వేరు చేసి మీకు మరో సమీకరణం లభిస్తుంది మరియు మీరు ఈ రెండు సమీకరణాల మధ్య లాంబ్డాను తొలగించి,
మీ అవకలన సమీకరణాన్ని పొందండి సరే స్కెచ్ వృత్తాలు 1.
37 నీలిరంగు పెన్‌తో మరియు
ఆపై మినహాయింపు ఉందా లాంబ్డా యొక్క నిర్దిష్ట విలువ దీనికి ఈ సమీకరణం
వృత్తం కాదు లాంబ్డా విలువ ఒకటి ఉంది, దీనికి 1.
37 వృత్తం కాదు అది సోమ్ e ఇతర వక్రరేఖ పరిమితి చేసే
కేస్ అంటే ఏమిటి అంటే మీ చిత్రంలో ఉన్న పరిమితి కేస్‌ను సూచించండి

అల్లాగే నీలిరంగు సర్కిల్‌లను ఆర్తోగోనల్‌గా కత్తిరించే ఎరుపు రంగు పెన్ సర్కిల్‌లతో స్కెచ్ చేయండి, తద్వారా మీరు మళ్లీ
అందమైన చిత్రాన్ని పొందుతారు మరియు తదుపరి స్లయిడ్‌లో మీరు చూస్తారు ఆ వ్యక్తీకరణలు sx మైనస్ 2 స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ మైనస్ 1 మీరు సరళీకృతం చేసినప్పుడు మీకు x స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ మైనస్ 4x ప్లస్ 3 వస్తుంది.

మరియు s2 x స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ ప్లస్ 4x ప్లస్ 3 మరియు ఈక్వేషన్ 1.
37లో
వివరంగా వ్రాయబడింది మరియు మీరు xకి సంబంధించి ఈ సమీకరణాన్ని వేరు చేస్తారు మీకు మరో సమీకరణం లభిస్తుంది, మీరు
లాంబ్డాతో కూడిన రెండు సమీకరణాలను పొందుతారు, మీరు లాంబ్డాను నిర్మూలించవచ్చు మరియు మీరు కుటుంబానికి సంబంధించిన మీ అవకలన సమీకరణాన్ని పొందుతారు, మీరు ఎలక్ట్రోస్టాటిక్స్‌లో ఈక్విపోటెన్షియల్ వక్రతలను గురించి ఆలోచించగలరా
నేను మీకు సూచనను ఇచ్చాను 635వ పేజీలోని రెస్నిక్ మరియు హాలిడేస్ బుక్‌లోని చిత్రాలు ఇప్పుడు
మీకు మరొక కుటుంబ సర్కిల్‌లు వచ్చాయి ఈ సర్కిల్‌ల ఈక్విపోటెన్షియల్
లైన్‌లు నిర్దిష్ట ఛార్జీల కాన్ఫిగరేషన్ మీరు దీని గురించి ఆలోచించినట్లుగా, మీ
భౌతిక అంతర్ దృష్టి పరిస్థితిని నిర్మించడంలో మీకు సహాయపడుతుందా , ఈక్విపోటెన్షియల్ పంక్తులు ఖచ్చితంగా ఈ సమీకరణం x స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ మైనస్ 4x ద్వారా అందించబడే విధంగా ఛార్జీల సెటప్‌తో సెటప్‌ను రూపొందించడంలో మీకు సహాయపడుతుందా 3 ప్లస్ లాంబ్డా సార్లు x స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ ప్లస్ 4x ప్లస్ 3 0కి సమానం
.
వ్యాయామం 12లో ఉన్న ఈక్ పొటెన్షియల్ వక్రతలు ఉన్న భౌతిక వ్యవస్థను సెటప్ చేయడంలో మీరు విజయవంతమయ్యారని అనుకుందాం.
కాబట్టి ఇక్కడ వర్ణించబడిన
సమీకరణ రేఖల గురించి ఏమిటి? 635వ పేజీలోని రెజ్లింగ్ హాలిడేస్ పుస్తకంలోని చిత్రాలను మీరు చూస్తే, అతను ఈక్విపోటెన్షియల్ పంక్తులను ఘన రేఖల ద్వారా మరియు శక్తి రేఖలను
చుక్కల రేఖల ద్వారా వర్ణించాడు మరియు 635వ పేజీలోని ఆ చిత్రాలలో చుక్కల పంక్తులు ఘన పంక్తులను కలుస్తాయి.

లంబ కోణాల వద్ద శక్తి రేఖలు లంబ కోణాల వెంట ఈక్విపోటెన్షియల్ లైన్‌లను కలుస్తాయి,
కాబట్టి ప్రశ్న ఏమిటంటే , బలం యొక్క రేఖలు ఎలా ఉంటాయో మీరు గుర్తించగలరా? ఇ
మీరు గీసిన ఎరుపు వృత్తాలు మరియు ఈక్విపోటెన్షియల్ లైన్‌లు మీరు గీసిన నీలిరంగు వృత్తాలు
కావచ్చు, ఒక సూచనగా నేను మీకు ఇస్తాను మీరు సెటప్‌ను త్రీ డైమెన్షన్‌లలో ఆలోచించాలి
సెటప్ త్రీ డైమెన్షనల్ స్పేస్‌లో ఉంటుంది మరియు మీరు త్రీ డైమెన్షనల్ స్పేస్‌లో తీయండి, అది
ఈక్విపోటెన్షియల్ ఉపరితలాలు అవుతుంది మరియు మీరు ఉపరితలాన్ని xy ప్లేన్ ద్వారా స్లైస్ చేసి, ఆపై
xy ప్లేన్‌లోని చిత్రాన్ని చూడండి మీరు ఉపరితలం తీసిన తర్వాత xy ప్లేన్‌తో స్లైస్ చేస్తే xyలో వంపు వస్తుంది
విమానం కాదు కాబట్టి మీరు త్రీ డైమెన్షనల్ స్పేస్‌లో సెటప్ చేయాలి, ఆపై
చిత్రాన్ని xy ప్లేన్‌తో ముక్కలు చేసి, క్రాస్ సెక్షన్‌ని చూడండి, నేను మీకు సమాధానం ఇస్తాను గ్రిఫిత్ పుస్తకంలోని 107వ సమస్య 2.
47 లో చూడవచ్చు ఎలక్ట్రోడైనమిక్స్ పరిచయం
1999లో కనిపించిన మూడవ ఎడిషన్
పుస్తకం యొక్క ఎడిషన్ నంబర్‌పై శ్రద్ధ వహించండి, కాబట్టి ఇది ఎలక్ట్రోస్టాటిక్స్ నుండి మరొక ఉదాహరణ
కాబట్టి అవి మీకు చూపుతున్న ఈ ఉదాహరణలు ఏమిటి మీకు లభించిన రెండు వక్రరేఖల కుటుంబాలు
నీలం వృత్తాలు నీలం వృత్తాల కుటుంబం మరియు ఎరుపు వృత్తాలు మరియు ఎరుపు వక్రతలు
మరియు నీలం వక్రతలు ఒకదానికొకటి లంబ కోణంలో కలుస్తాయి .
వక్రరేఖల యొక్క ఒక పారామెట్రిక్ కుటుంబం మొదటి క్వాడ్రంట్‌లోని సర్కిల్‌ల
యొక్క ఒక పరామితి కుటుంబానికి సమీకరణాలను వ్రాసి, రెండు
సమన్వయ అక్షాలను తాకడం ద్వారా సర్కిల్‌ల సి కామా సి వ్యాసార్థం cx మైనస్
c మొత్తం స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y మైనస్ cతో ఏ విధంగా ఉంటుంది xకి సంబంధించి మొత్తం స్క్వేర్డ్ సమానం c స్క్వేర్డ్ డిఫరెన్సియేట్ తో
మీరు మరో సమీకరణాన్ని పొందుతారు ఈ రెండు సమీకరణాల మధ్య cని తొలగించండి మరియు
మీరు మీ అవకలన సమీకరణ సమస్య సంఖ్య 15 ని పొందుతారు, మీరు 8xకి సమానమైన పారాబొలా y స్క్వేర్‌ను చూడండి మరియు
ఈ పారాబొలాపై ప్రతి పాయింట్‌లో ఉంది ఒక టాంజెంట్ లైన్ మరియు ఒక పాయింట్ పారాబొలాతో పాటు మారుతూ ఉంటుంది కాబట్టి

మీరు ఒక పరామితి పంక్తుల కుటుంబాన్ని పొందుతారు మీరు పారాబొలాకు టాంజెంట్ లైన్‌లను పొందుతారు t మళ్లీ టాంజెంట్ లైన్‌ల యొక్క ఒక పరామితి కుటుంబం ఉదాహరణకు మీరు స్క్వేర్ 280 వద్ద ఒక పాయింట్‌ని తీసుకోవచ్చు.

