خوش آمدید طالب علموں کو اب تک ہم نے غیر معینہ انٹیگرلز کا اندازہ کرنے کے لیے مختلف ٹولز دیکھے ہیں ابتدا میں ہی ہم نے اینٹی ڈیریویٹیو کے ساتھ شروع کیا تھا جو فنکشنز کی تفریق کے آئیڈیاز کو استعمال کرتے ہوئے تیار کیے گئے تھے پھر ہم نے متبادل کے طریقہ کار کو استعمال کرتے ہوئے انٹیگرل کے آئیڈیا کو دیکھا پھر کچھ عقلی طور پر فنکشنز کو ہم نے جزوی فریکشن کے طریقہ کار کو دیکھا اور پھر ہم نے حصوں کے ذریعے انضمام کے طریقہ کار کو دیکھا جہاں ان ٹولز کے ساتھ انٹیگرینڈ کو دو فنکشنز کی پیداوار کے طور پر لکھا گیا تھا ہم نے کئی مثالوں کا جائزہ لیا ہے ہم نے دیکھا ہے کہ اس لیکچر میں ان کا اندازہ کیسے لگایا جائے وہ تمام ٹولز جو کچھ انٹیگرلز کا جائزہ لیں گے اور ہم یہ مثالیں کر رہے ہوں گے جس میں ان تمام تصورات کو شامل کیا جائے گا جب ہم مثال کو حل کر رہے تھے زیادہ تر ہم جانتے تھے کہ یہ مثال اس مخصوص آئیڈیا پر منحصر ہے لیکن اب ہم مثالوں کا انتخاب کریں گے اور تلاش کریں گے۔ مثال کے طور پر ہم فیصلہ کریں گے کہ ہمیں یہاں کون سا طریقہ استعمال کرنا طریقہ ایک مختلف طریقہ ہے اور میں اسے ایک er چاہیے میں آپ کو بتاتا ہوں کہ کسی خاص مثال کو کسی اور کے ذریعے حل کیا جا سکتا ہے۔ مختلف طریقہ سے حل کر رہا ہوں لہذا یہ انتخاب آپ کا ہے آہ کسی خاص مثال پر منحصر ہے کہ آپ انتخاب کر سکتے ہیں کہ آپ کون سا طریقہ منتخب کرنا چاہتے ہیں بعض اوقات یہ ممکن ہے کہ اس مثال کو متعدد طریقوں سے حل کیا جائے۔ مثال کے طور پر آپ ایک طریقہ منتخب کرتے ہیں جسے آپ استعمال کرتے ہیں اور اسے حل کرتے ہیں تاکہ آپ مسائل کے ساتھ مشق کریں اور پھر ایک بار جب آپ مشق کریں گے تو آپ کو اندازہ ہوگا کہ مثال کو دیکھ کر یا اسے دو لائنوں تک حل کرنے کے بعد آپ کو اندازہ ہوگا کہ آپ کون سا طریقہ ہے لاگو ہونا چاہئے تو آئیے متفرق مثالوں کا اندازہ کرنے کے لیے ایک بہت ہی e raise to power x plus e raise to power minus x d کو دیکھیں تاکہ ہم انٹیگرل آسان مثال کے ساتھ شروع کریں گے

بڑھا ہوا پاور مائنس ایکس کے لیے ہمیں ان آئیڈیاز کو دیکھنا چاہیے جن سے e اور x کا یہ مجموعہ ہے e اس لیے چونکہ ڈینومینیٹر کے پاس ہم نے سیکھا ہے کہ ہمیں کیا کرنا چاہیے یہ کیسے معلوم کیا جائے کہ یہ کسی فنکشن کے مشتق میں نہیں ہے جو براہ راست پایا جا سکتا ہے لیکن e raise to power x کے کو ون اوور e بڑھا کر پاور مائنس x اگر ہم فنکشن کی شکل کو تھوڑا سا تبدیل کریں اور وہ ہم جانتے ہیں کہ طور پر لکھا جا سکتا ہے اور

e raise to power x over e rise to power 2 x plus 1 dx کی شکل لے گا اب یہ شکل زیادہ نظر اس لیے یہ انٹیگرل آتی ہے۔ پہلے کے مقابلے میں آرام دہ ہے لہذا اگر ہم کسی فارم کو قریب سے دیکھتے ہیں اور ایسی شکل میں تبدیل ہوتے ہیں جو زیادہ آرام دہ نظر آتی ہے تو ہم اسے آسانی سے سنبھال سکتے ہیں کہ یہ زیادہ آرام دہ کیوں ہے کیونکہ یہاں ایسا لگتا ہے کہ میں متبادل کا طریقہ استعمال کر سکتا exponential میں تفریق خود exponential ہوں اس اصطلاح کا ایک عنصر ہے اور کے طور پر ہوتی ہے اور اس لیے عدد کے پاس یہ ہوتا ہے کہ ایک عنصر کے طور پر

