ہیلو
تو طلباء کو تفریق مساوات پر سیریز کے دوسرے لیکچر میں خوش آمدید کہتے ہیں آئیے مختصراً یاد کریں کہ ہم کہاں رکے تھے ہم ایک بہت ہی
yt مربع دیکھ رہے تھے اور ہم اس تک پہنچے۔ نقطہ اور ہم نے حل dt equal to y بذریعہ dy معصوم نظر آنے والی تفریق مساوات
پر جاتا ہے c سے 1 اوور yt بائیں t کے برابر پایا ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ جب وقت ct کے برابر 1 مائنس c کو
y تو حل لامحدود وقت میں ختم ہوجاتا ہے اور ایک محدود وقت کی تباہی ہوتی ہے جیسا کہ یہ تھا یہی وجہ ہے کہ ایسا کیوں ہوتا ہے اس کی وجہ
کیوب ڈالتا ہوں y مربع کی اصطلاح ہے اگر میں y مربع کی بجائے
تو آپ دیکھیں گے کہ ایک ہی چیز محدود وقت میں ہوتی ہے جو حل انفینٹی تک پہنچ جائے گا، تفریق مساوات میں کوئی غلط بات نہیں ہے . تفریق
تک c مربع ایک کثیر الثانی ہے تاہم حل پوری حقیقی لائن پر نہیں رہتا ہے یہ مائنس انفینٹی سے 1 پر y مساوات کی وضاحت ہر جگہ کی جاتی ہے
ہے جو حل موجود ہے وہ عام طور پر پوری حقیقی لائن نہیں ہوتا ہے بلکہ حقیقی لائن کا صرف ایک حصہ ہوتا ہے یہ عام o رہتا ہے جو کہ وقفہ
طور پر حقیقی لائن کا صرف ایک بہت چھوٹا حصہ ہوتا ہے لہذا پچھلی سلائیڈ میں میرا یہی مطلب تھا جب میں نے کہا تھا کہ اگرچہ تفریق مساوات
وقت کا پورا i وہ وقفہ a کے علاوہ a comma t naught مائنس t naught برابر i جو کہ i وقفہ ہر جگہ بیان کیا جائے گا
وقفہ نہ ہو جو کہ محدود وقت میں لامحدودیت کی طرف فرار ہو سکتا ہے حل لامحدودیت کی طرف فرار ہو سکتا ہے مقررہ وقت ٹھیک ہے
تو آئیے اب اس واقعہ کو تھوڑی اور تفصیل سے دیکھتے ہیں شاید کچھ اور مثالوں میں ہم اس کو اٹھانے سے پہلے دیکھ سکتے ہیں آہ ایک اور چھوٹا نقطہ ہے جس پر میں
توجہ دینا چاہوں گا یعنی اگر آپ نوٹس کریں کہ ہم غیر معینہ انٹیگرلز استعمال کر رہے ہیں میں اس کی نشاندہی کرنا چاہتا ہوں اور میں اپنے تمام
طلباء سے یہ کہہ رہا ہوں کہ جب بھی ممکن ہو قطعی انٹیگرلز کے ساتھ کام کریں غیر معینہ وقفوں سے بچنے کی کوشش کریں ایسے حالات ہیں
جہاں آپ نہیں کر سکتے۔ ایسا کریں یا جب کچھ حالات میں یہ ممکن نہیں ہے یا اسے استعمال نہ کرنا زیادہ اناڑی ہے
تو جب بھی ممکن ہو یقینی انٹیگرلز کو استعمال کرنے کی کوشش کریں یہی بنیادی منتر ہے میں یہ بتانا چاہوں گا کہ یقینی انٹیگرلز کو کیوں استعمال
کے fx تک کسی بھی مسلسل فنکشن b سے a fx dx کیا جائے کیونکہ قطعی انٹیگرلز برتر ہوتے ہیں مخلوقات وہ کیوں برتر ہیں کہ انٹیگرل
کے f کے x ' پر متعین کیا جاتا ہے علامت کا قطعی معنی ہے کہ آیا آپ غیر معینہ انٹیگرل کی گنتی کرنے کے قابل ہیں یا نہیں ab لیے وقفہ
کامل سمجھ میں آتا ہے ایک اور فائدہ یہ ہے کہ جب آپ تفریق bfx dx سے a لیے پرائمیٹو کو تلاش کرنے کے قابل اس علامت کا انٹیگرل
مساوات میں قطعی انٹیگرلز استعمال کرتے ہیں
تو آپ خود بخود ابتدائی شرائط کو شامل کر لیتے ہیں لہذا آئیے ہم مختلف انٹیگرلز کا استعمال کرتے ہوئے وہی مسئلہ دوبارہ کریں غیر معینہ انٹیگرلز کا
کے t پر s برابر 1 پر واپس جائیں۔ اب ہم ایک مخصوص وقفہ 0 کوما dt بذریعہ dy مربع y تو آئیے ایک بار پھر تفریق مساوات 1 پر
اوور s 1 حوالے سے دونوں اطراف کو مربوط کرے گا یعنی ہم اس بار ایک قطعی انٹیگرل کو دیکھ رہے ہیں اور ہمیں کیا ملے گا انٹیگرل 0 سے
سے مربوط ہے بائیں ہاتھ کی طرف کے بارے میں کیا s یقیناً دائیں ہاتھ کی طرف s dt برابر ہے 0 سے t dt پرائم y اسکوائر میں yt
مربع ہے y ہے dty prime y prime بذریعہ dy ہے یاد رکھیں تفریق مساوات کو دیکھیں
مثبت ہے دائیں y prime تو
ڈالتا y کے u کے برابر t ایک سختی سے یک جہتی بڑھانے والا فعل ہے اور اس لیے میں آپ سے اپیل کر سکتا ہوں متبادل تھیوریم میں y تو
u s کے برابر ہو گا متغیر کی قدر s t کیا تھا اور جب y کا c ہے 0 0 t جب du ہے t dt پرائم y حاصل کرتا ہوں i ہوں اور
اسکوائر u میں بدل جاتا ہے sdu کے y سے c کا استعمال کرتے ہوئے انٹیگرل y کے برابر یو کے متبادل t ہو گی لہذا انٹیگرل y کی
s اور یہ c اسکوائر کے ساتھ انضمام کر سکتے ہیں اور پھر یہ 1 پر یو پر مائنس سائن کے ساتھ ابتدائی حالت u کو du اب آپ s کے برابر
سے cs کو 1 مائنس c کے برابر y کے s اور آپ آسان اور دوبارہ ترتیب دیتے ہیں۔ آپ کو وہی چیز ملتی ہے جو آپ کو y اور c کا
اسکوائر کے ذریعے دوبارہ ترتیب u کو انضمام کرنے کے اس مسئلے کو du تقسیم کیا جاتا ہے لہذا میں اس چھوٹے الجبرا کو چھوڑ رہا ہوں
حاصل کریں یہ بہت معمولی بات ہے۔ ورزش کریں اور میں آپ سے گزارش کرتا ہوں کہ اس کو خود y دیتے ہوئے حدود میں ڈالیں اور آپ کا
برابر ملتا ہے آپ اس تفریق مساوات کے حل کو بازیافت کرتے ہیں لیکن s کا y پر cs انجام دیں اور تصدیق کریں کہ آخر کار آپ کو 1 مائنس
اس بار ہم نے منظم طریقے سے قطعی انٹیگرلز کا استعمال کیا ہے نہ کہ غیر معینہ انٹیگرلز جیسا کہ پچھلی سلائیڈز ٹھیک ہے اور میں ایک بار پھر
آپ کو یاد دلانا چاہتا ہوں کہ قطعی انٹیگرلز برتر مخلوقات ہیں تعریف بالکل معنی رکھتی ہے قطع نظر اس کے کہ آپ پرائمیٹ کو تلاش کرنے کے
x کا اٹوٹ ہے سائن x قابل ہیں یا نہیں آپ کوئی ایسا فنکشن ڈھونڈ سکتے ہیں جس کا اخذ کیا گیا فنکشن ہے اینٹی ڈیریویٹیو جیسا کہ یہ کوزائن