మీరు పారామితి పారాబొలా ఎలా ఉంటుందో గుర్తుంచుకోండి మరియు t అనేది
పారాబొలా యొక్క ప్రతి పాయింట్‌కి నిజమైన రేఖతో పాటు మారుతూ ఉండే పరామితి 80 స్క్వేర్డ్ కామా 280 ఈ సందర్భంలో 2 కాబట్టి
మీరు స్క్వేర్డ్ కామా 280 వద్ద పాయింట్ వద్ద టాంజెంట్ యొక్క సమీకరణాన్ని కనుగొంటారు మరియు
మీరు t ద్వారా పారామితి చేయబడిన పంక్తుల యొక్క ఒక పరామితి కుటుంబాన్ని పొందుతారు మరియు
ఈ పంక్తుల కోసం అవకలన సమీకరణాలను కనుగొనండి నేను అనే మూడవ సమస్య మీకు అందించడం
అనేది వక్రరేఖల వ్యవస్థను చూడండి 9 ప్లస్ c ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ 4 ప్లస్ c 1కి సమానం.

కాబట్టి ఇక్కడ ఉన్న పరామితి ఏంటి అంటే cc అనేది వాస్తవ సంఖ్యల ఆధారంగా మారుతూ ఉంటుంది మీరు వక్రరేఖల యొక్క ఒక పరామితి కుటుంబాన్ని పొందుతారు, అవి శంఖాకారాలు కొన్ని వాటిలో దీర్ఘవృత్తాలు ఉన్నాయి మరియు వాటిలో కొన్ని
హైపర్బోలాస్ అని నేను c ని మైనస్ 100 గా తీసుకుంటే, ఈ సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరిచే వక్రరేఖ
లేదు కాబట్టి c భయంకరమైన ప్రతికూలంగా ఉండకూడదు కాబట్టి సి
మైనస్ 9 నుండి i వరకు ఒక నిర్దిష్ట పరిధికి nfinity మైనస్ 9 మినహాయిస్తే మీరు కోనిక్‌ల కుటుంబాన్ని
పొందుతారు మీరు కోనిక్స్ యొక్క ఒక పరామితి కుటుంబాన్ని పొందుతారు
హైపర్‌బోలాస్ కుటుంబంలో దీర్ఘవృత్తాకార కుటుంబాన్ని పొందుతారు
ఈ కుటుంబాన్ని కాన్ఫోకల్ కుటుంబం అంటారు మరియు మీరు
ఈ కుటుంబం ద్వారా సంతృప్తి చెందిన అవకలన సమీకరణాన్ని కనుగొనడానికి మీరు ఏమి చేయాలి వక్రరేఖలు ఉన్నాయి కాబట్టి
మీరు దాన్ని మళ్లీ ఎలా చేయాలి xకి సంబంధించి ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని తేడాగా గుర్తించండి
గుణాలను మీరు 2 x 9
ప్లస్ c ప్లస్ 2 yy డాష్‌పై 4 ప్లస్ cకి సమానం 0 కు సమానం 0 మీరు పొందే వాటిని రద్దు చేస్తుంది
అసలు సమీకరణం మరియు కొత్త సమీకరణం వాటిని 1 మీద 9 ప్లస్ c మరియు 1
మీద 4 ప్లస్ c కోసం సమీకరణాలుగా పరిగణిస్తాయి, ఇవ్వబడిన సమీకరణం ఇప్పటికే స్లయిడ్‌లో స్లయిడ్‌లో ఉంది, మీరు x స్క్వేర్డ్
మీద 9 ప్లస్ c ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ 4 ప్లస్ c ఉన్నాయి xకి సంబంధించి భేదం చేసిన తర్వాత 1కి సమానం
మీకు మరో సమీకరణం వస్తుంది, మీకు 1 మీద 9 ప్లస్ సి మరియు 1 మీద 4 ప్లస్ సి కోసం రెండు
సమీకరణాలు వచ్చాయి, ఈ రెండు సమీకరణాలను ఏకకాలంలో పరిష్కరిస్తే మీకు 1 మీద 9 ప్లస్ సి 1 మీద 4 ప్లస్ సితో సమానం దేనికైనా సమానం
రెసిప్రోకల్స్ 9 ప్లస్ సి దేనికైనా సమానం 4 ప్లస్ సి దేనికైనా సమానం తేడాను తీసుకోండి
సి పోతుంది మరియు మీరు అవకలన సమీకరణాన్ని పొందుతారు
ఇది కోనిక్స్ యొక్క ఈ ఒక పరామితి కుటుంబం ద్వారా సంతృప్తి చెందిన అవకలన సమీకరణం ఇది చాలా
ఆసక్తికరమైన వ్యాయామం ఎందుకంటే దయచేసి దీన్ని చేయండి
మేము ఈ సమస్యకు అతి త్వరలో తిరిగి
వస్తాము సరే మీరు రెస్నిక్ మరియు హాలిడేస్ బుక్‌లోని 635వ పేజీని తిరిగి చూస్తే ఆర్తోగోనల్ ట్రాజెక్టరీలు
సూచించినట్లుగా విమానంలోని
వక్రరేఖల యొక్క క్రింది జ్యామితీయ కాన్ఫిగరేషన్‌కు దారి తీస్తుంది.

విమానంలో వక్రరేఖల వ్యవస్థలు కాబట్టి విమానంలోని ఆర్తోగోనల్ వంపులు అంటే ఏమిటి అవి విమానంలోని రెండు వక్రరేఖల వ్యవస్థలు
c1 మరియు వక్రతల సమితి c2 c1
లోని ప్రతి వక్రత c2లోని ప్రతి వక్రరేఖను లంబ కోణంలో కలుస్తుంది నీలి వృత్తాలు మరియు మీ ఎరుపు వృత్తాలు ప్రతి
నీలి వృత్తం ప్రతి ఎరుపు వృత్తాన్ని ఆర్తోగోనల్‌గా కలుస్తుంది కాబట్టి అలాంటి రెండు వ్యవస్థలను ఒకదానికొకటి ఆర్తోగోనల్ పథాలు అంటారు
కాబట్టి మేము ఇలా అంటాము కుటుంబం c2
అనేది వక్రరేఖలు c1 కుటుంబానికి ఆర్తోగోనల్ వక్రరేఖల వ్యవస్థ మరియు దీనికి విరుద్ధంగా ఆర్తోగోనల్ ట్రాజెక్టరీస్ అనే పదబంధాన్ని తరచుగా
ఉపయోగిస్తారు ఈ సందర్భంలో మేము c2 కుటుంబానికి c1 కు ఆర్తోగోనల్ పథం అని చెబుతాము
మరియు దీనికి విరుద్ధంగా లేదా మేము చెబుతాము c1 మరియు c2 అనేవి ఒకదానికొకటి ఆర్తోగోనల్ పథాలు

అవి ఒకదానికొకటి ఆర్తోగోనల్‌గా ఉంటాయి, వాటి గురించి పట్టించుకునే ఆర్తోగోనల్ పథాలను మనం ఎందుకు అధ్యయనం చేయాలి
కారణం నంబర్ వన్ అవి అందమైన జ్యామితి
ఎల్లప్పుడూ ఆకర్షణీయంగా ఉంటాయి కాబట్టి అవి చాలా అందంగా ఉంటాయి కాబట్టి తగిన కారణం అయితే కావాలనుకునే వారికి సరిపోతుంది
ఫ్లూయిడ్ మెకానిక్స్‌లో కనిపించే వాస్తవిక ఉదాహరణలను చూడటానికి , ఆప్టిక్స్‌లో
మీరు వేవ్ ఫ్రంట్‌లను పొందారని మరియు మీరు కిరణాలు పొందారని గుర్తుచేసుకుంటారు కిరణాలు ఎల్లప్పుడూ స్నేహితులకు లంబంగా ఉంటాయి
కాబట్టి తరంగ స్నేహితులు   వస్తువుల కుటుంబాన్ని ఏర్పరుస్తారు మరియు కిరణాలు వేరే సమితిని ఏర్పరుస్తాయి.

