ریاضی کے چینل میں خیرمقدم ہے لہذا یہ مسئلہ حل کرنے کے سیشنز کی ایک سیریز کا حصہ ہے میں انٹیگرل iit pal ہیلو ناظرین کا
کیلکولس اور ڈیفرینشل مساوات پر مسئلہ حل کرنے کے چند سیشن دوں گا لہذا یہ انٹیگرل کیلکولس میں سے ایک لیکچر ہے
ایڈوانس پیپرز سے کیا جاتا ہے j تو آئیے ہم اس سے آغاز کرتے ہیں۔ کچھ مسائل کرتے ہوئے مسائل کا انتخاب بنیادی طور پر پچھلے سالوں کے
اور میں مسائل کے ساتھ مسائل میں استعمال ہونے والے اہم تصورات کا بھی جائزہ لوں گا لہذا آئیے مسئلہ نمبر ایک سے شروعات کرتے ہیں
pi by 4 of dx over 1 plus e سے pi by 4 انٹیگرل کے برابر ہے مائنس pi تو سوال ایک کہتا ہے کہ اگر میں 2 سے زیادہ
مربع کے برابر ہے i پھر ستائیس گنا cos x گنا 2 مائنس x تک پاور سائن
مربع i تو بنیادی طور پر ہمیں اس قطعی انٹیگرل کا اندازہ لگانا ہے اور پھر ہیس کی قدر کا حساب لگانا ہے۔ سات
کا انٹیگرل ہے fxdx کا a سے a تو اگر ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ ہمارے پاس فارم مائنس
al to integral to ہے equ انٹیگرل کے لیے یہ fx کے کسی بھی فنکشن afxdx سے a تو مجھے یاد کرنے دیں کہ مائنس
کا a کا اندازہ کرنے کے بجائے ہم صرف صفر سے a سے a اس لیے مائنس zero of a to f of x plus f minus xdx
fxdx کے لیے اسے afxdx اندازہ لگا سکتے ہیں اس لیے اس کا ثبوت بہت آسان ہے اس لیے ہم جو کرتے ہیں وہ مائنس سے انٹیگرل ہوتا ہے۔
تک انٹیگرل یہ قطعی انٹیگرل کی ایک سادہ خاصیت ہے afxdx سے صفر تک انٹیگرل کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جمع صفر سے a کے مائنس
تک انٹیگرل ہے b سے a کہ اگر ہمارے پاس کچھ
x تک اب ہم کیا کرتے ہیں پہلے انٹیگرل میں b سے c اور c سے a تو ہم انٹیگرل سے دو انٹیگرلز کے مجموعے میں تقسیم ہو سکتے ہیں۔
کے برابر ڈالیں گے ydx کو مائنس x کے برابر ڈالتے ہیں پہلے انٹیگرل میں اگر ہم y کو مائنس
کے برابر ہوتا ہے y صفر x اور جب a کے برابر ہے ay برابر مائنس x ہو جائے گا اور جب dy تو مائنس
تو صفر ہوتا ہے
ہے جو کہ مائنس dy مائنس dx سے صفر تک انٹیگرل لکھا جا سکتا ہے اور f کے y کو مائنس fxdx سے صفر کا انٹیگرل a تو مائنس
کے ral minus ydy کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ integ اور اسے f کا ydy سے صفر کے برابر ہے۔ مائنس a آف انٹیگرل
سے a تک انٹیگرل کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے لہذا مائنس f کے a کے صفر سے xdx تک جسے مائنس f کے a صفر سے
کے برابر ہے جو کہ ہے یہ ہمارا فارمولہ یقیناً دو خاص صورتیں ہیں جو xdx کے f جمع x کے مائنس af تک انٹیگرل صفر سے afxdx
کے برابر ہے f کے مائنس x ہے f کا x ایک طاق فنکشن ہے جو مائنس f بہت سے مسائل میں اہم ہیں لہذا اگر
f کا انٹیگرل صفر کے برابر ہوگا اور دوسرا یہ ہے کہ اگر afxdx سے a صفر ہو جائے گا۔ لہذا مائنس fx جمع x مائنس f تو پھر یہ
کے برابر ہے x کے x تمام f کا x ایک یکساں فنکشن ہے جو مائنس
تک انٹیگرل اب ہم مسئلے کا حل کرتے ہیں afxdx کا انضمام دو بار کے برابر ہے۔ صفر سے afxdx سے a تو مائنس
یہ برابر x کا اندازہ کریں مائنس f اب آئیے x گنا دو مائنس دو sin x سے e برابر ہے 1 سے زیادہ 1 جمع f کا x تو ہمارے پاس ہے
کی مائنس سائن x x کی سائن مائنس x اب مائنس xمائنس 2 s cos سے مائنس ایکس گنا 2 منٹ کے پاور سائن تک e ہے 1 اوور 1 پلس