e کو e کے طور پر بڑھاتا ہوں تو مجھے جو ملے گا وہ یہ ہے کہ t کو x کو پاور اس لیے متبادل کا آئیڈیا کام کرے گا اور اگر میں متبادل پر بڑھایا x کو پاور ٹو e مربع پلس 1 کی سادہ شکل میں بدل جاتی ہے کیونکہ dt over t تو یہ مثال dt بطور xdx بڑھایا گیا ہے۔ پاور مشتق کا استعمال کرتے ہوئے یہ nd مربع اور یہ فارمولہ ہم جانتے ہیں کہ e raise to power x گیا ہے اس کے علاوہ کچھ نہیں ہے tan میں بڑھایا جائے گا ہمیں x کو پاور t میں تبدیل کرنے سے e کو واپس nverse t ہے کہ اس کے علاوہ کچھ نہیں۔ ٹین میں میں تبدیل کرکے ah میں بڑھایا جائے گا اور انضمام کا مستقل اس لئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے اسے ایک مسئلہ x کو پاور inverse e کتنی آسانی سے حل کیا ہے جہاں ایک متبادل کام کرتا ہے اور پھر اس میں تبدیل ہوتا ہے۔ معلوم شکل کا ایک لازمی جزو ہے لہذا ہم کچھ اور مثالوں پر cos two x کو دیکھیں گے جہاں یہ تبدیلی ممکن ہوسکتی ہے یا افعال کی کچھ اور آسانیاں ممکن ہوسکتی ہیں لہذا اس مثال کو دیکھیں کہ cos x plus sin x کا انٹیگرل معلوم کریں۔ اسکوائرڈ ڈی ایکس اگر میں اس انٹیگرینڈ کو دیکھتا ہوں تو فوری طور پر متبادل آہ کام نہیں کرے sin مائنس x مربع cos کے عدد کے لیے جانتا ہوں اسے cos to xi گا لیکن اگر میں مثلثی شناخت استعمال کرتا ہوں جسے میں انٹیگرینڈ x مربع cos x plus sin xv میں تقسیم x مائنس سائن اسکوائر x اسکوائر cos لکھ سکتا ہوں تو میں اس کا اندازہ لگا سکتا ہوں۔ اسکوائر میں ایک فیکٹر sin x جمع cos x کے طور پر لکھا جائے گا اب اگر میں انٹیگرینڈ کو دیکھوں تو میں دیکھ سکتا ہوں کہ dx اسکوائرڈ sin x جمع cos x میں sin x مائنس cos x ہے اور یہاں میں اسے فیکٹرائز کر سکتا ہوں کہ یہ منسوخ ہو جائے گا تو بالآخر میں اسے اسکوائر کے طور پر لکھ سکتا ہوں تو یہ مربع ہے جو اس اصطلاح کے ساتھ منسوخ ہو جاتا ہے لہذا میرے پاس sin x جمع cos x میں x اس انٹیگرل کا باآسانی اندازہ لگایا جاسکتا ہے اگر میں غور سے دیکھوں کہ cos x plus sin x اوور رہ گیا sin x مائنس cos x اور cos x کا مشتق ہے cosine x sine x ہے اور sine x ڈینومینیٹر کیا ہے اور ہندسہ کیا ہے تو ڈینومینیٹر کا فنکشن cos ہے یہ ہندسوں کا حصہ لگتا ہے میرا مطلب ہے کہ ہندسہ درحقیقت کچھ بھی نہیں ہے مگر ڈنومینیٹر کی تفریق sin x بطور مشتق مائنس x مائنس سائن cos x کے طور پر ڈینومینیٹر ہے تاکہ t کا انتخاب کر سکتا ہوں جو کہ ایک نئے متغیر cos x اس لیے میں سائن ایکس پلس x کے لوگارتھمک کے mod t plus constant ملے گا جو کہ dt over t تو متبادل بنانے سے مجھے dt کے برابر ہو d x پورے کے سوا plus constant اور sine x plus cos x ویلیو t ویلیو کو واپس بدل سکتا ہوں t سوا کچھ نہیں ہے اور یہ میں اپنی اور ان کو آسان بنانا اور آخر al identities بنا کر eu trigonometric کچھ نہیں ہے لہذا ہم نے یہ نتیجہ حاصل کیا۔ یہ انضمام کار ہم دیکھتے ہیں کہ ہم یہ فنکشنز جو ہم آسان بنانے کے بعد حاصل کرتے ہیں وہ انٹیگریبل ہیں اور انٹیگرل ایک اور مثال مل سکتی ہے جو میں نے آپ کے لیے یہاں آپ کو یہ بتانے کے لیے منتخب کی ہے کہ وہ ایک بہت ہی پیچیدہ کے لیے کس طرح کارآمد ثابت ہو سکتے ہیں۔ اس کو ایک مثال x مربع x cos کے طور پر لیں فرض کریں کہ ہم نے آٹھ ایکس مائنس کوزائن کو پاور پر اٹھا کر آٹھ ایکس سے زیادہ 1 مائنس 2 سائن اسکوائر پر اٹھائے گئے سائن کو انٹیگریٹ کرنا ہے تو یہ ہمارا انٹیگرینڈ ہے لہذا یہاں آپ دیکھیں گے کہ سائن کو بڑھا ہوا ہے پاور 8 ایکس مائنس dx کوزائن کو پاور 8 ایکس پر بڑھایا گیا 1 مائنس 2 سائن اسکوائر ایکس کوس اسکوائر ایکس سے تقسیم کیا گیا تو یہ ایک بہت ہی پیچیدہ نظر آنے والا فنکشن ہے لیکن اگر ہم آہ کچھ ایسا رشتہ استعمال کریں جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تو ہم اندازہ لگا سکتے ہیں کہ اسے تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ ایک پر اٹھائے گئے سائن کو دیکھ x مائنس کوزائن کو پاور 8 x آسان فنکشن میں میں آپ کو دکھاؤں گا کہ سب سے پہلے جب آپ سائن کو پاور 8 b رہے ہیں تو پہلا خیال جو آپ کے ذہن میں آنا چاہئے وہ یہ ہے کہ ہم کیا کر سکتے ہیں ؟ اسے ایک شکل میں تبدیل کریں جو ایک مربع مائنس میں کس طرح فیکٹرائز کیا جاتا ہے لہذا b کو مائنس b مربع کے برابر ایک جمع b مربع ہے کیونکہ اس شکل کو ہم جانتے ہیں کہ مربع مائنس ایکس مربع جیسے سائن 4 cos 4 آٹھ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔ سائن فور ایکس مربع مائنس ah sine to power آئیے دیکھتے ہیں کہ مربع ایک b مربع مائنس a لکھا جا سکتا ہے یہاں میں نے فارمولہ استعمال کیا ہے x فور cos جمع x میں سائن فور x cos 4 مائنس x اسکوائر اسکوائر تاکہ cos اسکوائر اسکوائر مائنس sin میں اسے مزید یہاں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے b کے برابر ہے پلس b مائنس raise to میں سائن x اسکوائر cos پلس x میں سائن اسکوائر x اسکوائر cos مائنس x اسے مزید لکھا جاسکے سائن اسکوائر ایک ہے تو آپ نے x اسکوائر cos جمع x اسکوائر sin آپ کو معلوم ہے کہ power 4 x جمع cos raise to power 4 x کو ایک کے طور پر ڈالا اور پھر x مربع cos جمع x اسکوائر sin کو یاد کیا تو آپ نے x اسے بطور آہ ڈالا معاف کیجیے میں نے یہاں کے طور پر لکھے گا تاکہ x مربع cos اسے 1 مائنس xi اسکوائر کی بجائے sin کے لحاظ سے سب کچھ لکھیں تو یہاں cos آپ پورے مربع کے طور x مربع cos پاور 4 جسے میں بھی 1 مائنس o سے ضرب ملے t کو سائن ریزڈ x مربع cos مجھے 1 مائنس 2 مربع پورے مربع پلس cos پر لکھوں گا کیونکہ سائن سے پاور 4 کو سائن اسکوائر مربع کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور سائن اسکوائر 1 مائنس