میں سائن ہے اس کے معاملے میں یہ جاننا آسان ہے کہ t کا مشتق کوزائن ہے جو کوزائن کا مخالف مشتق ہے x ہے کیونکہ سائن c پلس
کوزائن کا اینٹی ڈیریویٹیو کیا ہے لیکن بہت سے معاملات میں جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ مشتق کا تعین کرنا آسان نہیں ہے یہ مشکل ہے بعض اوقات
آپ کے لیے اس فنکشن کو تلاش کرنا بالکل بھی ممکن نہیں ہوتا جس کا مشتق ایک دیا ہوا فنکشن ہے لیکن جب آپ قطعی انٹیگرلز سے نمٹتے ہیں
تو یقینی انٹیگرلز کو ایریاز کے طور پر بیان کیا جاتا ہے اور ان کا ایک بہت ہی درست اور سخت ریاضیاتی معنی ہوتا ہے اس لیے وہ ہمیشہ برتر اشیاء ہوتے ہیں
کے 0 کے برابر 1 تجویز کیے y مربع ابتدائی حالات y جمع dy by dt equals 1 تو اب آئیے دو مشقوں پر چلتے ہیں تفریق مساوات
سے پاور 10 سے بدل دیا جائے y گئے ہیں۔ کیا حل محدود وقت میں لامحدودیت کی طرف نکل جاتا ہے اگر دائیں ہاتھ کی طرف کو 1 جمع
تو آئیے رکیں اور سوچیں کہ اس سوال کو کیسے کرنا ہے جو آپ دیکھتے ہیں ابتدائی تسلسل یہ ہوگا کہ ہمیں اس تفریق مساوات کو مربوط کرنے
دیں ٹھیک ہے آئیے اسے آزماتے ہیں آئیے اسے کرتے ہیں اوہ آئیے مکمل ہاگ کرتے ہیں اور انٹیگرل اور کمپیوٹ ڈیٹرم کی گنتی کرتے ہیں حل میں
اور پھر اس سوال کا جواب دیں کہ کیا حل لامحدود وقت میں لامحدودیت تک پہنچ جاتا ہے ٹھیک ہے
y مربع سے تقسیم کرنے میں کوئی حرج نہیں ہے 1 1 جمع y برابر ہے 1 جمع dy by dt تو آئیے دیکھتے ہیں کہ آپ کی تفریق مساوات
کے برابر ہوتا ہے 0 t کا کہنا ہے کہ جب وقت s مربع چونکہ یہ ہمیشہ مثبت انضمام ہوتا ہے کچھ وقفہ پر 0 سے
کے dt تک انٹیگرل s اسکوائر سے تقسیم کیا ہے جو 0 سے y کو 1 جمع dy تو آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے ہم نے ابتدائی شرط 1 انٹیگرل
s کے tan برابر ملے گا s کا s کے الٹا ملے گا یا آپ کو s مائنس ٹین الٹا 1 کے s کا ٹین الٹا s ہے اس سے آپ کو s برابر ہے جو
کے 4 سے pi پلس
تو آپ کو حل اچھی طرح سے ملا ہے
pi 4 بائیں سے s تو آپ کہیں گے ٹھیک ہے آپ اس کی جانچ کریں گے۔ حل آپ حل کا جائزہ لیں گے اور پھر آپ کو پتہ چل جائے گا کہ جب تک پہنچتا ہے
d پلس انفینٹی تک جاتا ہے یہ سب بہت ٹھیک ہے لیکن آئیے مسئلے کی طرف چلتے ہیں آئیے مسئلے کی طرف واپس چلتے ہیں . y کا حل s تو
دیکھیں کہ کیا پوچھا جا رہا ہے جو آپ سے پوچھا جا رہا ہے کیا پوچھا جا رہا ہے کیا حل محدود وقت میں لامحدود تک پہنچ جاتا ہے آپ سے حل کا
سے پاور y مربع کی بجائے 1 جمع ہو جائے گا y تعین کرنے کے لیے نہیں کہا جاتا اور دوسرا مسئلہ یہ ہے کہ دائیں ہاتھ کی طرف 1 جمع

کو 1 جمع dy ہے اور آپ تفریق مساوات کو حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں آپ کو y اب فرض کریں کہ آپ کے پاس پاور 10 میں 1 جمع 10
سے 10 کی طاقت میں ضم کرنا پڑے گا اور یہ بہت زیادہ تکلیف دہ ہونے والا ہے۔ وقت لینے والا اور تھکا دینے والا ہو جب کہ جو کچھ پوچھا y
جا رہا ہے وہ یہ ہے کہ کیا حل محدود وقت میں لامحدودیت کی طرف بھاگتا ہے سب ٹھیک ہے
تو سوال کریں کہ زمین پر آپ اس سوال کا جواب کیسے دیں گے بغیر واضح طور پر کوئی ایسا حل تلاش کیے بغیر اور آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ
کیسے ممکن ہے۔ اس کے بارے میں سوچیں کہ یہ بہت آسان ہے اور یہ تفریق مساوات کے نظریہ میں ایک بہت اہم اصول کو ظاہر کرتا ہے لہذا
کے 0 کے برابر 1. ٹھیک ہے آپ یقینی طور پر کہہ سکتے ہیں y مربع y کے ذریعے دیا گیا ہے 1 جمع dt آپ کو کیا دیا گیا ہے جو آپ کو
مربع سے بڑا ہے حقیقت میں سختی سے y مربع y مربع سے زیادہ ہے یقیناً آپ مجھ سے اتفاق کریں گے کہ 1 جمع y dt بذریعہ dy کہ
مربع مثبت ہے یاد رکھیں y بڑا ہے لہذا اب ہم وہی کام کر سکتے ہیں اب
ہے جب وقت 0 t پر آپ کو انٹیگرل کیا ملے گا جب s سختی سے بڑا ہے 1 اب ضم کریں اب ضم کریں 0 dt بذریعہ dy مربع y تو 1 پر
ہے 0 t
کی قیمت 1 ہے y کی y تو
سے بڑا جب آپ 1 کو ضم کرتے ہیں s اسکوائر سے u ہوگا y کا 1 2 sdu تو یہ
سے ah مل جاتا ہے اب آپ حساب کو جاری رکھ سکتے ہیں اور پھر ہم کیا کریں ہم کریں گے ہم یہ مائنس 1 پر یو s تو آپ کو وقفہ سے زیادہ
بڑا دے گا s پر 1 سے 1 منفی y کے s سے بڑا 1 منفی 1 یا s پر y کے s سے بڑا یہ ہو گا کہ مجھے s y کا 1 سے s کرتے ہیں

دکھائے گئے انیکیو s ہم فوری طور پر دیکھتے ہیں کہ جیسا کہ s پر 1 سے زیادہ ہو جائے گا۔ مائنس 1 y کا s تو اس کا مطلب یہ ہو گا کہ
s یقینی طور پر y کا حل s سرخ رنگ میں دکھائی گئی عدم مساوات انفینٹی تک جاتی ہے کیا ality کے دائیں طرف بائیں سے 1 پر جاتا ہے
کے ذریعے انفینٹی میں جاتا ہے جو کہ اصل میں 1 سے کم ہے اب 4 pi کے برابر 1 سے آگے نہیں رہ سکتا درحقیقت ہم نے دیکھا ہے کہ حل
ہم نے کیا کیا ہے؟ ایک بہت ہی آسان کام کیا ہے ہم نے تفریق مساوات سے تفریق عدم مساوات کی طرف چلے گئے ہیں ہم صرف اس 1 کو دستک
مربع سے بڑا ہے اور باقی حساب بہت آسان تھا y dt بذریعہ dy دیتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ
پاور 10 کے لیے ہم وہی کام کر سکتے ہیں جسے ہم آسانی سے دستک دے سکتے ہیں اور آپ کہہ سکتے y تو بھی اگر آپ کے پاس 1 جمع ہو
سے تقسیم کر سکتے ہیں اور اسی خطوط پر آگے بڑھ سکتے ہیں y سے زیادہ ہے ہم طاقت 10 پر y طاقت 10 سے dt بذریعہ dy ہیں کہ