ہے
کے e جیسا ہی ہے اسے cos 2x ایک ایون فنکشن ہے لہذا یہ 2 مائنس cos کے برابر ہوگا اور sin x کے پاور مائنس e تو یہ 1 پلس
سے تقسیم کیا cos 2 x گنا 2 مائنس sin x سے e کو 1 جمع sin x طور پر آسان بنایا جا سکتا ہے۔ پاور
کے برابر ہے f کے x تو ہم دیکھتے ہیں کہ ڈینومینیٹر
کو جوڑتا ہوں x مائنس f پلس xfx مائنس f جمع fx تو اب اگر میں
cos 2 x گنا 2 مائنس sin x سے تقسیم کیا گیا e کو سائن ایکس سے 1 جمع e تو برابر ہے 1 جمع
cos 2x کے برابر ہے اب میں استعمال کروں گا cos 2 x منسوخ ہو جائے گا اور یہ 1 سے زیادہ 2 مائنس e to sine x تو 1 جمع
مائنس 1 کے برابر ہے x مربع cos کا فارمولا 2
کے برابر ہے x مربع cos مائنس 2 3 over تو یہ 1
ہوگا 4 کا 1 بائی 3 مائنس pi by 2 فیکٹر جو 0 سے integral i is equal to we are 2 by pi تو ہمارے پاس جو ہے وہ
تقسیم 3 سیکنڈ x اب اس انٹیگرل کو کرنا مشکل نہیں ہے جو ہم کر سکتے ہیں ہم اس انٹیگرینڈ کو لکھتے ہیں بطور سیکنٹ مربع x dx مربع cos
کے برابر بدل دیں tan x کو u اور اب یہ آپ پر واضح ہونا چاہئے کہ اگر ہم x d مائنس 2 x مربع
کے طور پر لکھ سکتے ہیں dx مائنس 2 x تقسیم 3 گنا 1 جمع ٹین مربع x بذریعہ 4 سیکنڈ مربع pi تو ہم اسے 0 سے
کے برابر ہے tan 0 برابر u صفر ہے x ہے اور انضمام کی حد جب xdx مربع du secant پھر tan x تو اب ڈالیں یو کے برابر
اوور کے 0 سے 1 تک 2 اوور du جو کہ 1 کے برابر ہے۔ pi by 4 کے برابر ہے pi by 4 u 10 برابر ہے x جو 0 ہے اور جب
تھا x پائی انٹیگرل کے برابر ہے یہ 3 ٹین مربع
تو 3 یو مربع جمع 1. اب یہ معیاری انٹیگرل میں ہے لہذا یہ لکھا جا سکتا ہے اگر میں ڈینومیٹر سے تین کامن لیتا ہوں
تو مجھے دو اوور ملتے ہیں۔ تھری پائی انٹیگرل زیرو ٹو ون ڈو اوور یو اسکوائر پلس ون بائی تھری جسے میں ون بائے روٹ تھری اسکوائر لکھوں گا
تو یہ 2 اوور 3 پائ کے برابر ہے اور 1 اوور یو اسکوائر جمع ایک مربع کا انٹیگرل 1 بائی ایک ہے
کے tw کو 1 سے تقسیم کیا گیا جڑ 3 سے۔ اور اس کو صفر اور ایک کے درمیان جانچنا ہوگا لہذا یہ u تو 1 بذریعہ 1 بذریعہ جڑ 3 بار ٹین الٹا
pi tan inverse root 3 minus tan inverse 0 tan inverse root 3 is equal بذریعہ جڑ تین o برابر ہے۔
to pi by three اور tan inverse صفر صفر ہے
تو ہم یہ حاصل کرتے ہیں
i مربع چار بائے ستائیس کے برابر ہو گا جس کا مطلب ہے ستائیس i کینسل یہاں دو بائی تین جڑ تین اس کا مطلب ہے pi برابر ہے i تو
مربع چار کے برابر ہے
کے مربع cos theta تھیٹا کے 3 گنا مربع جڑ کو cos تو یہ پہلے مسئلے کا جواب ہے لہذا سوال نمبر دو ہے انٹیگرل کی قدر معلوم کریں
تھیٹا کی طاقت تک بڑھاتے ہیں d کے مربع جڑ کو پورے پانچ sin theta جڑ سے تقسیم کیا اور
تھیٹا d کو تبدیل کرتے ہیں۔ phi مائنس pi by 2 تو اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ہم کیا کرتے ہیں سب سے پہلے ہم تھیٹا کے برابر
cos صفر کے برابر ہے بھی pi by 2 phi جب تھیٹا pi by 2 کے برابر ہے phi کے برابر ہے اور جب تھیٹا d phi 0 مائنس
کے cos phi تھیٹا sin کے برابر ہے۔ اور sin phi جو کہ theta is equal to cos of pi by two minus phi
سے دو سے صفر تک ہو pi کے تین مربع جڑ میں سے دو سے صفر سے اٹوٹ ہو جاتا ہے sine phi l برابر ہے لہذا انٹیگرل ول