ఒకదానిలోని వస్తువులు మరియు మూలకాలు మరొకదానిలోని మూలకాలను లంబ కోణంలో కలుస్తాయి కాబట్టి ఆర్తోగోనల్ పథాలు సహజంగా ఆప్టిక్‌లో కనిపిస్తాయి మ్యాథమెటికల్ కార్టోగ్రఫీలో ఆర్తోగోనల్ పథాలు కనిపిస్తాయి,
ఇది కార్టోగ్రఫీ అంటే ఏమిటి, ఇది మ్యాప్ మేకింగ్ సైన్స్ చాలా
పాతది మరియు ఇది చాలా గొప్పది మరియు చాలా గణితశాస్త్రం,
ఫిన్‌లాండ్‌కు చెందిన ఫిన్నిష్ కార్టోగ్రాఫర్స్ కార్టోగ్రాఫర్లు అద్భుతమైన పని చేసారు వారు గణనీయంగా సహకరించారు.

మీరు భూగోళాన్ని ఎప్పుడైనా చూసినట్లయితే కార్టోగ్రఫీ శాస్త్రం అక్షాంశాలు మరియు రేఖాంశాలు ఒకదానికొకటి ఆర్తోగోనల్‌గా కత్తిరించబడతాయని మీరు గమనించారు, తద్వారా అక్షాంశాల
కుటుంబం   మరియు రేఖాంశాల కుటుంబం
ఒక జత ఆర్తోగోనల్ పథాలను ఏర్పరుస్తాయి కాబట్టి భౌగోళిక
నాటకాలు మరియు ముఖ్యమైన గణనల్లో ఆర్తోగోనల్ పథాలు కనిపిస్తాయి.
  భౌగోళిక శాస్త్రంలో పాత్ర పుస్తకంలోని 8వ అధ్యాయం చూడండి.
 మరియు
18వ మరియు ప్రారంభ 1 యొక్క ఇద్దరు గ్రేట్ మాస్టర్స్ గాస్ 9వ శతాబ్దం వారు ఇప్పటికే కార్టోగ్రఫీకి సహకరించారు, దీని పేరు
కార్టోగ్రఫీ శాస్త్రంలో కనిపిస్తుంది లాంబెర్ట్, అతను కూడా గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు, ఇప్పుడు మనం గణితంలో ఒక ప్రాంతానికి వెళ్లి ఇక్కడ
ఆర్తోగోనల్ పథాలు ఎలా కనిపిస్తాయో వివరిస్తాము మరియు ఈ గణిత ప్రాంతాన్ని ఎలా పిలుస్తామో వివరిస్తాము.

కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్ యొక్క ఫంక్షన్ల సిద్ధాంతం మరియు ఈ ఆలోచనలు ఏరోస్పేస్ ఇంజనీరింగ్ ద్వారా ఉపయోగించబడతాయి కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్స్ కోసం ఫంక్షన్‌ల సిద్ధాంతం ఏరోస్పేస్ ఇంజనీర్లచే ఉపయోగించబడుతుంది కాబట్టి
కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్స్ కోసం ఫంక్షన్ల సిద్ధాంతం నుండి వచ్చే కొన్ని సాధారణ ఉదాహరణలను చూద్దాం
నేను మీకు హామీ ఇస్తున్నాను నేను ఇక్కడ మాట్లాడిన మీకు ఇప్పటికే తెలియని ఏదీ ఉపయోగించవద్దు
మీ 12 స్టాండర్డ్ సిలబస్‌ని మించి పోతుంది కాబట్టి
కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్ యొక్క ఫంక్షన్‌ల సిద్ధాంతాన్ని చూసి భయపడవద్దు కాబట్టి మనం c నుండి f ఫంక్షన్‌ని తీసుకుందాం
cకి f అందించిన z z వర్గానికి సమానం మీరు దానిని నిజమైన మరియు ఊహాత్మక
భాగాలుగా విభజిస్తారు, f యొక్క z సమానం uxy ప్లస్ ivxy అని వ్రాయండి కాబట్టి z యొక్క f యొక్క నిజమైన భాగం ఏమిటి
zని x ప్లస్ iy అని వ్రాసి, మీరు దానిని వర్గీకరించండి   ఊహాజనిత భాగం నుండి xy కి స్క్వేర్ చేయబడిన వాస్తవ భాగం x స్క్వేర్డ్ మైనస్
y స్క్వేర్ కాబట్టి ఇప్పుడు మనం u   స్థిరంగా ఉండే వక్రరేఖల వ్యవస్థను చూద్దాం
మరియు ఇతర   పదాలలో v సమానం స్థిరంగా ఉంటుంది x స్క్వేర్డ్ మైనస్ y స్క్వేర్డ్
సమానం a మరియు 2 xy సమానం b కాబట్టి మీరు మళ్లీ
z స్క్వేర్డ్ zకి సమానమైన f   యొక్క z స్క్వేర్డ్ z x ప్లస్ iy స్క్వేర్ అనే కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్ యొక్క ఫంక్షన్‌ని తీసుకుంటున్నారు.
  వాస్తవ భాగం uxy అనేది ఊహాత్మక
భాగం bxyని తీసుకుంటుంది కాబట్టి uxyx స్క్వేర్డ్ మైనస్ y స్క్వేర్డ్ అంటే ఏమిటి vxy 2 xy కుడి మరియు సెట్ u
స్థిరాంకానికి సమానం మరియు సెట్ v స్థిరాంకానికి సమానం కాబట్టి uxy సమానం a మరియు vxy ఈ
వక్రరేఖల కుటుంబం ఏమిటి uxy సమానం a అంటే ఏమిటి వక్రతలు x స్క్వేర్డ్ మైనస్ y స్క్వేర్డ్ సమానం a అవి దీర్ఘచతురస్రాకార హైపర్‌బోలాస్ యొక్క కుటుంబం ఈ కుటుంబం v అంటే bకి సమానం అంటే 2xy సమానం b అంటే మళ్లీ మీరు దీర్ఘచతురస్రాకారపు కుటుంబాన్ని పొందుతారు హైపర్‌బోలాస్‌ని నేను వదిలివేస్తాను