کوئی بھی چیز ہمیں اس سے نہیں روک سکتی۔ ایسا کرنے سے نکتہ یہ ہے کہ تفریق مساوات کو مکمل طور پر حل کرنے کے لئے ضروری نہیں
ہے کہ اسے کسی اور چیز سے بدل دیا جائے اور یہ ضروری نہیں ہے کہ ہم تفریق مساوات کو حل کیے بغیر تفریق مساوات کو حل کریں۔ اب بھی
اپنے نتائج اخذ کرتے ہیں اور یہ تفریق مساوات کے نظریہ میں سب سے اہم چیز ہے جو شاذ و نادر ہی تفریق مساوات کو مکمل کرنے کے لیے حل
کرتا ہے، کوئی اکثر حل کا رویہ حاصل کرتا ہے بغیر واضح طور پر حل کو انجام تک پہنچائے بغیر واضح طور پر حل کا تعین کیے بغیر ہم حاصل
کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اس حل کی خصوصیات جو کہ تفریق مساوات کا نظریہ ہے اب میں ایک اہم تبصرہ درج کرتا ہوں کہ ہم نے تفریق
y بذریعہ dy کے 0 کے برابر 1 کے ساتھ گزر چکے ہیں۔ عدم مساوات y مربع کے ساتھ y کے برابر 1 جمع d dt سے dy مساوات
s سے بڑا ہے جس کا مطلب ہے کہ s سے 1 مائنس 1 y کا s کے 0 کے ساتھ 1 کے برابر ہے اور پھر ہم نے نتیجہ اخذ کیا کہ y مربع
بالکل اسی طرح انفینٹی بن y کا s نوٹ پر جاتا ہے۔ کہ ہم یہ نہیں کہہ رہے ہیں کہ 1 s پہلے ہی لامحدودیت میں چلا گیا ہو گا جب تک y کا
انفینٹی میں جاتا ہے یا y کا s پر جاتا ہے ہم یہ کہہ رہے ہیں کہ 1 s جاتا ہے جس طرح
ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتا لیکن یہ درحقیقت ایک سے چھوٹا ہو y کے وجود کا وقت ہے s ایک پر جاتا ہے یا شاید پہلے کہ یہ s تو جیسے
مربع y کے برابر 1 جمع dt میں پہلی ڈسپلے dy سکتا ہے جس پر ہم عمل کرتے ہیں ہم نے یہ دیکھا ہم نے اصل میں تفریق مساوات کو سلائیڈ
کے t کے برابر ہے t کا y کے ساتھ مربوط کیا 0 کے 1 کے برابر ہم نے اصل میں اس تفریق مساوات کو مربوط کیا ہم نے دیکھا کہ حل y
ہوتا ہے۔ حل 1 کے برابر وقت سے پہلے pi سے 4 t کے اور ہم نے دیکھا کہ حل لامحدودیت پر جاتا ہے کیونکہ tan کے 4 pi برابر
لامحدودیت بن جاتا ہے لہذا عدم مساوات میں ہمارا فرق آپ کو بتاتا ہے کہ وجود کا وقت 1 سے زیادہ نہیں ہوسکتا ہے لیکن یہ حقیقت میں اب سے
بذریعہ dy مربع میں آپ کو دے رہا ہوں y مساوی 1 جمع dt کے بجائے dy by کم ہوسکتا ہے اگلا مسئلہ اسی سوال کا جواب دینا ہے لیکن
مربع سے ضرب کریں دونوں اطراف کو انٹیگریٹ کرنے کے حوالے y مربع دوبارہ آپ 1 جمع y مربع 1 پر 1 جمع y برابر 1 بہ 1 جمع dt
اگر آپ کو ndefinite integrals کا استعمال یقینی انٹیگرلز تجویز کیا گیا ہے لیکن آپ کر سکتے ہیں میں بھی استعمال کریں۔ t سے
یہ پسند ہے
تو یہ آپ کی پسند ہے لیکن یہاں یہ تجویز کیا گیا ہے کہ جہاں بھی ممکن ہو یقینی طور پر استعمال کریں تاکہ آپ خود دوسرے مسئلے کو آزمائیں
اور یہ جاننے کی کوشش کریں کہ آیا یہ حل لامحدود وقت کی لامحدود مقدار تک پہنچ جاتا ہے یا یہ ہمیشہ کے لیے ٹھیک رہتا ہے۔ متغیرات کو الگ
کے حوالے سے انضمام کر رہی ہیں اور اسی طرح اب ہم تیسرے t مربع کو بائیں طرف لا رہی ہیں اور y کرنے پر مبنی دو آسان مشقیں ہیں جو
برابر 1 جمع میں دیکھتے ہیں۔ dx بذریعہ ydy کو 1 جمع سائن x مسئلے کو یہاں لیتے ہیں ہم مسئلہ کوزائن sine x کو cosine y
کے برابر ہے dy by dx f xy میں دوبارہ یہ ایک متغیر الگ کرنے والی مساوات ہے یاد رکھیں کہ
اور یہ f کے دو متغیرات کا ایک فنکشن xy میں ڈالیں اور آپ کو دائیں ہاتھ کی طرف کیا ملے گا y کو 1 جمع سائن x تو اس فیکٹر کوزائن
x کے ایک فنکشن کے y کے ایک فنکشن کی پیداوار ہے
کے برابر ہوتا ہے ہم حوالہ دیتے ہیں تفریق مساوات gx hy ہوتا ہے dx بذریعہ dy تو جب بھی دائیں ہاتھ کی طرف کہ جب بھی آپ کے پاس
کے فنکشن کی پیداوار ہے x اکیلے dy by dx کے لیے بطور متغیر جدا ہونے والی مساوات یہ بھی ایک متغیر جدا ہونے والی مساوات ہے
کی موجودگی کی وجہ سے میں یہ فرض کرنے جا رہا ہوں cosine کے نیچے cosine کے اکیلے فنکشن کی وجہ سے یہاں پر y یہاں
pi by ہم کھلے وقفے میں کام کرنے جا رہے ہیں مائنس pi by 2 to pi by 2 کھلے وقفہ میں جھوٹ بولتے ہیں مائنس y اور x کہ
2 to pi by 2 پر pi 2 کی تعریف پورے وقفہ مائنس x کا حل y ٹھیک ہے ٹھیک ہے مسئلہ جاری ہے ثابت ہوتا ہے کہ pi by 2
تک پہنچ جاتا ہے۔ اس خصوصی معاملے پر بات کریں جہاں pi تک 2 y کا حل x کے 2 تک پہنچتا ہے pi x پر کی گئی ہے اور جیسے ہی
کی وضاحت کی گئی ہے 0 کے برابر 0۔ یہاں ایک تبدیلی میں آپ کو صرف ایک تبدیلی کے لیے ایک غیر معینہ انٹیگرل دے رہا y ابتدائی شرائط
ہوں آئیے غیر معینہ انٹیگرلز کے ساتھ کام کریں حالانکہ وہ کمتر مخلوق ہیں کوئی اعتراض نہیں کہ ان کو بھی جینے کا حق ہے جیسا کہ یہ تھا
y سے تقسیم کریں تاکہ cos x اور دو ہمیں y کے حساب سے تقسیم کرنے دیں cos تو آئیے ہم متغیرات کو الگ کریں جیسا کہ یہ ہمیں
y پر ضم کر سکتے ہیں کیونکہ 1 cos y متغیر تمام دائیں طرف ہوں اور ایک انضمام انجام دیں آپ 1 کو x متغیر بائیں طرف ہوں اور
ہے مطلق قدر ڈالنے کی ضرورت نہیں y پلس ٹین y کے حوالے سے یہ لاگ سیکنٹ y کا انضمام کیا ہے secant y ہے secant y
cos یہ کیا جا رہا ہے pi by 2 to pi by 2 جہاں چیز مثبت ہے secant y پلس tan y ہے کیونکہ ہم اس وقفہ میں ہیں مائنس
بھی مثبت ہے اس کے لیے مطلق قدر سائن کی sine y ہونا ایک ہموار فعل ہے یہ مثبت ہے اور ایک جمع sine y پر 1 جمع y cosine