کی بجائے phi i تک انٹیگرل لکھا جا سکتا ہے پھر سے pi by 2 ہو گا اور پھر اس انٹیگرل کے مائنس کو 0 سے d phi اور پھر مائنس
یہ انٹیگرل تھیٹا استعمال کر سکتا ہے

تھیٹا کے مربع جڑ کے ساتھ cos بذریعہ 2 بذریعہ سائن تھیٹا کے 3 مربع جڑ سے تقسیم pi تو اسے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ جیسا کہ 0 سے
تھیٹا تک بڑھایا گیا d تھیٹا کے مربع جڑ کو طاقت 5 sin ساتھ
تو اب اس کو جوڑتے ہوئے چلیں میں اصل مساوات کو مساوات ایک کہتا ہوں اور یہ ایک مساوات دو ہے
کے مربع جڑ کے علاوہ cos theta کے ضم کرنے کے 2 3 گنا pi برابر ہے 0 سے i تو 1 اور 2 کو جوڑنے سے ہمیں 2 گنا ملتا ہے
کے مربع جڑ سے بڑھے ہوئے 5 ڈی تھیٹا کو پاور sin theta کے مربع جڑ اور cos theta کے مربع جڑ سے تقسیم sin theta
کریں
sin theta کے مربع جڑ کے ساتھ ساتھ cos theta ہو جائے گا pi by 2 3 یہ 0 سے nd تو اب ہم اسے منسوخ کر سکتے ہیں۔
تھیٹا اب مسئلہ اس انٹیگرل کا جائزہ لینے میں کم ہو جاتا ہے اب یہاں دوبارہ اس کو انٹیگریٹ کرنے کے لیے ہم power 4 d کے مربع جڑ سے
تھیٹا کامن کا ایک مربع جڑ لیں اور یہ تین اوور ہو جائے گا cos کیا کر سکتے ہیں اگر میں ڈینومینیٹر سے
d اسکوائر تھیٹا ہو گا اور پھر ہمارے پاس ٹین تھیٹا کا ایک جمع مربع جڑ ہے جو کہ پاور 4 cos تھیٹا کا مربع جڑ پاور فور ہو جائے گا cos تو
تھیٹا تک بڑھ جائے گا۔
تو اب ہمیں ٹین تھیٹا ملا ہے اور اگر آپ دیکھتے ہیں کہ میں عدد 3 سیکنٹ مربع تھیٹا میں 1 جمع جڑ کے ٹین تھیٹا کو طاقت 4 ڈی تھیٹا میں لا سکتا
ہوں
کے برابر ہو گا اور جب تھیٹا صفر کے برابر ہو tdt تو اب ہم ٹین تھیٹا ٹی مربع کے برابر ہے پھر سیکنٹ مربع تھیٹا ڈی ڈال سکتے ہیں۔ تھیٹا دو
ہو گا tan pi دو pi by صفر کے برابر ہو گا اور جب تھیٹا t تو
تو انفینٹی ہو گی
تو یہ انٹیگرل برابر ہے
پلس ٹی کو پاور 4 پر بڑھایا گیا 1 y b تقسیم t dt برابر ہے 0 سے لامحدود 3 گنا 2 y تو یہ 2
dt پلس 1 کو پاور 4 t اوور infinity t برابر ہے 3 گنا انٹیگرل 0 سے i تو 2 کو منسوخ کیا جا سکتا ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ
تک بڑھایا گیا dt پلس لکھ کر آسانی سے کیا جا سکتا ہے۔ ایک مائنس ون بائے ٹی پلس ون کو پاور چار t تک بڑھایا گیا ہے اب اسے
تو یہ برابر ہے تین گنا انٹیگرل صفر ٹو انفینٹی آف ٹی پلس ون ریزر ٹو پاور مائنس تھری ڈی ٹی مائنس انٹیگرل زیرو ٹو انفینٹی ٹی پلس 1 ریز ٹو پاور
مائنس 4 ڈی ٹی جو برابر ہے 3 گنا تک یہ مائنس ون بائے ٹو ٹی جمع ایک مربع مائنس دے گا یہ جمع ایک بائی تین ٹی پلس ون مکعب بن جائے گا
انفینٹی ون بائے ٹی پلس ون مربع کی طرف جاتا ہے یہ صفر پر جاتا ہے اور یہ بھی جاتا ہے۔ صفر کے برابر t اب صفر سے انفینٹی تک کیونکہ
ہوگا
پر ہوگا یہ ایک بذریعہ دو مائنس ایک بذریعہ تین بن جائے گا یہ تین گنا ایک بذریعہ چھ t تو یہ تین گنا صفر کے برابر ہوگا مائنس یہ صفر کے برابر
ایک دو کے برابر ہے i ہے جو ایک بائے دو کے برابر ہے لہذا جواب ہے قدر کا
جمع جڑ 3 1 i مسئلہ نمبر تین کے لیے پھر ہم ایک قطعی انٹیگرل کا جائزہ لیں گے سوال یہ ہے کہ انٹیگرل کی قدر تلاش کریں o تو آئیے جی
کو بڑھایا گیا 6 مکمل اضافہ پاور 1 بائی 4 ڈی ایکس کے لیے آئیے اس x جمع 1 مربع ضرب 1 مائنس x کے 0 سے نصف کے برابر ہے تقسیم
مسئلے کو حل کرنے کی کوشش کریں