ఆ x స్క్వేర్ నిమిని ధృవీకరించడానికి మీకు us y స్క్వేర్డ్ సమానం a హైపర్‌బోలాను xyకి b కి సమానం
అవుతుంది వాలులు -1 కాలిక్యులస్
ఈ రెండు వక్రతలు x స్క్వేర్డ్ మైనస్ y స్క్వేర్డ్ aకి సమానం మరియు 2 xy
ఒకదానికొకటి ఆర్తోగోనల్‌గా ఉన్నాయో లేదో తనిఖీ చేయడానికి ఈ స్లోప్‌లను ఎలా గణించాలో   డెరివేటివ్‌లను ఎలా
గణించాలో మీకు తెలియజేస్తుంది, తద్వారా   మీకు చాలా చక్కగా ఉంటుంది ఆర్తోగోనల్
పథాలకు ఉదాహరణ రెండు ఆర్తోగోనల్ పథాలు ఇక్కడ ఒక చిత్రం ఉంది ఎరుపు
వక్రతలు 2xy సమానం b వక్రతలు మరియు నీలిరంగు వక్రరేఖలు x స్క్వేర్డ్ మైనస్ y స్క్వేర్‌తో సమానంగా
ఉంటాయి
, అవి ఖండన బిందువు వద్ద మీకు కనిపిస్తున్నాయి ఆర్తోగోనల్
చిత్రం గణితశాస్త్రానికి కృతజ్ఞతలు చాలా ఖచ్చితమైనది మరియు ఈ చిత్రాన్ని రూపొందించిన
గణిత శాస్త్ర విభాగం విద్యార్థి ఆదిత్య
మహేశ్వరికి ఇక్కడ నా కృతజ్ఞతలు తెలియజేయాలనుకుంటున్నాను.
   d తదుపరిది సరే, సంక్లిష్ట విశ్లేషణ నుండి మరొక ఉదాహరణను
తీసుకుందాం   c మైనస్ 0లో నిర్వచించబడిన ఒక ఫంక్షన్‌ని తీసుకుందాం .
  z ఈ ఫంక్షన్ f అంటే ఏమిటి zకి
సమానం z ప్లస్ 1 z ఈ ఫంక్షన్ మొత్తం మీద నిర్వచించబడింది   సంక్లిష్టమైన సమతలం 0
వద్ద తప్ప అది నిర్వచించబడనప్పుడు z వృత్తాన్ని గుర్తించినప్పుడు ఏమి జరుగుతుందో చూద్దాం r cos t ప్లస్ ir
sine t కాబట్టి
డొమైన్‌లో z వృత్తం r cos t ప్లస్ ir సైన్ t ని గుర్తించడం గురించి మనం ఆలోచిస్తున్నామని గుర్తుంచుకోండి
కాంప్లెక్స్
సంఖ్యలు ఆర్గాన్ ప్లేన్‌లో పాయింట్‌లుగా ఉంటాయి మరియు సంక్లిష్ట సంఖ్యల యొక్క ఈ రేఖాగణిత ప్రాతినిధ్యం
మీకు బాగా తెలుసు
కాబట్టి నేను   సంక్లిష్ట సంఖ్య zని r cos t comma
r sine tగా భావించగలను మరియు t మారవచ్చు కాబట్టి మీరు z ట్రేస్‌లను సర్కిల్ పొందుతారు డొమైన్‌లోని ఒక
సర్కిల్,
f యొక్క zకి ఏమి జరుగుతుంది, r cost యొక్క f అంటే ఏమిటి ప్లస్ ir సైన్ t చిత్రం వక్రరేఖకు ఏమి
జరుగుతుంది,
ఈ చిత్ర వక్రతలను అర్థం చేసుకోవడం ఒక వినోదభరితమైన వ్యాయామం అని చూద్దాం కాబట్టి z r cos అయితే z
యొక్క f అంటే ఏమిటి t
ప్లస్ ir సైన్ t ఆపై z r cos t ప్లస్ ir సైన్ t ప్లస్ 1 యొక్క f అంటే ఏమిటి r cos
t plus ir sine t పై మీరు సంక్లిష్ట సంయోగం లేదా హారంని ఉపయోగించాలి
మరియు విషయాన్ని తిరిగి వ్రాయాలి మరియు మీరు r   ప్లస్ 1ని పొందుతారు
t మారుతూ ఉంటుంది కాబట్టి ఈ 1.
42 దేనిని సూచిస్తుంది 1.
42
అనేది దీర్ఘవృత్తాకార పారామీటర్‌ని సూచిస్తుంది 1.
42
దీర్ఘవృత్తాకారాన్ని సూచిస్తుంది, కాస్ t కామా b సైన్ t   దీర్ఘవృత్తాకారం సరే
, దీర్ఘవృత్తాకార అక్షం యొక్క ప్రధాన అక్షం ఏది? r ప్లస్ 1 మీద r అంటే సెమీ-మైనర్ అక్షం r మైనస్
1 అంటే r కాబట్టి ఇది సెమీ-మేజర్ అక్షం r ప్లస్ 1 మీద r మరియు సెమీ-మైనర్ అక్షం r మైనస్ 1 మీద
r తో ఉన్న దీర్ఘవృత్తాకారం -మేజర్ అక్షం సెమీ-మైనర్ అక్షం మరియు విపరీతత b
స్క్వేర్డ్ 1 మైనస్ ఇ స్క్వేర్డ్ ఒకే కాబట్టి మీరు దీర్ఘవృత్తం యొక్క విపరీతతను గణించవచ్చు ఈ దీర్ఘవృత్తం యొక్క
బలం
ఎంత, కాబట్టి దీర్ఘవృత్తాకారం యొక్క ఫోసిస్ ఏమిటి ఇది ae   కామా సున్నా మరియు మైనస్ ae కామా సున్నా
అయితే ae అంటే ఏమిటి b sq గుర్తుంచుకోవాలి uared a   కి సమానం 1 మైనస్ ఇ స్క్వేర్డ్ కాబట్టి స్క్వేర్డ్ e
స్క్వేర్డ్ స్క్వేర్డ్ మైనస్ బి స్క్వేర్ అయితే ఏది ar ప్లస్ 1 పై r అంటే ఏమిటి br మైనస్ 1 మీద r
కాబట్టి స్క్వేర్డ్ మైనస్ బి స్క్వేర్డ్ అంటే 4.
 కాబట్టి a   స్క్వేర్డ్ e స్క్వేర్డ్ 4 కాబట్టి ae 2.
 కాబట్టి foci
లేదా దీర్ఘవృత్తం 2 కామా 0 మరియు మైనస్ 2 కామా 0.
 ఇది చాలా ఆసక్తికరంగా ఉంటుంది, ఎందుకంటే
r యొక్క విలువ ఏమైనప్పటికీ, మీరు ఈ ఇమేజ్‌లన్నింటికీ ఒకే fociని పొందుతారు దీర్ఘవృత్తాకారం వక్రరేఖలు r
మారుతూ ఉంటాయి.
 మీరు

ఏకీకృత వృత్తాల సమూహాన్ని పొందడం వలన మీరు మొత్తం కేంద్రీకృత వృత్తాలను పొందుతారు,
అయితే ఈ దీర్ఘవృత్తాకారాలు అన్ని దీర్ఘవృత్తాలుగా ఉంటాయి, అయితే ఈ దీర్ఘవృత్తాకారాలన్నీ ఒకే fociని కలిగి ఉంటాయి, వాటిని కాన్ఫోకల్ దీర్ఘవృత్తాలు అంటారు,
అవన్నీ ఒకే ఫోసిస్ కలిగి ఉంటాయి కాబట్టి ఈ ఫంక్షన్ z యొక్క 1.
41   f zకి సమానమైన z ప్లస్ 1ని
zukowski ఫంక్షన్ అంటారు కాబట్టి zukowski ఫంక్షన్ వృత్తాలను
zukowski ఫంక్షన్ అని తీసుకుంటే, మీరు z మూలం వద్ద ఉన్న వృత్తాన్ని z   వర్ణించడాన్ని తీసుకుంటే, z యొక్క చిత్రం f
దీర్ఘవృత్తాన్ని ట్రేస్ చేస్తుంది కానీ దీర్ఘవృత్తాకారంలోని foci ప్లస్ మైనస్ రెండు కామా సున్నా కాబట్టి
వీటిని జుకోవ్స్కీ దీర్ఘవృత్తాలు అంటారు కాబట్టి తదుపరి స్లైడ్ నేను మీ కోసం చేసిన ఒక వ్యాయామం, ఇది
జుకోవ్‌స్కీ దీర్ఘవృత్తాకారాల యొక్క ఫోసిని నిర్ణయించడం కోసం అవి 2 కామా 0 మరియు మైనస్ 2 కామా 0.
 మీరు చేయని ఒక విలువ కోసం r యొక్క ఒక ప్రత్యేక విలువ కోసం దీర్ఘవృత్తాకారాన్ని పొందండి టు ఇన్ఫినిటీ టేక్ అర్రే
ధనాత్మక x-యాక్సిస్‌తో యాంగిల్ తీటాను తయారు చేస్తుంది కాబట్టి మీరు ఈ రే t
కొసైన్ తీటా ప్లస్ ఇది సైన్ తీటా z t కి సమానం కాస్ తీటా ప్లస్ i సైన్ తీటా వద్ద
అనేది 0 నుండి మారుతూ ఉంటుంది ఇన్ఫినిటీకి మరియు తీటా స్థిరంగా ఉంటుంది కాబట్టి నేను z యొక్క ఇమేజ్ fని కనుగొనాలనుకుంటున్నాను కాబట్టి z
యొక్క f z z ప్లస్ 1 అవుతుంది మరియు t మారుతూ ఉంటుంది మరియు తీటా చిత్రం
వక్రరేఖలు హైపర్‌బోలాస్‌గా ఉంటాయి వాటిని జుకోవ్స్కీ హైపర్‌బోలాస్ అని పిలవండి, ఈ
జికోవ్‌స్కీ హైపర్‌బోలాస్ నో p   ఊహించడం కోసం రైజ్‌లు   అవి 2 కామా 0 మరియు మైనస్ 2 కామా 0 అవుతాయి.
 హైపర్‌బోలాలు కూడా కన్ఫోకల్‌గా ఉంటాయి మరియు అవి దీర్ఘవృత్తాకారాల మాదిరిగానే ఉంటాయి కాబట్టి కోనిక్స్ యొక్క మొత్తం
కుటుంబం కోనిక్స్ యొక్క కాన్ఫోకల్ ఫ్యామిలీ అని చూపిస్తుంది.

zukowski దీర్ఘవృత్తాలు ఆర్తోగోనల్‌గా మళ్లీ మేము ఉహ్ వక్రరేఖల ఆర్తోగోనల్ సిస్టమ్‌ను
కనుగొన్నాము మీరు రెండు కుటుంబాల వక్రరేఖలను కనుగొన్నారు దీర్ఘవృత్తాకార కుటుంబం
మరియు హైపర్‌బోలాల కుటుంబం ప్రతి దీర్ఘవృత్తాకారంలో ప్రతి హైపర్‌బోలాను ఆర్తోగోనల్‌గా కట్ చేస్తుంది
మనకు ఒక జత ఆర్తోగోనల్ పథాలు ఎందుకు ఉన్నాయి లేదా ఇది ఎందుకు ఆసక్తికరమైనది ఇది చాలా ముఖ్యమైనది,
ఎందుకంటే జ్యామితి అందంగా ఉంది ఇది ముఖ్యం ఎందుకంటే జుకోవ్స్కీ దీనిని
ఎయిర్‌ఫాయిల్‌ల నిర్మాణంలో ఉపయోగించారు కాబట్టి ఏరోస్పేస్ ఇంజనీరింగ్‌కి అప్లికేషన్‌లు ఉన్నాయి
మరియు నేను మీకు వెబ్‌సైట్ కోసం నిర్దిష్ట లింక్‌ని
ఇచ్చాను, ఇక్కడ మీరు నాసా ద్వారా గ్లెన్ పరిశోధన ద్వారా కథనాన్ని కనుగొనవచ్చు ప్రయోగశాల ఇక్కడ మీరు
జికోవ్స్కీ ఎయిర్‌ఫాయిల్‌ల నిర్మాణంలో దీన్ని ఎలా ఉపయోగించారు అనే వివరాలను మీరు కనుగొనగలరు.