کا انٹیگرل مل گیا ہے sine y ہے اور پھر آپ کو tan جمع log secant پر cos y ضرورت نہیں ہے لہذا یہ 1 کا انٹیگرل ہے

ہے log secant کا انٹیگرل ہے اور انٹیگرل tan ydy جو کہ cos y
پلس کے لاگ کے طور پر ضم ہو جائے گا۔ y تو آپ کو دو لاگز کا مجموعہ ملا ہے یہ کم پروڈکٹ ہو گا اس لیے بائیں ہاتھ کی طرف سیکنٹ مربع
x بائیں طرف آپ کو وہی چیز دائیں طرف ith y دیکھتے ہیں۔ w ٹیبل پھر آپ کو یہاں بہت زیادہ ہم آہنگی نظر آتی ہے جو آپ secant y
کے ساتھ نظر آتی ہے لہذا جب آپ ایک ہی گانے کو ضم کریں گے اور ڈانس کریں گے
تو یہ لاگ سیکنٹ اسکوائر ایکس پلس سیکینٹ ایکس ٹیکس ہوگا لہذا جب آپ اسے انضمام کریں گے
پلس سیکنٹ صحیح وقت آئیے مجھے تھوڑا سا سست کرنے دیں اصل میں کچھ لائنیں ڈال کر بالکل ٹھیک ہے y تو آپ کو لاگ سیکنٹ ملے گا۔ مربع
برابر لاگ سیکنٹ مربع ایکس پلس سیکینٹ ایکس ٹین ایکس پلس y ٹین y پلس سیکنٹ y آپ بائیں طرف سے متفق ہیں آپ کو لاگ سیکنٹ مربع
میں سیکنٹ اسکوائر ایکس پلس c کے برابر طاقت e ٹین بذریعہ y پلس سیکینٹ y ایکسپوینٹیٹ سیکنٹ اسکوائرڈ c انٹیگریشن کا ایک مستقل
سیکینٹ ایکس ٹین ایکس
کسی چیز کے y تو ہم یہاں رکتے ہیں اور یہاں ہم کہتے ہیں کہ یہ حل ہے ٹھیک ہے آپ کو اعتراض ہوسکتا ہے کہ آپ کہہ سکتے ہیں کہ حل
برابر ہونا چاہئے جو اس شکل میں نہیں ہے جس میں ہم نے حل حاصل کیا ہے جس شکل میں حل ملا ہے اس کو مضمر شکل میں بیان کیا گیا ہے آپ
نے مضمر افعال کا مطالعہ کیا ہے اور مضمر فرق آپ کے نصاب کے تفریق کیلکولس حصے میں آپ کو ضمنی افعال کا سامنا کرنا پڑتا ہے اور اس
کا ایک فنکشن ہے لیکن واضح طور پر بیان کیا گیا ہے کہ یہ اس وقت ہونے والا ہے جب بھی آپ تفریق مساوات کو پہلی ترتیب میں x y لیے یہاں
حل کریں گے عام طور پر حل خود کو مضمر میں پیش کرے گا۔ فارم جیسا کہ یہ یہاں ہوتا ہے بالکل ٹھیک ہے لہذا حل مضمر شکل میں دیا گیا ہے
میں c کی طاقت e برابر ہے y tan y پلس سیکینٹ y تو آئیے واپس سلائیڈز پر چلتے ہیں ہاں آپ دیکھتے ہیں کہ سیکنٹ اسکوائر
کیا کیا مسئلہ آپ سے پوچھتا ہے مسئلہ کو دیکھیں مسئلہ کو دوبارہ دیکھیں یہ ثابت ہوتا ہے secant x tan x پلس x اسکوائر secant
ظاہر ہے کہ یہاں حل پورے وقفے پر بیان کیا گیا ہے کچھ نہیں ہوتا pi by 2 to pi by 2 کہ حل کی وضاحت پورے وقفہ پر ہے مائنس
میرا مطلب ہے جب تک آپ کھلے وقفے میں ہیں اس مساوات میں کسی قسم کی پریشانی نظر نہیں آتی، آئیے دیکھتے ہیں کہ x جب اس وقفہ پر
پر جاتا ہے۔ دیکھیں pi بھی 2 سے y کا x آپ کو دکھانا ہوگا کہ ds to pi by 2 ایکس دس کے طور پر دوبارہ کیا مسئلہ پوچھ رہا ہے
پر دائیں ہاتھ کی طرف x ہے کوزائن اسکوائر x کیا ہے جو کہ 1 جمع سائن x ٹین x جمع سیکنٹ x کہ دائیں طرف کیا ہوتا ہے سیکنٹ مربع
0 x تک پہنچتا ہے اور ڈینومینیٹر کوزائن اسکوائر 2 x کے قریب 2 1 جمع سائن pi x پر جب x ہے کوزائن اسکوائر x جمع سائن 1
جاتا ہے۔ ٹو پلس انفینٹی اور وہ دوسرا فیکٹر ایک مستقل ہے x ٹین x جمع سیکینٹ x کے قریب پہنچتا ہے۔ اور اس طرح یہ فیکٹر سیکنٹ مربع
لازمی طور پر انفینٹی پر جانا چاہئے اتفاق سے دیکھیں کہ تفریق مساوات آپ کو y tan y جمع سیکنٹ y لہذا لازمی طور پر یہ سیکنٹ مربع
جمع علامت مثبت ہے اس وقفہ پر کوئی مسئلہ نہیں ہے اور اس psi 1 مثبت cos ہمیشہ مثبت ہے یاد رکھیں dy by dx بتاتی ہے کہ
سے 2 x ایک مونوٹون بڑھانے والا فنکشن ہے ایک مونوٹون بڑھانے والا فنکشن ہے اور جیسے ہی yx مثبت ہے لہذا حل dx بذریعہ dy لیے
میں جانا چاہئے میرا pi beta کو بھی y کے x دیکھیں کہ y پر جاتا ہے اب یہ لازمی ہے کہ اس مساوات سے ہم مجبور کرتے ہیں pi
پر ہوتا pi 2 مائنس x میں 2 تک بڑھتا ہے تاکہ آخری مثال کے مطالعہ میں اس سوال کا جواب دیا جائے کہ جب y of x monotone pi
ہے
تو کیا ہوتا ہے لہذا میں اسے آپ پر چھوڑ رہا ہوں مطالعہ کریں کہ اس فنکشن کا کیا ہوتا ہے سیکنٹ اسکوائر ایکس پلس سیکینٹ ایکس ٹین ایکس کیا
ہوتا ہے جب ایکس مائنس پائی پر 2 تک جاتا ہے
پر جاتا ہے 2 سے عدد جاتا ہے 0 اور اسی طرح pi مائنس x پر جب x اسکوائرڈ cos تو کیا ہوتا ہے یہ 1 پلس سائن ایکس ہوتا ہے
ڈینومینیٹر کرتا ہے لہذا یہ صفر بہ صفر کی شکل ہے لہذا آپ جانتے ہیں کہ اس حد سے کیسے نمٹنا ہے آپ نے اس طرح کے بہت سے حد کے
سے 2 تک اور اسی طرح pi کے جانے کے ساتھ ہی حد کا کیا ہوتا ہے۔ مائنس x مسائل کیے ہیں اور یہ آپ کے لیے ایک دلچسپ مشق ہے کہ
کے دائیں طرف جاتا ہے pi مائنس x کا کیا ہو گا کیونکہ yx آپ یہ بھی تحقیق کرتے ہیں کہ متعلقہ
ہوتا ہے 0 y تو یہ آپ کے لیے اگلے سوال کے بارے میں سوچنے کی بات ہے کہ کیا ابتدائی حالت 0 کے برابر 0 کے دائیں طرف ہے اگر 0 کا
ہوتا ہے 0 x یعنی جب
بھی 0 ہوتا ہے۔ y تو
کے برابر 0 ڈالتے x تو کیا ہوا آخری ڈسپلے مساوات کو قلم کریں جو آپ یہاں اس سلائیڈ میں سرخ رنگ میں دیکھ رہے ہیں آپ اس مساوات میں
ہیں جو سرخ رنگ میں ظاہر ہوتا ہے
کیا ہوتا ہے 0 یاد رکھیں y تو 0 کا
بھی 1 بن جاتا ہے y بن جاتا ہے اور سیکنٹ 1 x بن جاتا ہے سیکنٹ 0 y بن جاتا ہے اور ٹین 0 x ہے۔ ٹین 0 y ہے اور 0 x تو
y کے برابر 1 ہے لہذا جو مساوات سرخ رنگ میں دکھائی جاتی ہے وہ سیکنٹ مربع c کو حاصل کرتے ہیں طاقت e تو جو باقی رہ جاتا ہے ہم