برابر ہے ہمارے پاس 1 جمع جڑ ہے 3 گنا 0 سے آدھے ڈی ایکس کے اوپر i تو پہلے ہم تھوڑی سی آسانیاں کریں گے اور یہ لکھیں گے کہ
کو x پلس 1 کو پاور پر بڑھا کر آدھا گنا 1 مائنس x جمع 1 مربع ہے اور پھر ہمارے پاس ہے پاور 1 بائی 4 تاکہ یہ ہو جائے گا x ہمارے پاس
تک لے جائے 4 x بڑھا کر 6
دونوں مثبت ہیں لہذا اب میں اسے 1 جمع جڑ کے x اور 1 مائنس x ہے۔ لہذا نوٹ کریں کہ میں یہ رینج 0 سے نصف 1 پلس 2 x تو یہ 3
گنا 1 x کے طور پر 1 مائنس 2 x کو پاور 3 x کے نصف تک 3 گنا انٹیگرل کے ذریعے میں اس 1 مائنس dx طور پر لکھوں گا 0 سے
کو پاور نصف کے طور پر لکھوں گا۔ x مائنس
تو ہمارے پاس 1 پلس ایکس ہے پاور ہاف میں اور 1 مائنس ایکس پاور ہاف میں
e تو یہ 1 مائنس ایکس مربع کا مربع جڑ بن جائے گا
مربع اور ایک مربع جڑ ملتا ہے اب یہاں ہمارے پاس ایک سادہ متبادل ہے کیونکہ ہمارے پاس x ضرب 1 مائنس x بذریعہ 1 مائنس dx تو ہمیں
کو آزمانا چاہئے x کے برابر متبادل sin theta مربع اصطلاح ہے ہمیں x یہ ایک مائنس
تھیٹا ہے 0 x تھیٹا ڈی تھیٹا اور جب cos برابر ہو جائے گا۔ dx تو
تھیٹا نصف ہے sin نصف کے برابر ہے x تو 0 کے برابر ہے اور جب
تھیٹا ڈی cos کے 6 سے dx کے انٹیگرل کے pi جڑ 3 کے برابر ہے جمع 1 گنا 0 سے i ہے لہذا یہ انٹیگرل pi by six تو تھیٹا
منسوخ ہو cos theta تھیٹا کے برابر ہے لہذا cos مربع کا مربع جڑ x تھیٹا سے تقسیم کیا گیا ہے اور 1 مائنس sin تھیٹا کو 1 مائنس
تھیٹا سے انٹیگرل حاصل کرتے ہیں اب یہ سیدھا آگے ہے کیا ہم کرتے ہیں کہ آپ 1 جمع گناہ تھیٹا سے sin تھیٹا کو 1 مائنس d جاتا ہے اور ہم
ضرب اور تقسیم کریں
تو یہ 1 جمع گناہ تھیٹا کو 1 مائنس سائن اسکوائر تھیٹا سے تقسیم کریں
مربع تھیٹا سیکنٹ مربع تھیٹا cos کے 6 کے برابر ہے 1 بذریعہ pi اسکوائر تھیٹا ڈی تھیٹا ہے یہ جڑ 3 جمع 1 بار انٹیگرل 0 سے cos تو یہ
اب آپ کو اس کا cos squar ہے e theta is secant theta times tan theta d theta اور سائن تھیٹا بذریعہ
چھ کے درمیان اندازہ کیا گیا یہ جڑ تین pi by انٹیگرل معلوم ہوگا لہذا یہ جڑ 3 جمع 1 گنا ٹین تھیٹا پلس سیکنٹ تھیٹا کے برابر ہے صفر سے
ہے بذریعہ 6 ہے 1 از جڑ 3 جمع سیکنٹ بذریعہ پائی 6 ہے 2 بذریعہ جڑ 3 مائنس ٹین 0 ہے اور سیکنٹ 0 ہے 1 یہ ہے pi جمع ایک ضرب 10
جڑ 3 جمع 1 بار یہ 3 ہے بذریعہ جڑ 3 مائنس 1
تو جڑ 3 جمع 1 بار جڑ 3 مائنس 1 جو کہ 3 مائنس 1 کے برابر ہے جو 2 ہے۔ اس لیے انٹیگرل کی قدر دو کے برابر ہے
تو آئیے اگلے مسئلے کے سوال نمبر 4 کی طرف چلتے ہیں
پر دو تین کے برابر pi کے برابر ہے f صفر پر صفر f تک ایک قابل تفریق فعل ہونے دو۔ کہ صفر کا r سے r کو f تو مسائل یہ ہیں کہ
پرائم 0 f دی گئی ہیں اور pi by 2 پرائم 0 پر 1 کے برابر ہے۔ لہذا ہمیں ایک قابل تفریق فنکشن دیا گیا ہے جس کی قدریں 0 اور f ہے اور
تک ضم کرنے کے برابر ہے pi سے g x کا x دی گئی ہے۔ اب اگر by 2 f prime t cos at minus cot t cos atftd
پر 2 کے قریب pi میں صفر پر کھلا اور pi by two صفر سے x کے لیے t
اس انٹیگرل کے لحاظ سے دیا گیا ہے g کا یہ x کی حد تلاش کرنی ہوگی۔ لہذا g کی x کے 0 کے قریب آتے ہی x تو ہمیں
کا فارمولا تلاش کریں اور پھر ہم اس حد کو تلاش کرنے کی g کے x تو پہلے ہمیں کوشش کرنی چاہئے۔ اس انٹیگرل کا اندازہ لگانے کے لیے
کوشش کریں گے لہذا نوٹ کریں کہ یہاں اگر آپ انٹیگرینڈ دیکھتے ہیں