స్కీ ఫంక్షన్‌ని
ఏరోస్పేస్   ఇంజనీరింగ్ కాకుండా చాలా భిన్నమైన ఫీల్డ్‌లో కూడా అన్వయించవచ్చు మరియు
అది తదుపరి స్లైడ్‌లో ఉంటుంది, కానీ నేను దానికి వచ్చే ముందు నేను కాంప్లెక్స్ ఫంక్షన్ థియరీ నుండి మరొక వ్యాయామాన్ని మళ్లీ చూడబోతున్నాను.

విభిన్నమైన ఫంక్షన్ f నుండి c నుండి c వరకు చాలా చక్కని ఫంక్షన్ z స్క్వేర్డ్‌కి సమానమైన z f ద్వారా
ఇవ్వబడింది పాయింట్ 0 కామా c గుండా వెళుతున్న ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖ
కాబట్టి నేను z సమానం కి t ప్లస్ ఐసీని తీసుకుంటే అది z
స్క్వేర్డ్ మైనస్ c స్క్వేర్డ్ ప్లస్ 2i dc   అవుతుంది కాబట్టి z 20 మారినప్పుడు ఈ ట్రేస్ ఏమిటి
మైనస్ ఇన్ఫినిటీ నుండి ప్లస్ ఇన్ఫినిటీ వరకు ఏమి జరుగుతుంది వక్రరేఖ t స్క్వేర్డ్ మైనస్ c స్క్వేర్డ్ కామా 2tc
అవి పారాబోలాస్ ఈ పారాబోలా యొక్క ఫోకస్‌ను కనుగొని మరియు ఈ ఫోకస్ ఆధారపడి ఉంటుందా
అని మీరు ఆశించే సమాధానం లేదు మరియు అది ఒక కన్ఫోకల్ ఫ్యామిలీ అవుతుంది పారాబోలాస్
కానీ మనవి ఇప్పుడు పరిశోధించండి మేము క్షితిజ సమాంతర రేఖల
చిత్రాన్ని తీస్తున్నాము నిలువు రేఖల చిత్రాన్ని చూద్దాం అలాగే t వాస్తవ సంఖ్యలపై రన్ అయినప్పుడు
ప్లస్ అది కామా 0 గుండా వెళుతున్న నిలువు రేఖ.
 కాబట్టి నేను z   తీసుకుంటే ఒక ప్లస్‌కి సమానం
ఇది z స్క్వేర్డ్ మైనస్ t స్క్వేర్డ్ ప్లస్ 2 iat కాబట్టి ఆర్గ్యుమెంట్ ప్లేన్‌లో ఒక పాయింట్‌గా
మేము స్క్వేర్డ్ మైనస్ t స్క్వేర్డ్ కామా 280ని చూస్తున్నాము ఇది పారాబోలాకు పారామిటరైజేషన్ కోసం

Prutor@IITK

పారామెట్రిక్ రూపం ఉంది పారాబొలా మళ్లీ ఈ పారాబొలా ఈ పారాబొలా యొక్క ఫోకస్‌ని కనుగొని
మరియు ఈ పారాబొలా ఒక   తదుపరి వ్యాయామంపై ఆధారపడి ఉందో లేదో పరిశీలించండి
19 వ్యాయామం యొక్క పారాబొలాస్ వ్యాయామం యొక్క పారాబొలాస్‌ను కత్తిరించాయి 20 ఆర్తోగోనల్‌గా మళ్లీ మనం ఒక జత ఆర్తోగోనల్
పథాలను చూస్తాము కాబట్టి ఇప్పుడు మనం మూడు పొందాము.
 కాంప్లెక్స్ ఫంక్షన్ థియరీ నుండి ఉదాహరణలు మేము
కాంప్లెక్స్ ఫంక్షన్ థియరీ నుండి ఎలాంటి లోతైన ఆలోచనలను ఉపయోగించము కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్ యొక్క ఫంక్షన్ల సిద్ధాంతం
గణితంలో లోతైన శాఖ కానీ మేము ఏ o ని ఉపయోగించడం లేదు మేము
మీ   సిలబస్‌లో ఉన్న వాటిని మాత్రమే చూస్తున్నాము అంటే సంక్లిష్ట సంఖ్యను
ఎలా వర్గీకరించాలి z ప్లస్ 1ని z ఎలా గణించాలో అందరికీ తెలుసు కాబట్టి
సంక్లిష్ట గుణకారం మరియు సంక్లిష్ట విభజన యొక్క ఈ ప్రాథమిక ఆలోచనలను ఉపయోగించడం ద్వారా మేము
ఆర్తోగోనల్ పథాల యొక్క మూడు అందమైన ఉదాహరణలను పొందాము సరే, ఇప్పుడు మనం చిత్రాన్ని చూద్దాం
మళ్లీ ఆదిత్య ఈ చిత్రాలను రూపొందించారు మీరు ఎరుపు పారాబొలాలను
మరియు నీలం పారాబొలాలను మీరు చూసే గణితాన్ని ఉపయోగించి   వాటిని ఖండిస్తున్నట్లు మీరు చూడవచ్చు ప్రతి నీలి వక్రరేఖ ప్రతి
ఎరుపు వక్రరేఖను కలుస్తుంది ఖండన బిందువు ఖండన కోణం 90 డిగ్రీలు కాబట్టి దయచేసి
దీన్ని మీరే ప్రయత్నించండి, దీన్ని చేయడం చాలా వినోదభరితంగా ఉంది, ఇప్పుడు
జుకోవ్స్కీ ఫంక్షన్ యొక్క వాగ్దానం చేసిన అప్లికేషన్
ఖగోళ శాస్త్రం ఖగోళ మెకానిక్స్ సేవలో జుకోవ్స్కీ ఫంక్షన్ వస్తుంది మరియు ఇక్కడ మేము చాలా అందమైన సిద్ధాంతానికి వచ్చాము
బోలిన్ సిద్ధాంతం అని పిలుస్తారు, ఇది 1911 నాటిది.
 జుకోవ్స్కీ ఫంక్షన్ f అని చెప్పుకోదగినది
ఖగోళ మెకానిక్స్‌లోని inds అప్లికేషన్‌లు మరియు ఆ జుకోవ్స్కీ దీర్ఘవృత్తాలు మరియు హైపర్‌బోలాలు
బోలిన్ సిద్ధాంతం యొక్క రుజువులో కనిపిస్తాయి, ఇది బోలన్ కారణంగా వచ్చిన పాత ఫలితం
, w స్క్వేర్డ్‌కు సమానమైన మ్యాప్ f గ్రహాల చలన సమీకరణాలను ఈ సమీకరణం d 2 w ద్వారా మారుస్తుంది.
  స్క్వేర్డ్
ప్లస్ w 0కి సమానం.
 ఈ అవకలన సమీకరణం
s   నిజ సమయం కాదు, ఇది రీస్కేల్ చేయబడిన సమయం కాదు, బోలిన్ సిద్ధాంతం యొక్క రుజువులో జకోవ్స్కీ మ్యాప్ మరియు జాకోవ్స్కీ ఎలిప్సెస్ ఫీచర్
బోలిన్ సిద్ధాంతం చెబుతోంది.
 చాలా స్పష్టమైన
రూపాంతరం ఇది చాలా సంక్లిష్టమైన అవకలన సమీకరణాల వ్యవస్థను మారుస్తుంది, అవి సూర్యుని చుట్టూ
ఉన్న గ్రహాల చలనాన్ని నియంత్రించే అవకలన సమీకరణాలు సూర్యునికి రెండు శరీరాల సమస్య
మరియు గ్రహం కేవలం ఈ రెండు శరీరాలను నియంత్రించే   అవకలన సమీకరణ వ్యవస్థ
సూర్యుని చుట్టూ ఉన్న ఒక గ్రహాన్ని ఈ అమాయకంగా కనిపించే అవకలన
సమీకరణంగా మార్చవచ్చు.
  అయాన్ గ్రహాల చలనం మరియు ఈ అవకలన సమీకరణం యొక్క పరిణామం
నిజానికి న్యూటన్‌కి తిరిగి వెళ్తాయి కానీ మనకు అందించిన విశ్లేషణాత్మక రూపం
బోలిన్ కారణంగా ఉంది మీరు ఈ ఆలోచనను సులభంగా ఉపయోగించుకుని గ్రహ చలనం యొక్క కెప్లర్ యొక్క మొదటి నియమాన్ని నిరూపించవచ్చు.
 గ్రహాలు సూర్యుని చుట్టూ
దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో సూర్యుని చుట్టూ పరిభ్రమిస్తాయి అనే కారణం చాలా సులభం, మీరు ఈ
సమీకరణాన్ని d2 w బై ds స్క్వేర్డ్ ప్లస్ w సున్నాకి సమానంగా పరిష్కరించవచ్చు   కాబట్టి మనం ఈ అవకలన సమీకరణాన్ని
d2 w ద్వారా ds ద్వారా పరిష్కరించాలి స్క్వేర్డ్ ప్లస్ w 0కి సమానం.
 ఇప్పుడు మీరు w అనేది సంక్లిష్ట సంఖ్య అని చూస్తారు, ఇది వాస్తవ
భాగం xని కలిగి ఉంది మరియు ఇది ఊహాజనిత భాగం y   ని కలిగి ఉంది కాబట్టి ఈ సమీకరణం నిజంగా రెండు సమీకరణాలు d 2 x బై
ds స్క్వేర్డ్ ప్లస్ x 0 d 2 y ద్వారా ds స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y 0కి సమానం
, సాధారణ హార్మోనిక్ కదలికల యొక్క రెండు సమీకరణాలు ఉన్నాయి, మీరు సాధారణంగా s యొక్క సైన్‌గా ఉండటానికి
xని తీసుకోవచ్చు.