کیا ہے 1 اور اس طرح آپ c مساوی سیکنٹ اسکوائرڈ ایکس پلس سیکینٹ ایکس ٹین ایکس کا پاور y ٹین میں آسان ہو جاتی ہے۔ y پلس سیکنٹ
برابر ملتا ہے سیکنٹ اسکوائر ایکس پلس سیکینٹ ایکس ٹین ایکس یہ مساوات آپ کو مجبور کرے گی y گنا y پلس سیکینٹ y کو سیکنٹ اسکوائرڈ
y کے x کے برابر x یا مجھے لگتا ہے کہ آپ کو اس کی تحقیق کرنی چاہئے کہ کیا یہ اس بات پر عمل کرتا ہے کہ حل x کے برابر y کہ
کے ذریعہ دیا گیا ہے
پلس سیکنٹ y ہے اور اس طرح ہماری یہ مساوات سیکنٹ مربع پڑھتی ہے 1 c کا کیا ہوتا ہے جس کا ہم نے اندازہ لگایا ہے e تو مساوات
y کے xi کے برابر x کیا یہ اس کی پیروی کرتا ہے کہ m ہے سیکنٹ مربع ایکس پلس سیکینٹ ایکس ٹین ایکس اس طرح y بذریعہ ٹین
کے خیال میں آپ کو یقینی طور پر کچھ لمحے گزارنا چاہئے اور اس کے بارے میں سوچنا چاہئے ہم اگلے مسئلے کی طرف جاتے ہیں تفریق
کو حل کریں 0 کے برابر ایک بار پھر سوال یہ ہے کہ کیا حل y مائنس t سے طاقت e پلس dt بذریعہ tdy کو پاور e مساوات 1 پلس
مائنس t کی بھی ایک حد ہوتی ہے کیوں کہ yt کچھ محدود وقت کے لیے لامحدودیت کی طرف فرار ہوتا ہے تفریق مساوات کو حل کرتا ہے کیا
انفینٹی تک جاتا ہے
میں y سے تقسیم کریں پاور مائنس e تو سوالوں کی تعداد آپ کو تفریق مساوات دی جاتی ہے ٹھیک ہے یہ ایک متغیر الگ ہونے والی مساوات ہے
کو تقسیم کرتے ہیں t سے طاقت e اور آپ 1 جمع
e پر 1 جمع t سے طاقت e پرائم پلس yy کو حاصل کرتے ہیں پاور e پرائم ہم y بذریعہ dt بذریعہ dy تو ہم کرتے ہیں کہ مخفف
پلس لاگ y کے پاور e کو 1 پلس e کے حوالے سے انضمام کر سکتے ہیں اور آپ t سے پاور ٹی 0 کے برابر ہے آپ اسے فوری طور پر
سے 1.12 e انضمام کا مستقل ہے انضمام کا مستقل تقریبا واضح طور پر اصطلاح مثبت ہے۔ c میں جہاں t میں حاصل کر سکتے ہیں پاور
کا لاگ بھی مثبت ہے لہذا انضمام کا مستقل مثبت ہونا ضروری ہے ٹھیک ہے لہذا تفریق مساوات t کا پاور e مثبت ہے اور 1 پلس y میں پاور
بھی ظاہر کرتی ہے
پرائم منفی ہے y پرائم ہے مساوات سے منفی آپ فوری طور پر دیکھتے ہیں کہ y تو تفریق مساوات آپ کو کیا بتاتی ہے یہ آپ کو بتاتی ہے کہ
اور ایکسپونینشل فنکشنز مثبت ہیں

پرائم ہر جگہ منفی ہے y تو مساوات سے آپ دیکھتے ہیں کہ
ایک مونوٹون ڈیکریزنگ فنکشن ہے کیوں مونوٹون ڈیکریزنگ فنکشن ہے اور فرض کریں کہ حل زندہ رہنا تھا۔ پورے وقفہ پر صفر سے انفینٹی y تو
فرض کریں کہ لامحدود وقت میں لامحدودیت کی طرف کوئی فرار نہیں ہے دو امکانات ہیں دو منظرنامے حل لامحدود تک پہنچ جاتا ہے ایک یہ ہے
کہ ایک محدود وقت کی تباہی ہے یا حل ہمیشہ زندہ رہتا ہے فرض کریں کہ ایک حل ہمیشہ زندہ رہتا ہے پھر آپ کیا کر سکتے ہیں ہم 1.12 میں
لامحدودیت کی طرف مائل کر سکتے ہیں آئیے 1.12 پر واپس چلتے ہیں
کی تمام اقدار کے لئے درست ہونا تھا t اگر یہ cou ld تو یہ ایک مساوات ہے اور اگر میں
تو اس کا حل ہے کہ ہمیشہ زندہ رہنا ہے
انفینٹی میں جاتا ہے t کو انفینٹی میں جانے کی اجازت دے سکتا ہوں اگر t تو میں
y کی طاقت e میں لامحدودیت میں جاتا ہے دوسری اصطلاح t کا پاور e ٹرم لاگ میں 1 پلس t کے لاگ کا کیا ہوتا ہے پاور e تو 1 جمع
بھی مثبت ہے لہذا بائیں ہاتھ کی طرف انفینٹی میں جاتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ کی طرف مستقل ہے یہ کیسے ممکن ہے ہمارے پاس تضاد ہے یہ ممکن
نہیں ہے حل پورے وقفہ 0 انفینٹی پر رہتا ہے حل ہمیشہ کے لئے زندہ نہیں رہ سکتا حل کو لامحدود وقت میں لامحدودیت کی طرف فرار ہونا
جمع انفینٹی پر جاتا ہے y کا t چاہئے کیا یہ انفینٹی میں جائے گا یا یہ مائنس انفینٹی پر جائے گا اگر
کو مائنس انفینٹی y کا t پلس انفینٹی پر جائے گا اور 1.12 کے لیے ایسا ہونے سے منع کرتا ہے اس لیے اس صورت میں y تک پاور e تو
کون سا سب سے بڑا وقفہ ہے جس پر حل ہے وضاحت کی t کی طاقت 0 پر جانے والا 0 y حاصل کرنا چاہیے e پر جانا چاہیے اور ہمیں
کے طور پر کیا ہوتا ہے۔ اس کی طرف جاتا ہے کہ وجود کا وقت کیا ہے کہ وہاں ایک محدود وقت ہے جس میں چیز مائنس انفینٹی t گئی ہے اور
ہے t کی طرف فرار ہونے والی ہے اور وہ محدود وقت سرمایہ
t کی طرف جاتا ہے کیپٹل t تو سرمائے کی قدر کیا ہے اتنی کم
میں جاتا ہے مائنس انفینٹی پر جاتا ty کیپٹل t کا لاگ ملے گا لیکن جیسے ہی چھوٹا e پر 1 جمع t تو مساوات 1.12 میں آپ کو پاور کیپٹل
t اصطلاح غائب ہو جاتا ہے اور دوبارہ دائیں ہاتھ کی طرف مستقل ہے اور اسی طرح آپ حساب لگا سکتے ہیں کہ کیپٹل y کا پاور e ہے یہ
مائنس 1 دیا جائے گا c کے برابر پاور e کو t کے ذریعے پاور کیپٹل e کیا ہے اسے t کیا ہونے والا ہے کیپٹل
کا لاگ ان ہوگا۔ پاور سی مائنس 1 کی طرف تاکہ بنیادی طور پر آپ کے لیے اس پہلے سوال کا جواب دوں میں دوسرا e کیا ہے t تو کیپٹل
حصہ آپ کے لیے چھوڑ دوں گا کہ آپ آپ کے بارے میں سوچیں آپ کے پاس سوچنے کے لیے کچھ خوراک ہونی چاہیے، ہم اب اس خاص معاملے
کو دیکھیں گے کہ جب ہم اسے دیکھتے ہیں
سے h ہمیں یاد ہے کہ ہم ہر وقت hy میں gx سے dx eq ual بذریعہ dy تو کیا ہوتا ہے تفریق مساوات جو کہ متغیر سپار ایبل
کے غائب ہونے میں کیا مسئلہ ہے اگر h صفر نہیں ہے ٹھیک سے gx تقسیم کرتے رہے ہیں ہم اس حقیقت کو بھی استعمال کرتے رہے ہیں کہ
صفر ہو جائے h