cos xt کے اوقات t کے مشتق کے سوا کچھ نہیں ہے۔ f ہے یہ f prime t cos at minus cos at cot tft تو یہ

کیونکہ اگر ہم مشتق کے لیے پروڈکٹ کا اصول استعمال کرتے ہیں
سے g x کا یہ x ہے اس لیے cos xt گنا cot t کا مشتق مائنس cos xt اور cos xt کا مشتق دیتا ہے ff prime تو یہ
integral کے برابر ہے۔ pi by two of d by dt of ft cos atdt
تو ایک بار جب ہم انٹیگرینڈ کے مخالف مشتق کو جان لیں
کے برابر f کے درمیان اندازہ کیا گیا تاکہ pi by two اور x کے برابر ہے ft cos xt تو کیلکولس کے بنیادی تھیوریم کے ذریعہ یہ
کا دو برابر ہے pi کا f دو کے ذریعے ہمیں دیا گیا تھا f کا pi اب x cos xx کا f سے دو مائنس cos x pi دو گنا pi ہو
تین کے
ایک ہے cos x pi by two تو یہ تین کے برابر ہے
ہے cos x 1 by sine x ہے لہذا نوٹ کریں کہ fx cos xx تو یہ تین مائنس
تلاش نہیں g صفر کی وضاحت نہیں کی گئی ہے لہذا ہم صفر کی cos x کی وضاحت 0 کے برابر ہے لہذا نوٹ کریں کہ x تو یہ نہیں ہے
کے قریب پہنچتی ہے 0 x کی حد جب g کی x کی حد تلاش کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں لیکن x کرسکتے ہیں لیکن ہم
لکھ سکتا ہے sine x بذریعہ fx times cos xxi fx کے 0 کے قریب پہنچتی ہے۔ x تو 3 مائنس کی حد
کی حد 0 کے قریب آتے ہی 1 ہے لہذا میں اسے تین مائنس کی sine x x x فارم اب ہم جانتے ہیں کہ by 0 تو اب ہمارے پاس یہ ہے 0
سے تقسیم کیا گیا اب ہم جانتے ہیں کہ حد ایک ہے x بذریعہ سائن x کے طور پر لکھ سکتا ہوں ایف ایکس کے صفر کو x حد
صفر تک x x x کی حد x کی یہ اس لئے ہے کیونکہ سائن x کے صفر کے قریب ایف ایکس x تو یہ تین مائنس کی حد کے برابر ہے
کے مشتق کا استعمال کرنا ہے 0 پر ہمیں دیا گیا ہے جو کہ 1 ہے۔ f پہنچتے ہی برابر ہے ایک کے لیے اب کسی نہ کسی طرح ہمیں
کو 0 کے برابر ہونے کے 0 f مائنس 0 تک یہ ہے کیونکہ x کے 0 سے 0 f مائنس fx کے برابر ہے۔ x tends تو یہ 3 مائنس کی حد
ہے۔ پرائم f پرائم صفر اور f کے مشتق کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا یہ تین منفی f لئے دیا گیا ہے۔ لہذا اب ہم جانتے ہیں کہ یہ حد صفر پر
صفر ایک کے برابر ہونے کے لیے دیا گیا ہے
تو یہ 3 مائنس 1 ہے جو کہ 2 کے برابر ہے۔
کے دو کے برابر ہے لہذا میں یہاں ایک تبصرہ کرنا چاہوں گا لہذا نوٹ کریں کہ g کے x کی حد 0 کی طرف جاتی ہے x تو اس کا جواب ہے
کی یہ حد ہے جو صفر بہ صفر کی شکل میں ہے لہذا آپ یہاں براہ راست لوپیٹل رول لاگو کرنے کے بارے fx کی sin x یہاں ہمارے پاس
میں سوچ سکتے ہیں لہذا اگر ہم لاہسٹر رول لاگو کرتے ہیں
کے قریب پہنچتی ہے 0 x کی حد جب cos x کے برابر ہوگا اور پھر cos x کی حد f prime x تو یہ
لکھنے کے بارے میں سوچ سکتے 0 f prime کی حد ہو اور پھر آپ اسے f prime x کے قریب پہنچنے پر 0 x تو 1 ہوتی ہے تاکہ
کے قریب پہنچتی 0 x کی حد جب x پرائم f براہ راست ملے گا لیکن نوٹ کریں کہ لکھنا ہے۔ f prime 0 ہیں لہذا آپ کو یہ 3 مائنس
صرف یہ دیا blem پرائم 0 پر لگاتار ہے لیکن اگر آپ پرو دیکھیں f پرائم کے برابر ہے ہمیں یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ f ہے 0 کے
ایک قابل تفریق فعل ہے لیکن مشتق کا مسلسل ہونا ضروری نہیں ہے لہٰذا یہ درست استدلال نہیں ہے اس لیے ہم نے اس حد کو 0 پر f جاتا ہے کہ
مشتق کے طور پر لکھا ہے اور پھر اس کی تشخیص کی ہے