Prutor@IITK

మేము
s యొక్క w పొందాలి s యొక్క కొసైన్ ప్లస్ ib సైన్ ఆఫ్ s కి సమానం, దీని ద్వారా అసలు పథం ఏమిటి అని గుర్తుంచుకోండి
w స్క్వేర్‌కి సమానమైన w ఫంక్షన్ f అని గుర్తుంచుకోండి అసలైన కోఆర్డినేట్ zz అనేది
గ్రహం యొక్క కదిలే బిందువు యొక్క కదిలే బిందువు అక్షాంశాలు కాబట్టి z w అవుతుంది స్క్వేర్డ్ కాబట్టి
s యొక్క z గ్రహం యొక్క స్థానం s స్క్వేర్డ్ యొక్క w అవుతుంది, ఇది స్క్వేర్డ్ కాస్ స్క్వేర్డ్ s మైనస్ b స్క్వేర్డ్ సైన్ స్క్వేర్డ్ s ప్లస్
2 అబి సైనస్ కారణమవుతుంది కాబట్టి ఇప్పుడు మీరు z యొక్క వాస్తవ భాగాన్ని మరియు z యొక్క ఊహాత్మక భాగాన్ని
తీసివేస్తే సంకేతాలు మరియు కొసైన్‌లు తర్వాత మనం ఏమి చూస్తాము ఇది
దీర్ఘవృత్తాకారం యొక్క పారామెట్రిక్ సమీకరణం కాబట్టి ఉదాహరణకు ఈ వాస్తవ భాగాన్ని x యొక్క x అని పిలుస్తాము, ఊహాత్మక
భాగాన్ని s యొక్క y అని పిలుస్తాము మరియు దీర్ఘవృత్తాకారం యొక్క ఈ సమీకరణం ఏమిటి? కొసైన్ యొక్క కొసైన్
మొదట cos స్క్వేర్డ్ s అని కొసైన్ పరంగా వ్రాయండి 2s sine స్క్వేర్డ్ s పరంగా కొసైన్ 2s 2 సైనస్
కారణాలు సైన్ 2s పరంగా sine స్క్వేర్డ్ 2s ప్లస్ cos స్క్వేర్డ్ 2s 1కి సమానమైన
సమీకరణాన్ని ఉపయోగిస్తాయి మరియు మీరు ఈ సమీకరణాన్ని పొందుతారు మరియు సమీకరణం మీరు 2x మైనస్ ఒక స్క్వేర్డ్ మైనస్ బి స్క్వేర్డ్‌ను
ఒక స్క్వేర్డ్ ప్లస్ బి స్క్వేర్‌తో భాగించడాన్ని చూస్తారు మొత్తం స్క్వేర్డ్ ప్లస్ y స్క్వేర్డ్ స్క్వేర్డ్ బి స్క్వేర్డ్
1కి సమానం ఇది దీర్ఘవృత్తాకార foci వీటిలో ఒకటి ఆరిజిన్‌లో ఉంటుంది, ఇది
సమన్వయంలో చాలా సులభమైన వ్యాయామం జ్యామితి మరియు దీన్ని చేయమని నేను మిమ్మల్ని కోరుతున్నాను కాబట్టి మేము ఇక్కడ ఏమి నిరూపించాము
, w యొక్క రూపాంతరం చెందిన సమీకరణం దీర్ఘవృత్తాకారం
అయితే z సమీకరణం w సమీకరణం మరియు దీర్ఘవృత్తాకార వర్గం యొక్క వర్గమని నిరూపించడానికి బోలిన్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించాము మరొక దీర్ఘవృత్తం
దీని దృష్టి మూలం వద్ద ఉంది కాబట్టి z యొక్క స్థానం మూలం వద్ద ఒక దృష్టితో దీర్ఘవృత్తం
అంటే కెప్లర్ యొక్క మొదటి నియమం స్థాపించబడింది సరే, బోలిన్ సిద్ధాంతం అవకలన సమీకరణాలపై సిద్ధాంతం అయినప్పటికీ
మేము దానిని ఇక్కడ నిరూపించలేము ఎందుకంటే ఇది నిజంగా సిలబస్‌లో లేదు కానీ
అవకలన సమీకరణాల సిద్ధాంతం బయటకు వెళ్లి
భౌతిక శాస్త్రాల భౌతిక ఖగోళ శాస్త్రం కార్టోగ్రఫీ ఏరోస్పేస్
ఇంజిన్‌లోని వివిధ భాగాలకు చేరుకుంటుందని నేను మీకు చెప్పాలనుకుంటున్నాను eering మరియు ఈ
సిద్ధాంతం న్యూటన్‌కి ముందే తెలుసు మరియు ఇది ఆకర్షణ యొక్క ద్వంద్వ నియమాలు పేరుతో వెళుతుంది మరియు
ఈ ద్వంద్వ ఆకర్షణల నియమాలు విశ్లేషణాత్మక రూపంలో అర్థం ఏమిటో నేను
వివరించను ఈ సిద్ధాంతం బోలిన్ కారణంగా ఏర్పడిందని మేము పేర్కొన్నాము.
రెండు స్లయిడ్‌లు నేను మీకు
రెండు రెఫరెన్స్‌లు ఇవ్వబోతున్నాను మరియు ఈ రెండు రెఫరెన్స్‌లు గ్రేట్ మాస్టర్స్ రాసిన పుస్తకాలు వాటిలో ఒకటి గొప్ప
గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు మరియు మరొకటి గొప్ప భౌతిక శాస్త్రవేత్త మొదటిది vi ఆర్నాల్డ్ అతను
huygens barrow newton and hulk అనే పుస్తకాన్ని రాశాడు మరియు రెండు శతాబ్దాల అనంతర కాలంలో
ఖగోళ శాస్త్రంలో ఐజాక్ బారో నుండి ఆధునిక ఆవిష్కరణల వరకు సాగిన ఈ చిన్న పుస్తకం ఖగోళ శాస్త్రాన్ని అనుభావిక శాస్త్రం నుండి డైనమిక్ సైన్స్‌గా మార్చిందని న్యూటన్ సాధించిన విజయాల గురించి మాట్లాడటం ద్వారా మేము ఈ ఉపన్యాసాల శ్రేణిని ప్రారంభించాము.
-న్యూటోనియన్ శకం రెండు
శతాబ్దాల తర్వాత న్యూటన్ సూత్రాలను అనుసరించి ప్రయాణం కిర్క్‌వుడ్ g యొక్క ఆవిష్కరణ ద్వారా చెప్పుకోదగిన సౌలభ్యంతో ముందుకు
సాగుతుంది aps in the rings of Saturn పియర్ సైమన్ లాప్లేస్ యొక్క స్మారక పనులు మరియు చివరగా పాయింకేర్ పాయింకేర్
ఖగోళ మెకానిక్స్‌లో విప్లవాత్మకమైన కొత్త పద్ధతులు ఆధునిక ఖగోళ మెకానిక్స్‌కు అత్యంత ముఖ్యమైన సహకారి ద్వారా వివరించబడ్డాయి
రెండవ ప్రస్తావన నోబెల్
గ్రహీత చంద్ర శేఖర్ న్యూటన్, అతను పుస్తకానికి రాశాడు కామన్ రీడర్ ఇది
ఆక్స్‌ఫర్డ్ యూనివర్శిటీ ప్రెస్ 1996 ద్వారా ప్రచురించబడింది.
గొప్ప స్కాలర్‌షిప్‌తో కూడిన ఈ పని కంటెంట్‌తో సమృద్ధిగా ఉంది