سے تقسیم کر سکتے ہیں لیکن جی کے صفر ہونے کا کیا ہوگا، جی h نہیں ہے صفر کو ہم اب بھی h سے تقسیم نہیں کر سکتے اگر h تو ہم
کے صفر ہونے میں کیا نقصان ہے، نقصان یہ ہے کہ ہم متغیرات کی تبدیلی کو استعمال کر رہے ہیں اہ تھیوریم، متبادل تھیوریم کو یاد رکھیں کہ ہم
متبادل تھیوریم استعمال کر رہے ہیں کئی بار اور اور ہم صرف متبادل تھیوریم استعمال کر سکتے ہیں مشتق غیر صفر ہے پورے وقفے کے دوران
کا یہ جی صفر ہوتا ہے ٹھیک ہے پھر میں کہتا ہوں کہ عام طور پر حقیقی زندگی کے حالات میں x اس بارے میں فکر کریں کہ کیا ہوتا ہے جب
جب تفریق مساوات آپ کے پاس آتی ہیں
کے y naught تو وہ کریں گے مقررہ ابتدائی شرائط کے ساتھ آپ کے پاس آتے ہیں اور اس طرح ابتدائی شرائط ایسی ہیں کہ آپ کے پاس
ht کے برابر ہے x وقت میں نظام کی حالت y nought کچھ مقررہ وقت ہے اور x naught کیوں نہیں ہے جہاں x nought برابر
کی کوئی چیز صفر ہو جائے y اب فرض کریں کہ اگر
صفر ہوتا ہے h کا y تو فرض کریں کہ دائیں ہاتھ میں
تو دائیں ہاتھ کی طرف صفر ہوتا ہے نوٹس ہے کہ جب آپ مستقل فعل کو بائیں طرف فرق کرتے ہیں
کے برابر ہے جب آپ y naught برابر y تو مستقل فعل امتیازی مساوات کو دائیں طرف پورا کرتا ہے۔ ہینڈ سائیڈ 0 ہے اور مستقل فنکشن
اسے لگاتے ہیں
تفریق مساوات کو y کا مستقل فعل x کے برابر y naught تو آپ دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کی سائیڈ بھی 0 ہے۔ لہذا 0 کے برابر 0 ہاں، لہذا
کے برابر ہے اور اس وجہ سے خاص y naught ہر جگہ y پورا کرتا ہے۔ یہ ابتدائی حالت کے فنکشن کو بھی مطمئن کرتا ہے کہ ہر جگہ
کے برابر ہے لہذا ہم نے ابتدائی قدر کے مسئلے کو حل کیا ہے یعنی حل مستقل حل ہے لہذا y naught پر بھی یہ x naught طور پر
کی کوئی چیز 0 نہیں ہے y کو اس انتہائی معمولی انداز میں سنبھالا جا سکتا ہے دوسری طرف اگر h is 0 معاملہ جب
کے x nought سے تقسیم کر سکتے ہیں یاد رکھیں کہ ہم صرف ایک چھوٹے سے وقفے میں اردگرد کی صورتحال کو دیکھ رہے ہیں۔ hy تو ہم
ارد گرد یاد رکھیں کہ حل وقت کے پورے وقفہ تک زندہ نہیں رہ سکتا ہے اور پورا ڈرامہ صرف ابتدائی حالات کے پڑوس میں ہی درست ہے لہذا
کے قریب ہونے والا ہے۔ صفر نہیں ہے y nought h کے y y nought کے قریب ہے اور x x nought
صفر کے قریب نہیں ہونے والا ہے کیوں کہ تسلسل پسند نہیں ہے h تو
صفر ہو سکتا ہے اس صورت میں متغیرات کی تبدیلی کے فارمولے کا ہمارا g کا x سے تقسیم کر سکتا ہوں لیکن h کی کمی کو y تو میں
صفر ہے اور ان g صفر ہے g استعمال متبادل تھیوریم کا استعمال شبہ ہے کہ ایسی صورت میں ہم کیا کریں گے کہ ہم یہ فرض کریں گے کہ
ہے سختی سے مثبت یا سختی سے منفی ہونے والے ہیں اور ہمیں صورتحال کا تجزیہ کرنا ہوگا۔ مختلف وقفوں g 0 g جگہوں کے درمیان جہاں
پر جن پر جی غیر صفر ہے یہ جی الگ تھلگ جگہوں پر 0 ہے جس سے الگ نمٹنا ہوگا بالکل ٹھیک اگلی مثال کے طور پر ہم جیومیٹری سے ایک
بہت مشہور مسئلہ لیتے ہیں یہ مسئلہ مختلف کتابوں میں موجود ہے۔ یہ ہے انتا مشہور ہے کہ مجھے واقعی یاد نہیں ہے کہ میں نے پہلی بار یہ
مثال کہاں دیکھی تھی لہذا میں آپ کو اس کا حوالہ نہ دینے کے لئے معذرت خواہ ہوں ایک طیارہ کا وکر تلاش کریں کیا مسئلہ ہے اس پراپرٹی کے
کے برابر طیارے کا وکر تلاش کریں۔ اس کے نارمل اسی نقطے سے گزرتے ہیں جیومیٹریکل طور پر آپ کا وجدان آپ کے جیومیٹریکل fx ساتھ
وجدان کو آپ کو بتانا چاہیے کہ یہ وکر ایک دائرہ ہونا چاہیے، آئیے کیلکولس کا استعمال کرتے ہوئے عین ریاضیاتی استدلال کے ساتھ اس وجدان کا
کو x naught y naught بیک اپ لیں، آئیے یہ مان لیں کہ جس نقطہ سے تمام نارمل گزرتے ہیں وہی اصل ہے اور آئیے ہم ایک عام نقطہ
کے ساتھ لیتے ہیں fx برابر y گھماؤ پر مساوات
پر نارمل کی ڈھلوان کیا ہے اچھی طرح سے مجھے تصویر کھینچنے کی کوئی ضرورت نہیں ہے کیونکہ میں آپ x naught y naught تو
سے درخواست کرتا ہوں کہ آپ ان لیکچرز کو سنیں میں آپ سے گزارش کرتا ہوں کہ ڈوڈل بنائیں اور خود تصویریں بنائیں یہ اتنا آسان ہے کہ
x تصویر کی ضرورت نہیں ہے آپ کے پاس آپ کی تیز تخیل بھی ہے آپ کو یہ پوائنٹ مل گیا ہے نقطے پر منحنی خطوط پر کچھ نہیں ہے
کیا ہے عام نارمل کی ڈھلوان ٹینجنٹ کے لیے کھڑی ہے لہذا f prime x nought کیا ہے ٹینجنٹ کی ڈھلوان nought y nought
پرائم پر یہ وہی ہے جو آپ سلائیڈ f کے x nought پرائم ہے کوئی ڈھلوان نہیں نارمل کا مائنس 1 ہو جائے گا f کی x ٹینجنٹ کی ڈھلوان

x nought to the power -1 پرائم آف f میں دیکھ رہے ہیں مائنس
y nought مائنس x naught y مائنس x میں m برابر y nought مائنس ہے y تو نارمل کی مساوات کیا ہے نارمل کی مساوات
f prime of x naught plus x میں y naught مائنس y اتنی کم ترتیب آپ کو x nought مائنس x ڈھلوان میں m برابر
برابر صفر کے برابر ہے یہ اس کی مساوات ہے نارمل اب ہم کیا کہہ رہے ہیں ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ نارمل اصل سے x nought مائنس
کو 0 کے برابر کرتا ہوں y کو 0 کے برابر اور x گزرتا ہے اس لیے اصل اس مساوات کو پورا کرتی ہے جب میں
تو یہ مساوات درست ہونی چاہیے
x naught plus y naught in برابر 0 یہاں ہم کیا کرتے ہیں۔ حاصل کریں ہمیں مساوات y کو برابر رکھیں یہاں 0 اور x تو آئیے ہم