ختم ہو جاتا ہے۔ آئیے مسئلہ نمبر پانچ کی طرف چلتے ہیں جو کہ ہم نے اب تک کیا کیا ہے اس سے قدرے مختلف ah تو اس سے مسئلہ نمبر چار
جمع 1 میں k سے k x x plus 1 dx جمع 1 k کا خلاصہ برابر ہے 1 سے 98 کے انٹیگرل کے k ہے یہاں ہمیں دیا گیا ہے اگر میں
is i log 99 کے قدرتی لاگ سے بڑا ہے a is i 99 b پھر ہمیں مندرجہ ذیل 4 آپشنز میں سے صحیح آپشنز کا انتخاب کرنا ہوگا لہذا
بڑا ہے 49 بائی 50 کے مقابلے میں۔ d is i سے کم ہے اور i 49 by 50 سے کم ہے c
تو یقیناً یہاں اگر آپ کو ک پلس ون بائی ایکس بار ایکس پلس ون ڈی ایکس کا یہ انٹیگرل نظر آتا ہے
تو اس کا اندازہ آسانی سے کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ کہتے ہیں کہ ایک بائے ایکس بار ایکس پلس ون کو ون بائی ایکس مائنس ون لکھا جا سکتا ہے۔
کے لیے ایک اظہار حاصل کر سکتے ہیں لیکن i اور درحقیقت آپ tegral ایکس پلس ون کے ذریعے اور پھر آپ اس کا اندازہ کر سکتے ہیں۔
اس کا استعمال کرتے ہوئے ان عدم مساوات کو حاصل کرنا مشکل ہو سکتا ہے
تو اس قسم کے مسائل میں ہمیں آپشنز کو دیکھنے کی کوشش کرنی چاہیے اور پھر یہ دیکھنے کی کوشش کرنی چاہیے کہ اسے کیسے کرنا ہے
کا موازنہ 99 کے قدرتی لاگ سے کیا جاتا ہے i پھر b تو اگر آپ کو ایک آپشن نظر آتا ہے۔ اور
کے انٹیگرل کے سوا کچھ نہیں ہے کیونکہ 1 x dx تو اب نوٹ کریں کہ لاگ 99 کیا ہے نوٹ کریں کہ 99 کا لاگ 1 سے 99 تک 1 بذریعہ
کے مجموعے کے طور پر لکھا جا سکتا ہے 1 سے 98 کے k کا اینٹی ڈیریویٹو لاگ ایکس ہے لہذا ہم یہ حاصل کرتے ہیں اور اسے x بذریعہ
کے برابر k کے برابر 1 کے لیے آپ کو 1 سے دو سے ضم ہو جائے گا اور k کیونکہ plus 1 1 by x dx کے k سے k انٹیگرل
دو کے لیے یہ انٹیگرل ہے۔ دو سے تین اور اسی طرح نوے آٹھ سے ننانوے تک انٹیگرل تک
تو یہ رقم ایک سے ننانوے تک انٹیگرل کے برابر ہوگی
تو اب اگر آپ دیکھیں
کے 1 کے برابر کے حساب سے۔ کچھ انٹیگرل کے 98 اس لیے ہمیں صرف دیے گئے انٹیگرل کا اس میں سے k تو ہم نے یہ لاگ 99 لکھا ہے
موازنہ کرنا ہے۔ ٹیگرل یہ دیکھنے کے لیے کہ کون بڑا ہے
پلس ون سے چھوٹا ہے k سے بڑا ہے اور k x تو اب نوٹ کریں کہ اگر میرا
جمع 1 ہے x ضرب x جمع 1 کا انٹیگرل k تو یہاں ہمارے پاس
x x جمع 1 k جمع 1 یہ 1 سے کم ہوگا لہذا x جمع 1 بذریعہ k سے چھوٹا ہے جمع 1 جس کا مطلب ہے x جمع 1 k تو ہمارے پاس
xdx یہ ایک سے کم ہے dx جمع ایک x کے x x کے جمع ایک کا مجموعہ k سے k سے کم ہے اس لئے 1 x ضرب
پلس ون تک k سے k سے
کے برابر i جمع ایک کے برابر ہے یہ لاگ 99 سے کم ہے یہ k سے k کا مجموعہ ایک سے ستانوے انٹیگرل k تو اس سے پتہ چلتا ہے کہ
کے 50 by کا 49 i کا موازنہ d اور c لاگ 99 سے کم ہے سچ ہے یہ ایک غلط ہے اب i سچ ہے لہذا یہ b غلط ہے اور a تھا۔ لہذا
ساتھ
تو حقیقت میں اگر آپ دیکھتے ہیں کہ ہم نے اس حصے کو حاصل کرنے کے لئے کیا کیا ہے انٹیگرل لاگ 99 سے کم ہے ہم لوئر باؤنڈ بھی حاصل
ایک سے بڑا ہے x پلس ہے ایک بذریعہ k کسی چیز سے زیادہ اسی طرح استعمال کر کے ہم کیا حاصل کر سکتے ہیں یہ i کر سکتے ہیں لہذا
جمع ایک کے درمیان ہے k اور x k اگر
جمع ایک سے بڑا ہے x جمع ایک یہ x ضرب x x جمع ایک k ایک سے بڑا ہے اس لئے x x جمع ایک k تو یہاں ہم استعمال کر رہے ہیں