మరియు శీర్షిక ఉన్నప్పటికీ ఇది సులభంగా చదవదు కానీ సాధారణ
పాఠకుడు సామాన్యుడు అని అర్థం కాదు అంటే విద్యార్థులు ఏకకాలంలో
గణన నేర్చుకునే వారు భౌతికశాస్త్రం నేర్చుకుంటున్నారు నేర్చుకుంటారు ng కెమిస్ట్రీ వారు
భౌతిక శాస్త్రం మరియు గణిత శాస్త్రంలో తగినంత పరిజ్ఞానం కలిగి ఉన్నారు అటువంటి విద్యార్థుల కోసం ఈ పుస్తకం
వ్రాయబడింది ఈ పుస్తకం 600 పేజీల పుస్తకం మరియు పేజీ 1 నుండి పేజీ 600 వరకు
చదవకూడదు మీరు నేరుగా వెళ్లాలని నేను మీకు సిఫార్సు చేస్తున్నాను పేజీ 57 మరియు
న్యూటన్ యొక్క చలన నియమాలు మరియు దాని సార్వత్రిక గురుత్వాకర్షణ నియమాలను ఉపయోగించి కెప్లర్ ద్వారా
గ్రహ చలనానికి సంబంధించిన మూడు నియమాల యొక్క పూర్తి రుజువులను మీరు చూస్తారు, దీని
తర్వాత మీరు
గ్రహాల ఆకర్షణ యొక్క ద్వంద్వ నియమాలను చర్చించే ఆరవ అధ్యాయానికి అనుబంధాన్ని చదవడానికి వెళ్లవచ్చు.
మరియు మీరు అక్కడ బోలిన్ సిద్ధాంతం యొక్క రుజువును
కూడా చూస్తారు ఆపై మీరు కెప్లర్ సమీకరణం మరియు న్యూటన్ ప్రిన్సిపియాలో ఉన్న బీజగణిత జ్యామితిపై
సిద్ధాంతంపై ఏడవ అధ్యాయానికి వెళ్లవచ్చు.

న్యూటన్ యొక్క మేధావి మరియు మైఖేలాంజెలో యొక్క
సూచన ఈ స్లయిడ్‌లో ఐటెమ్ నంబర్ మూడుగా ఇవ్వబడింది చంద్రశేఖర్ న్యూటన్ రచనలను పోల్చారు f
మైఖేలాంజెలో పెయింటింగ్‌తో ఉన్న ప్రిన్సిపియా లేదా వాటికన్ సిటీలోని సిస్టీన్ చాపెల్ యొక్క సీలింగ్ చంద్రశేఖర్
వీటిని అత్యంత అరుదైన సృజనాత్మకత స్థాయికి సంబంధించిన రచనలుగా పరిగణించారు.
ఈ వ్యాసాన్ని దాని మనోహరమైన శైలితో పాటు
కంటెంట్ కోసం చదవమని మీకు సిఫార్సు చేస్తున్నాము ప్రిన్సిపియా మరియు ఫ్రెస్కోలు రెండూ
మానవ సృజనాత్మకతకు అత్యున్నతమైన అపూర్వమైన వ్యక్తీకరణలు నేను వీటి గురించి మరింత
చెప్పదలచుకోలేదు, కానీ
ఇది మిమ్మల్ని ఆకర్షించిందని నేను ఆశిస్తున్నాను న్యూటన్ మరియు మైఖేలాంజెలోపై జెండర్ షేకర్ యొక్క ఈ
వ్యాసాన్ని చదవడం,
ఇప్పుడు ఆర్తోగోనల్ ట్రాజెక్టరీలలోని అవకలన సమీకరణాలకు వద్దాం మనకు
వక్రరేఖల c1 యొక్క ఒక పారామితి కుటుంబాన్ని అందించామని అనుకుందాం.
ఆర్తోగోనల్ పథాలు కానీ ఇప్పుడు నేను
మీకు వక్రరేఖల యొక్క ఒక పారామీటర్ కుటుంబాన్ని ఇస్తాను మరియు ఆర్తోగాన్ ఉందా అని నేను మిమ్మల్ని
అడుగుతున్నాను al trajectory
మరియు ఈ సమస్యను అర్థం చేసుకోవడానికి దాన్ని ఎలా కనుగొనాలి c1 వక్రరేఖల వ్యవస్థ 0
కి సమానమైన అవకలన సమీకరణ mdx ప్లస్ ndyకి దారితీస్తుందని అనుకుందాం.
మీరు c పారామీటర్‌తో వక్రరేఖల వ్యవస్థను మీరు పొందిన ఉదాహరణలను మేము చూశాము.

వేరు చేస్తే మీకు మరో సమీకరణం వస్తుంది
మీరు రెండు సమీకరణాల మధ్య cని తొలగిస్తారు మరియు మీరు
ఆ రకమైన అనేక ఉదాహరణలను చూసిన అవకలన సమీకరణాన్ని పొందుతారు, కాబట్టి ఇప్పుడు నేను ఇది
పూర్తయిందని మరియు మీకు
0కి సమానమైన dx ప్లస్ ndy వచ్చిందని భావిస్తున్నాను.

ఈ అవకలన సమీకరణం 1.
43 అనేది ఫస్ట్ ఆర్డర్ సిస్టమ్ యొక్క దశ వక్రతలకు అవకలన సమీకరణం అని నేను ఇప్పటికే మీకు గత
ఉపన్యాసంలో చెప్పాను
ఈ మొదటి ఆర్డర్ సిస్టమ్ అంటే ఏమిటి దీని దశ వక్రతలు సమీకరణం 1.
43 సమీకరణం
1.
43 dx ద్వారా dtతో ny ద్వారా dtకి సమానం మైనస్ m వెక్టర్ nxyi మైనస్ mxyj వక్రరేఖలకు టాంజెంట్‌గా
ఉంటుంది మరియు ఆర్తోగోనల్ ట్రాజెక్టరీలు అసలైన దానికి ఆర్తోగోనల్‌గా ఉంటాయి కాబట్టి
మొదటి నుండి టాంజెంట్ సాధారణం అవుతుంది రెండవది కాబట్టి ఆర్తోగోనల్ పథాలకు టాంజెంట్ వెక్టార్‌లు
తప్పనిసరిగా mi ప్లస్ nj అయి ఉండాలి, ఇక్కడ రెండు సిస్టమ్‌ల టాంజెంట్‌లు ఒకదానికొకటి లంబంగా
ఉంటాయి కాబట్టి మొదటి దానికి టాంజెంట్‌లు మరొకదానికి సాధారణం కాబట్టి ఆర్తోగోనల్
పథాలు ఈ సిస్టమ్ యొక్క దశ వక్రతలు dx ద్వారా dt సమానం m మరియు d dt ద్వారా nకి సమానం కాబట్టి
ఆర్తోగోనల్ పథాల కోసం అవకలన సమీకరణం ndx మైనస్ mdy 0కి సమానం.
కాబట్టి వక్రరేఖల వ్యవస్థ c1 ఇచ్చినప్పుడు
మనం అవకలన సమీకరణాన్ని పొందుతాము ఆపై ఇతరుల ద్వారా ఆర్తోగోనల్ భేదాంశాలను పొందుతాము.