یہ مساوات 1.13 ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ 1.13 کو منحنی خطوط کے تمام پوائنٹس پر منحنی f prime of x nought equal to 0
خطوط پر ہونا چاہئے ہمیں اس مساوات 1.13 کو پکڑنا چاہئے۔
تو یقیناً اگلا کام یہ ہوگا کہ مساوات 1.13 کو دیکھیں اور صرف ان پریشان کن سبسکرپٹس کو صفر کر دیں
کے لیے وکر پر ہے اور اس لیے ہم ایک x naught y naught تو آئیے پریشان کن سبسکرپٹس کو صفر چھوڑ دیں کیونکہ یہ تمام پوائنٹس
کے مانوس اشارے کا استعمال کرتے ہوئے اور dx کی جگہ f prime کے x پوائنٹ لکھتے ہیں۔ ایک تین سب اسکرپٹ صفر کے بغیر اور
یہ ایک متغیر الگ الگ تفریق مساوات ہے یہ x برابر ہے مائنس ydy by dx کے برابر کیا ہے یہ ydy by dx 0 پلس x اس طرح 1.13
مربع بذریعہ 2 برابر y ایک ہے متغیر الگ ہونے والی تفریق مساوات اور آپ اسے فوری طور پر ضم کر سکتے ہیں اور آپ حاصل کر سکتے ہیں
کیلکولس کا n وکر دائرہ ہے لہذا ہمارے وجدان میں مکھی ہے cمربع برابر 2 x مربع جمع y مربع بذریعہ 2 جمع مستقل یا x مائنس
استعمال کرتے ہوئے عین ریاضیاتی استدلال کے ذریعہ بیک اپ لیا گیا ہے لہذا وکر اس خاصیت کے ساتھ وکر ہے جو تمام نارمل ایک نقطہ سے
گزرتے ہیں ایک دائرہ ہے لہذا اب ہمارے ایجنڈے میں اگلی آئٹم رین ویل کی کتاب ابتدائی تفریق مساوات سے ایک بہت ہی دلچسپ مثال کا مطالعہ
کرنا ہے۔ عین مطابق حوالہ بعد میں مثال کے آخر میں دیا جائے گا
مربع کا مربع y جمع کرتے ہیں 1 مائنس dx بذریعہ dy مربع x تو مثال کے طور پر ہم ایک متغیر الگ ہونے والی مساوات مربع جڑ 1 مائنس
حاصل dy مربع کی جڑ کے ساتھ انٹیگرل xy کا 0 مساوی جڑ 3 بذریعہ 2 معمول کے مطابق آگے بڑھتے ہوئے ہمیں 1 مائنس y جڑ برابر 0
انٹیگرل x کا الٹا سائن ہے اور y انٹیگرل جیسا کہ سب جانتے ہیں کہ dx. y مربع کے برابر 0 کے مربع جڑ پر انٹیگرل x ہوتا ہے 1 مائنس
کا الٹا سائن ہے 0 کا انٹیگرل یقیناً اب ایک مستقل ہے انضمام کے مستقل کا تعین کرنے کے لیے ہم ابتدائی اعداد و شمار میں ابتدائی حالت کے لیے x
جڑ 3 بذریعہ 2 جڑ 3 کیا ہے بذریعہ 2. y ہے کیا x 0 ابتدائی شرائط ڈالتے ہیں جب
کو جڑ کے 3 بذریعہ 2 کے برابر رکھیں۔ y کو 0 کے برابر رکھیں اور x تو یہاں
بذریعہ 3 ہے i تو جڑ 3 بذریعہ 2 کا سائن الٹا
ہے۔ pi by 3 تو مستقل کی قدر
تو اس کے بارے میں میرا مطلب ہے کہ یہ بہت ہے۔ آسان مسئلہ جہاں تک اس ابتدائی حالت کے ساتھ اس تفریق مساوات کو حل کرنے کا تعلق ہے
لیکن ہمیں یہیں نہیں رکنا چاہیے کہ ہمیں اپنی تحقیقات کو تھوڑا آگے لے جانا چاہیے اور کچھ بہت ہی دلچسپ چیزیں سامنے آتی ہیں معذرت کے
ساتھ یہ بہت آسان لگ سکتا ہے آئیے حل دیکھتے ہیں۔ کچھ تفصیل میں
ہے یاد رکھیں pi by 3 تو ہمیں مستقل کی قدر کیا ملتی ہے
ملتے ہیں pi by 3 minus sine inverse of x برابر sine inverse of y کے y تو ہمیں
سائن کے اضافی x کے 3 مائنس سائن انورس آف sine by کی pi برابر ملتا ہے y تو آئیے دونوں اطراف کی سائن لیتے ہیں ہمیں
فارمولے کو یاد کرتے ہوئے سائن کے لیے اضافی فارمولہ کیا ہے براہ کرم یہ ایک جمع بی کا سائن ہے سائن اے کوس بی پلس کوس اے سائین بی
cos a sine b اور مائنس بی کا سائین سائن اے کوس بی مائنس
cos pi by 3 in sine inverse of x سے مائنس cos کے 3 sine inverse کے x ہونے جا رہا ہے sine pi تو یہ
پھر ہمیں شاید اس x مائنس نصف x 2 cos of sine inverse of x کے برابر دیتا ہے روٹ 3 y بالکل ٹھیک ہے تاکہ یہ آپ کو
میں 4 x سے کیا ملتا ہے پورا مربع ہے 3 x 2 جمع y کو بائیں طرف اور مربع پر لانا چاہئے جب ہم مربع کیا کرتے ہیں ہمیں x آدھے
یہ صرف 1 ہے x x کیا 1 مائنس سائن اسکوائرڈ سائن الٹا x اور کون سا ہے 1 مائنس سائن اسکوائرڈ سائن الٹا x اسکوائرڈ سائن الٹا cos
مائنس ایکس اسکوائرڈ یہ صرف 1 مائنس ایکس اسکوائر ہے اچھی طرح سے اگلا کام یہ ہوگا کہ اس کو بڑھایا جائے اور اچھی طرح سے
ملے گی۔ دیکھیں یہ اوتار کتنا 4 x مساوی 3 xy اسکوائر پلس y اسکوائر پلس x اصطلاحات جمع کریں ہمیں زیادہ خوبصورت فارمولیشن
pi برابر sine inverse of y plus sine inverse of x کا y مختلف ہے ہمارے پچھلے اوتار کے حل کا ہمارا پچھلا اوتار
کے لحاظ سے دیا گیا ہے آئیے x واضح طور پر y تھا اور یہ اب ہمیں ایک بہت ہی مختلف نظر آنے والی مساوات ملی ہے جس کا حل by 3
جہاز میں ایک وکر ہے xy تھوڑا آگے بڑھتے ہیں۔ آئیے ہم اس پر ہمت نہ ہاریں۔ آئیے ہم یہ سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں کہ یہ وکر کیا ہے یہ
ہوتا 4 x مربع برابر 3 y مربع جمع x کی اصطلاح نہ ہوتی اگر یہ صرف xy اگر
اصطلاح چیزوں کو قدرے پیچیدہ بنا رہی xy تو ہم بہت خوش ہوں گے اور ہم' رداس جڑ 3 بائی 2 کا دائرہ کھینچ رہا ہوں گا لیکن بدقسمتی سے یہ
4۔ وکر کی نوعیت x برابر ہے 3 xy مربع جمع y مربع جمع x ہے لیکن ہم یہ سمجھنا چاہیں گے کہ یہ کس قسم کا وکر ہے جس کی مساوات
برابر 1 x لٹل y کے علاوہ کیپٹل x مساوی 1 کو جڑ 2 پر کیپیٹل y مربع برابر 3 بذریعہ 4 آئیے ہم تھوڑا سا x مربع جمع y مربع جمع x
کے لئے آپ میں سے وہ لوگ جنہوں نے کوآرڈینیٹ جیومیٹری کو صحیح طریقے سے سیکھا ہے وہ y مائنس کیپیٹل x کو جڑ 2 میں بڑے
کے زاویہ سے 4 کے ذریعے گھما pi کے زاویہ سے 4 سے گھما رہے ہیں، ہم کوآرڈینیٹ سسٹم کو pi پہچانیں گے کہ ہم کوآرڈینیٹ سسٹم کو