کے انٹیگرل سے ضم کرتا ہوں dx جمع ایک x بار x جمع ایک کو k پلس ون k سے k اور اب اگر میں اسے
انٹیگرل کے 1 سے k جو کہ کا خلاصہ ہے یہ i کے انٹیگرل سے بڑا ہوگا اور اس لئے dx جمع 1 x پلس ایک کے 1 از k ٹو k تو یہ

dx جمع ایک x دو ک جمع ایک یہ ایک سے ایک سے ننانوے تک انٹیگرل سے بڑا ہے ایک از k کے برابر ہے 98
سے کم ہے نو یہاں ہم اس کے ایک سے بڑا حاصل کر رہے ہیں ایک xdx ایک سے نوے کے i تو بالکل اسی طرح جیسے ہم نے حاصل کیا کہ
جمع ایک سے ایک سے ننانوے کے برابر ہے جو سو مائنس لاگ ٹو کے لاگ کے x جمع ایک ایک سے ننانوے تک اور یہ لاگ x سے ایک سے بڑا
برابر ہے جو لاگ کے برابر ہے پچاس
تو اب اگر آپ دیکھتے ہیں کہ ہمیں انتالیس بائی پچاس کے ساتھ موازنہ کرنا ہے اب واضح طور پر لاگ ان پچاس بڑا ہے ایک جو انتالیس ضرب
پچاس سے بڑا ہے
درست ہے اور ج غلط ہے d تو میں 49 ضرب 50 سے بڑا ہے یہ درست ہے لہذا
درست ہے اور یہ سی آن ہے حقیقت میں اگر آپ دیکھیں کہ ہم نے ثابت کیا ہے کہ میں پچاس کے قدرتی لاگ سے بڑا ہوں جو 49 بائی d تو ہمیں
دیے گئے اس نمبر سے بہت بڑا ہے۔ 50
تو آپ سوچ رہے ہوں گے کہ یہ نمبر انتالیس ضرب پچاس کیسے حاصل کیا جائے
تو اگر آپ دیکھیں کہ ہمارے پاس ایک سے ننانوے تک کا خلاصہ ہے
تو یہ چالیس نائن بائی ففٹی کچھ بھی نہیں ہے بلکہ سو کے سوا آٹھ سو کے برابر ہے
تو میں یہاں یہ تبصرہ لکھتا ہوں کہ یہ اڑتالیس بائی پچاس برابر آٹھ سو بائی سو کے برابر ہے
تو اگر ہم یہ کر سکتے ہیں کہ یہ ہر ایک انٹیگرل ایک بائے سو سے بڑا ہے
تو اس کا خلاصہ سو سے آٹھ سو سے بڑا ہو
تو آئیے انٹیگرل کو دیکھیں اگر ہم نے دیکھا کہ انٹیگرل ک سے ک پلس ون یہ ہر ایک کے لیے سو سے ایک سے بڑا ہے
تو میں اٹھاون بائی سو سے بڑا ہو گا جو کہ انتالیس بائی پچاس ہے۔ دکھا رہا ہے کہ یہ لازمی ہے ایک سے سو کا بڑا ہونا مشکل نہیں ہے
ڈالیں y جمع k کے برابر x تو میں کیا کروں گا کہ ہم
کے برابر رکھوں y جمع k کو x تو کیا ہوگا اگر میں
ایک y جمع ایک k برابر ہے x کے برابر صفر کے برابر ہوگا اور جب ky برابر ہو x جمع ایک کے درمیان ہو جب k اور k x تو جب
کے برابر ہے
x کے y جمع k برابر ہے x جمع ایک k تو ہم اس انٹیگرل کو انٹیگرل کے طور پر لکھ سکتے ہیں یہ صفر سے اب ایک کے برابر ہے اور
اور 1 کے درمیان مختلف ہے 0 y ہے کیونکہ ydy جمع ایک جمع k جمع ایک اب
کے بعد سے ہے k سے یہ ydy جمع ایک جمع k سے بڑا ہے لہذا یہ 0 سے 1 1 تک ضم ہونے سے بڑا ہے y جمع k جمع 1 k تو
ہے یہ ایک بائے کے y جمع ایک جمع k یہ ایک سے بڑا ہے اور اب اگر آپ دیکھتے ہیں کہ یہ انٹیگرینڈ ون بذریعہ y جمع k جمع ایک بذریعہ
جمع دو سے بڑا ہے اور انٹیگرل صفر سے ایک ڈائی تک ہے جو ایک دیتا ہے
ایک سے ستانوے تک مختلف ہوتا ہے لہذا یہ ہمیشہ ایک بائے کے برابر سے بڑا ہوتا ہے۔ k جمع دو اب k تو یہ انٹیگرل ہے ایک سے بڑا بذریعہ
ایک اور ننانوے کے درمیان ہے k سو اگر
جمع k تو ہم نے ثابت کیا ہے کہ یہ انٹیگرل ایک سے سو سے بڑا ہے درحقیقت ہم اس کو استعمال کرکے ایک بہتر حد حاصل کر سکتے ہیں اس کو
سے ایک کے برابر کر دیں 98 تک k دو سے بڑا کرکے اور پھر اسے
درست ہے اس طرح سے بھی ٹھیک ہے ہم ایک اور مسئلہ کرتے ہیں d تو ہم یہ حاصل کر سکتے ہیں کہ یہ
تو سوال نمبر چھ
ہے دو کے برابر x کے سب سے بڑے عدد کے برابر بیان کیا جائے اگر x سے fx کو let fr to r تو ہمیں ایک فنکشن دیا جاتا ہے