కాబట్టి ముందుగా మనకు c1 నుండి c1 ఇవ్వబడుతుంది, మేము c1 కోసం అవకలన సమీకరణాన్ని పొందుతాము, ఆపై మేము c2 కోసం అవకలన సమీకరణాన్ని పొందుతాము మరియు ఈ అవకలన సమీకరణాన్ని పరిష్కరించి కుటుంబం c2ని పొందుతాము, కనుక ఇది సిద్ధాంతం 1 అని నేను ఇప్పుడే చెప్పినదానిని ఈ సిద్ధాంతంగా సంగ్రహించవచ్చు.
ఒక పరామితి వక్రరేఖల కుటుంబం పథాలు ndx మైనస్ mdy సున్నాకి సమానం i కాబట్టి విస్తృత పరిస్థితుల్లో ఏదైనా ఒక పరామితి
వక్రరేఖల కుటుంబం ఆర్తోగోనల్ పథాన్ని అంగీకరిస్తుంది నేను విస్తృత పరిస్థితులను చెబుతున్నాను ఎందుకంటే మనం అవకలన సమీకరణాల
కోసం ఉనికి సిద్ధాంతాలను నిజంగా చర్చించలేదు మరియు మేము వెళ్లడం లేదు
మరియు ఈ అస్తిత్వ సిద్ధాంతాలు ఉంటాయి సముచితమైన పరిస్థితులలో చెల్లుబాటు అవుతుంది కానీ ఆచరణాత్మక పరిస్థితుల్లో
ఈ పరిస్థితులు ఎల్లప్పుడూ సంతృప్తి చెందుతాయి కాబట్టి ఇప్పుడు మనం ఎదుర్కొన్న కొన్ని
నిర్దిష్ట ఆర్తోగోనల్
ట్రాజెక్టరీల పై దీన్ని ప్రయత్నిద్దాం ఇది xdx ప్లస్ ydy సమానం 0 కాబట్టి ఆర్తోగోనల్ పథాల కోసం అవకలన సమీకరణాలు ఏమిటి
ydx మైనస్ xdy సమానం నుండి 0 ఇది వేరియబుల్ వేరు చేయగల సమీకరణం
మరియు పరిష్కారాలు y సమానం mx లేదా x సమానం నా కాబట్టి మూలాధార పంక్తులు traj
ద్వారా మూలాలు traj మరియు ప్రతి ఒక్కరికి తెలుసు ఏ సెంటర్ ద్వారా లేదా
igin మూలాన్ని ఆర్తోగోనల్‌గా కట్ చేస్తుంది తర్వాత దాన్ని తీసుకుందాం
హైపర్‌బోలాస్ x స్క్వేర్డ్ మైనస్ y స్క్వేర్డ్‌కి సమానమైన c భేదం c ని వెంటనే అదృశ్యం చేస్తుంది
మీరు x dx మైనస్ ydyని 0 కి సమానమైన ఆర్తోగోనల్ పథం కోసం అవకలన సమీకరణం ఏమిటి
ydx plus xdy సమానం 0 ఈ అవకలన సమీకరణాన్ని పరిష్కరిస్తుంది,
ఇది వేరియబుల్ వేరు చేయగల సమీకరణం మరియు మీరు c కి సమానమైన mod xyని పొందుతారు
సంపూర్ణ విలువలను తీసివేయండి మరియు మీరు దీర్ఘచతురస్రాకార హైపర్‌బోలాస్‌ను పొందుతారు సభ్యులను x చదరపు మైనస్
y స్క్వేర్డ్ c కి సమానం ఇప్పుడు మరొకటి తీసుకుందాం ఉదాహరణకు
మీరు ఈ ఒక పరామితి కుటుంబానికి చెందిన వక్రరేఖల కుటుంబాన్ని తీసుకోండి y కి సమానమైన పవర్ మైనస్ x స్క్వేర్‌కు సమానమైన
ఆర్తోగోనల్ పథాలను కనుగొనండి మీరు దానిని dx ద్వారా dx ద్వారా వేరు చేస్తే వెంటనే మీకు
మైనస్ 2 xce పవర్ మైనస్ x స్క్వేర్డ్ వస్తుంది కానీ ce పవర్ మైనస్ నుండి వస్తుంది x స్క్వేర్ y
కాబట్టి మనం మైనస్ 2 xy కి సమానమైన dx ద్వారా dyని పొందుతాము కాబట్టి
1.
47 వక్రరేఖల కుటుంబానికి అవకలన సమీకరణం dy ప్లస్ 2 xy dx 0కి సమానం.
ఆర్తోగోనల్
పథాల అవకలన సమీకరణం 2xy dy మైనస్ dx 0కి సమానం.
మేము xని y యొక్క విధిగా పరిగణిస్తాము మరియు
పరిష్కారాలు mod x సమానమైన aeకి సమానమైన mod x స్క్వేర్డ్ పవర్ ఉన్న చోట a ధనాత్మకంగా ఉంటుంది.
స్థిరంగా
సంపూర్ణ విలువను తీసివేయండి మరియు మీరు ఆర్తోగోనల్ ట్రాజెక్టరీల కుటుంబాన్ని పొందుతారని గమనించండి x సమానమైన
0 ఇక్కడ చేర్చబడలేదు ఎందుకంటే మీరు వేరియబుల్స్‌ను వేరు చేసే పద్ధతిని చేసినప్పుడు మేము
x తో భాగిస్తాము మరియు 0కి సమానమైన x అనేది కూడా ఒక ప్రత్యేక పరిష్కారం మరియు అసలు సిస్టమ్‌లోని అన్ని వక్రతలు బెల్ ఆకారపు వక్రతలు కాబట్టి
అవి y అక్షాన్ని కత్తిరించినప్పుడు అన్ని టాంజెంట్ క్షితిజ సమాంతర టాంజెంట్‌లను కలిగి ఉంటాయి మరియు కాబట్టి సంపూర్ణ
విలువ పదాన్ని తీసివేయడం వలన మీకు x సమానమైన ceని ఇస్తుంది పవర్ y
స్క్వేర్డ్ సి ఏదైనా స్థిరమైన బావి అయితే ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలకు వచ్చాము
కాబట్టి పారాబొలాస్ కుటుంబానికి ఆర్తోగోనల్
పథాలను నిర్ణయించండి kx స్క్వేర్‌కు సమానం ఇది మొదటి సమస్య రెండవ ప్రో సమస్య అనేది
మూలం వద్ద y అక్షాన్ని తాకిన సర్కిల్‌ల కుటుంబాన్ని పరిగణలోకి తీసుకుంటుంది.
అధ్యాయం
మీరు సజాతీయ అవకలన సమీకరణాలను చర్చించినప్పుడు ఆపై z 1 కి సమానమైన z ఫంక్షన్‌ని పరిగణలోకి తీసుకుంటే,

Pritor@IITK

ఈ మ్యాప్ కింద z యొక్క 1కి సమానమైన
z యొక్క క్షితిజ సమాంతర మరియు నిలువు పంక్తుల చిత్రాలను కనుగొనండి.
.
మేము పారాబొలాస్‌తో ఇదే విధమైన వ్యాయామాన్ని చేసాము,
ఇప్పుడు నేను మిమ్మల్ని అదే వ్యాయామం చేయమని అడుగుతున్నాను z 1 మీద zకి సమానం
ఏకాక్షక వృత్తాల యొక్క ఒక పరామితి కుటుంబానికి ఆర్తోగోనల్ పథాల కోసం అవకలన సమీకరణాన్ని కనుగొనండి ఒక పాయింట్ 1.
37 s
1 ప్లస్ లాంబ్డ్ అని గుర్తుంచుకోండి 2కి 0కి సమానం కానీ సర్కిల్‌లకు కేంద్రాలు 2 కామా 0 మరియు మైనస్ 2 కామా 0 మరియు వ్యాసార్థం 1 ఉన్నాయి మరియు మేము ఏకాక్షక వృత్తాల కుటుంబం
ఆర్తోగోనల్ పథం కోసం అవకలన సమీకరణాన్ని కనుగొన్నాము అవకలన సమీకరణాన్ని పరిష్కరించమని నేను మిమ్మల్ని అడగడం లేదు
అవకలన సమీకరణం మరియు చివరగా కన్ఫోకల్ కోనిక్స్ కుటుంబం ఈ కాన్ఫోకల్ శంఖాకార కుటుంబానికి
అవకలన సమీకరణాన్ని నిర్ణయించమని నేను మిమ్మల్ని అడిగాను మరియు
ఆర్తోగోనల్ పథాల కోసం అవకలన సమీకరణాన్ని కనుగొనమని మీరు అడిగారు, మీరు ఏదో అద్భుతంగా చూస్తారు మరియు మీరు వివరణను కనుగొనాలనుకుంటున్నాను ఈ దృగ్విషయం కోసం మేము ఈ రోజు ఇక్కడే ఆపివేస్తాము
మరియు ఈ ఉపన్యాసాల శ్రేణిని కొనసాగిస్తాము మరియు తదుపరి ఉపన్యాసంలో నేను
సజాతీయ అవకలన సమీకరణాలను చర్చిస్తాను ధన్యవాదాలు

Pruto@IITK