4۔ اچھی xye qual to 3 by مساوات کا کیا ہوتا ہے مربع جمع y مربع جمع x رہے ہیں اور یہ سمجھنے کی کوشش کر رہے ہیں کہ
کے برابر ہے ۔ کم اور دیکھو یہ ایک 2 x مربع برابر 3 y مربع جمع x طرح سے نئی مساوات مساوات یا نئے کوآرڈینیٹ سسٹم میں وکر 3
ایک معیاری بیضوی ہے اب آئیے اس بیضوی کو ذرا غور سے دیکھتے ہیں نئے نقاط میں 2 x مربع برابر 3 y مربع جمع x بیضوی ہے 3
کے برابر ہے ۔ آئیے ہم یہ جاننے کی کوشش کریں کہ سیمی میجر محور کیا ہے اور نیم معمولی اس 2 x مربع 3 y مربع پلس xبیضوی 3
بیضوی کا محور آئیے ہم مساوات کو 3 3 سے 2 سے تقسیم کریں تاکہ دائیں ہاتھ کی طرف 1 بنایا جائے
تو اگر ہم ایسا کرتے ہیں
مربع 3 پر 2 مساوی 1۔ y کا مربع نصف پر اور x تو کیا ہوتا ہے آئیے 3 سے 2 سے تقسیم کرتے ہیں ہمیں کیا ملے گا
تو نیم اہم محور کیا ہے 3 کا مربع جڑ ہے 2 سے زیادہ کا نیم اہم محور 3 کا مربع جڑ ہے 2 اور نیم معمولی محور 1 پر جڑ 2 ہے۔ لہذا معیاری
بذریعہ 4 pi بیضوی بڑے اور چھوٹے محور کوآرڈینیٹ محور کے ساتھ ہیں لیکن یاد رکھیں ہم نے کیا کیا ہم نے کوآرڈینیٹ سسٹم کو گھمایا زاویہ
کے ذریعے 4 سے گھمایا۔ pi ہم نے کوآرڈینیٹ سسٹم کو زاویہ
کے زاویہ 4 پر ڈھلوان والی لکیر ہے اور دوسری لائن جو یہ ایک زاویہ پر ڈھل رہی ہے pi تو اصل بیضوی کا بڑا اور چھوٹا محور کیا ہے یہ
سے گھمایا 4 pi ایک معیاری بیضوی ہے جو زاویہ 4 x برابر 3 xy مربع جمع y مربع جمع x مائنس پائی از 4۔ اس طرح اور اس طرح

جاتا ہے۔
تو یہ خوبصورت مثال ارل ڈی رین ویل کی ابتدائی تفریق مساوات سے ہے جس کا پانچواں ایڈیشن اس کتاب سے گزر چکا ہے۔ اس کے دسویں
ایڈیشن کے ایڈیشن آچکے ہیں لیکن میں پانچویں ایڈیشن کا حوالہ دے رہا ہوں اور صفحہ نمبر پانچویں ایڈیشن کا حوالہ دے رہا ہوں اس لیے یہ مسئلہ
اس خوبصورت کتاب کے صفحہ 4243 پر نظر آتا ہے اور یہ اس کے مسائل کا ایک قابل ذکر مجموعہ ہے جسے میں دیکھنے کی درخواست کرتا
بذریعہ مربع جڑ 1 dy ہوں۔ بیضوی افعال کی پیدائش اب آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ خاص مسئلہ بہت آسان تھا یہ بہت آسان مسئلہ ہے انٹیگرل
کے انضمام مربع جڑ پر 1 مائنس ایکس مربع کا 0 کے برابر آپ سوچیں گے کہ ہم ایسی معمولی ورزش کیوں کرتے ہیں dx مربع پلس y مائنس
شاید آپ میں سے کچھ کو یہ بورنگ لگے لیکن میں آپ کو یہ باور کرانا چاہتا ہوں کہ اس سے ریاضی کا ایک انتہائی غیر معمولی اور بہت ہی
سے پاور فور سے بدلنا ہے اگر x مربع کو x کو پاور چوتھے سے بدلنا ہے اور اس y سے y مربع کو y دلچسپ حصہ ہوتا ہے۔ اب اس
آپ اپنے انٹیگرل کیلکولس کلاسز میں بہت سارے انٹیگرلز پر کام کر رہے ہیں
کے غیر معینہ انضمام کو 1 مائنس ty سے پاور 4 کو ضم نہیں کیا جا سکتا ہے آپ y بذریعہ مربع جڑ 1 مائنس dy تو آپ کو معلوم ہوگا کہ
کے مربع جڑ سے طاقت 4 سے اچھی طرح سے شمار نہیں کر سکتے ہیں y
x کے لیے c برابر اس خوبصورت شکل میں y کے الٹا سائن الٹا x تو کیا ہوتا ہے کہ ہم نے جو کچھ بھی کیا ہمیں یہ مساوات مل گئی ہے
برابر تین چوتھائی کے برابر ہے xy مربع جمع y مربع جمع
مزید آگے بڑھا eule r تو کسی نہ کسی طرح آپ کو شاید یہ خیال آجائے کہ تفریق مساوات کا تعلق بیضوی سیکنڈ ڈگری وکر سے ہے لہذا
اور اس نے اس صورت حال کو زیرو سے یو اہ کے اٹوٹ انگ کو دیکھا جس کے ساتھ ڈینومینیٹر میں چوتھی طاقت ہے لہذا ہم نے جو کچھ بھی کیا
u dt ہے جو ہم نے ابھی کیا ہے تھوڑا سا مختلف شکل میں لکھا جا سکتا ہے یہ ایک ہی خیال ہے لیکن تھوڑا سا مختلف میں اوتار انٹیگرل 0 سے
مربع کی جڑ t بذریعہ 1 مائنس dt مربع ایک بار پھر t بذریعہ مربع جڑ 1 مائنس v dt مربع پلس انٹیگرل 0 سے t بذریعہ جڑ 1 مائنس
برابر ہے یو روٹ phi کے uv یہ پیچیدہ ایکسپریشن کیا ہے یہ v شامل ہے اور u ہے لیکن مختلف حدود 0 سے کچھ پیچیدہ اظہار جس میں
سے پاور 4 میں بدل دیا اور مزید کے t اسکوائر کو t اسکوائر کیا ہے یولر نے کیا کیا اس نے u روٹ 1 مائنس v مربع پلس v مائنس 1
ساتھ اسی طرح کا اظہار حاصل کیا۔ پیچیدہ فیس اور یہ ایک بہت ہی قابل ذکر کارنامہ تھا کیونکہ تین دہائیوں بعد گاؤس نے الٹا فنکشن کا مطالعہ کیا
مربع کی جڑ سائن انورس ہے اور اس کا الٹا سائن فنکشن ہے۔ آئن اسی طرح فنکشن انٹیگرل 0 t بذریعہ 1 مائنس u dt ریمر انٹیگرل 0 سے
سے پاور 4 میں بھی ایک الٹا ہوتا ہے جسے بیضوی سائن فنکشن کہا جاتا ہے اور ان کا مطالعہ گاؤس t بذریعہ مربع جڑ 1 مائنس u dt سے
نے تقریباً تین دہائیوں بعد 1796 میں کیا تھا اور گاس نے اس کے لیے ایک اضافی فارمولا حاصل کیا تھا۔ بیضوی سائن فنکشن ٹرائیگونومیٹرک سائن
فنکشن کے اضافی فارمولے کا عین مطابق ہے لہذا آپ دیکھیں گے کہ جو ایک بہت ہی معصوم نظر آنے والی تفریق مساوات دکھائی دیتی ہے اس نے
آپ کو گیٹ وے کے ذریعے ریاضی کے ایک بہت ہی شاندار حصے میں لے گیا ہے جس میں بیضوی افعال کا نظریہ ہے۔ ان چیزوں کی بہت
کی کتاب میں قابل ذکر نشانی افعال میں مل سکتی ہے جن کے لیے میں آپ کو سلائیڈز میں حوالہ ai markus shavish خوبصورت تفصیل
کو لے کر اس سادہ متغیر الگ ہونے والی تفریق مساوات کو لے کر اسے ایک کے طور پر لیا جائے۔ آپ کو x دیتا ہوں اس لیے خیال آیا کہ اس
ریاضی کے ایک خوبصورت حصے کی ایک جھلک دینے کا بہانہ آپ

Prutor@IITK