dx جمع ایک fx مربع سے دو جمع x کو f گنا x برابر ہے مائنس ون سے دو i دو سے بڑا ہے اب اگر x سے کم اور صفر سے کم اگر
سے تقسیم کیا جائے
سے چھوٹا یا اس کے x کی قدر تلاش کرنی ہوگی۔ اس مسئلے کو کریں پہلے ہم یاد کرتے ہیں کہ سب سے بڑا انٹیجر فنکشن یہ i so تو ہمیں
جمع ایک سے سختی سے کم n کے لئے n کے برابر ہے اور کسی بھی عدد x n کے برابر ہے اگر n برابر سب سے بڑا عدد ہے لہذا یہ
ہے
سے بڑے کے لئے 0 x 2 برابر 2 سے کم ہے اور x انٹیجر اگر t کا x کو عظیم سمجھا جاتا ہے۔ f کی x تو ہم اگر آپ دیکھتے ہیں کہ
اس کا انٹیگرل ہے i اب
مربع x مربع کا سب سے بڑا عدد x f جمع ایک اب fx سے تقسیم دو جمع f ضرب x مربع کے x برابر ہے g کا x تو آئیے لکھیں
مربع دو سے بڑا ہے x مربع دو سے کم ہے اور صفر اگر x ہے اگر
تو یہ کیا برابر ہے
مربع کا x مربع کے سب سے بڑے عدد سے دیا گیا ہے اب x مائنس جڑ 2 سے جڑ 2 کے درمیان یہ x مربع 2 کے برابر ہے یعنی x تو
مربع سختی سے ایک سے کم ہوگا x مائنس ایک سے ایک کے درمیان ہے کیونکہ اس صورت میں x سب سے بڑا عدد یہ 0 کے برابر ہوگا اگر
مربع ایک کے برابر سے تھوڑا x ایک سے بڑا ہے اور جڑ دو سے سختی سے چھوٹا ہے پھر x اس لئے سب سے بڑا عدد صفر ہوگا اور اگر
بڑا اور دو سے سخت ہے
جڑ دو سے بڑا ہے x مربع کا سب سے بڑا عدد ایک ہوگا اور اگر یقیناً x تو
مربع دو سے بڑا ہے x تو
x تو یہ صفر کے برابر ہے اس لیے ہمارے پاس ہے۔ مائنس ون سے ٹو کو انضمام کرنے کے لیے اس لیے میں نے صرف مائنس ون سے بڑا
جمع ایک x جمع ایک کے سب سے بڑے عدد کے برابر ہے اگر x کے لیے شروع کیا ہے اگر آپ دیکھیں گے کہ یہ f جمع ایک کے x اور
جمع ایک دو سے بڑا ہے x برابر دو سے کم ہے اور صفر اگر
سے بڑا ہے 1 x کے برابر ہے اور اگر 1 x مائنس 1 کے درمیان ہے x جمع ایک کے سب سے بڑے عدد کے برابر ہے اگر میرا x تو یہ
صفر سے کم اور مائنس ون کے برابر سے بڑا ہے اور اگر x جمع 1 کا عدد 0 کے برابر ہوگا اگر x تو یہ 0 ہے۔ اب دوبارہ یہ سب سے بڑا
کے برابر اور 1 سے کم ہے x 0
جمع 1 برابر 1 سے بڑا اور اس سے کم x 2 تو
ایک سے بڑا ہے x تو سب سے بڑا عدد 1 ہوگا اور یہ 0 کے برابر ہے اگر
دیکھیں صرف ایک اور ef مربع کا x جمع ایک ہے لہذا اگر آپ f x کے دو جمع x مربع fx گنا x لکھ سکتے ہیں یہ g کا x تو اب ہم
برابر 1 سے بڑا اور جڑ 2 سے کم ہے x جڑ دو کے درمیان غیر صفر ہے لہذا اگر
سے بڑا ہے یہ 0 کے برابر ہوگا اور یہ 1 x سے تقسیم کیا گیا ہے کیونکہ f جمع ایک کے دو جمع x. مربع ہے fx 1 بار ہے x تو یہ
جڑ 2 سے بڑا ہے۔ x ہے اگر 0

کے مائنس ون سے ٹو کے g کے i xdx کے برابر ہے اور صفر ورنہ اب x کے دو سے اگر ایک جڑ دو سے کم x برابر g کا x تو
پلس کے انٹیگرل کے طور پر لکھتے ہیں۔ انٹیگرل gxdx پلس ایک کے جڑ کے دو gxdx انٹیگرل کے برابر ہے اسے ہم مائنس ون سے ایک سے
پہلے وقفہ میں 0 ہے اور آخری وقفہ g کا x اب یہاں x dx جڑ 2 سے 2 جی
مربع سے چار کے حساب سے نکلتا ہے۔ اور روٹ دو اور یہ x کے 1 سے جڑ 2 کے برابر ہے جو ایک کے درمیان x x x 2 dx تو یہ
جواب دیتا ہے ایک سے چار گنا دو مائنس ایک جو چار سے ایک ہے
برابر ہے ایک بائے چار کا جواب بالکل ٹھیک ہے لہذا یہ انٹیگرل کیلکولس پر ایک لیکچر ختم کرتا ہے اگلے لیکچر میں ہم کچھ اور بات کریں i تو
گے۔ انضمام کے مسائل آپ کا شکریہ