cos to power 4 x یہاں اسے 1 جمع x مربع cos اسے مزید لکھا جا سکتا ہے۔ بطور 1 مائنس 2 cos raise to power 4 x
1 x مربع cos کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور جو بالآخر 1 مائنس 2 cos raise to power 4 x جمع x مربع cos مائنس 2
تو یہ ہے ہمارا بندسہ اب ہم ڈینومینیٹر کو دیکھتے ہیں اور یہاں بھی وہی تکنیک x مربع cos مائنس 2 x پاور cos raise to 4 جمع 2
کا یہاں بھی میں cos اس طرح ہر ایک کو جو میں نے انگ میں لکھا ہے x اسکوائر x cos کرتے ہیں تاکہ ڈینومینیٹر 1 مائنس 2 سائن اسکوائر
میں لکھوں گا جو مجھے 1 x مربع cos کو x مربع cos کے لحاظ سے لکھنا چاہتا ہوں تو میں اسے 1 مائنس 2 گنا 1 مائنس cos اسے
اب ان دو عوامل cos raise to power four x مربع cos دے گا۔ مربع cos مائنس مائنس پلس 2 گنا x مربع cos مائنس 2 گنا
x مربع cos مائنس دو x چار cos raise to power ایک جمع دو x مربع cos کو دیکھیں یہ آپ کا عدد ہے تو عدد ایک مائنس دو
cos اور ڈینومینیٹر میں وہ فیکٹر ہے جو عدد 1 مائنس 2 میں ہے اوہ افسوس میں نے ایک جمع کھو دیا ہاں مائنس اور مائنس پلس سو 1 مائنس 2
کی طاقت کو بڑھاتا ہے تو یہ اصطلاح x plus 2 cos 4 x مربع cos کی طاقت کو بڑھاتا ہے تو 1 مائنس 2 x 4 cos جمع x مربع
جو اس اصطلاح میں بندسہ ہے x لکھا جاتا ہے۔ مربع cos کو 1 مائنس 2 i منسوخ ہو جائے گی جب ہم اسے انٹیگرینڈ کے لیے آسان بناتے ہیں
جس کو حروف سے تقسیم کیا جاتا ہے جو ایک ہی ہے لہذا یہ دونوں اصطلاحات منسوخ ہو جائیں گی لہذا مجھے ان کو لکھنے کی ضرورت نہیں ہے
مربع cos مائنس دو اوقات x لکھوں گا اب آپ آسانی سے اس انٹیگرل کا اندازہ لگا سکتے ہیں لہذا پہلی اصطلاح انٹیگرل dx میں انہیں صرف
ایکس
مائنس ون x مربع cos دو cos two x فنکشنز کے لیے ہمیں اسے لکیری فنکشن میں تبدیل کرنا ہوگا ہم جانتے ہیں کہ cos اس لیے مربع
کے برابر ہے
اس لیے cos مربع x جمع ایک مگر کچھ نہیں ہے cos دو x دو
تو بالآخر مجھے مل گیا۔ یہ دونوں منسوخ ہو جاتے ہیں ان دو مائنس انضمام کے ساتھ ایک بار پھر dx دو x اس لیے میں بدلتا ہوں یہ ایک جمع دو
اس x دو جمع ایک مستقل ہوگا تو یہ x کے انضمام کا مائنس سائن دو x ٹو cos کا انضمام کچھ نہیں بلکہ x ٹو cos ہوتا ہے اور پھر x
لکھ x آہ کے ساتھ منسوخ ہو جاتا ہے۔ آپ اب بھی ہو سکتے ہیں میرا مطلب ہے کہ اسے وہی شکل لکھیں جیسا کہ یہ یہاں ہے یا آپ سائن ٹو x
لکھا جا سکتا ہے لہذا مثلثی sin x cos x plus constant معلوم ہے لہذا اسے مائنس آف x cos x سکتے ہیں آپ کو دو گناہ
شناختوں کا استعمال کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ اس فنکشن آہ اس انٹیگرینڈ کو ایک بہت ہی آسان شکل میں لکھا جا سکتا ہے جو ایک اور تکنیکی
شناخت کا استعمال کرتے ہوئے دوبارہ تبدیل ہوتا ہے اور پھر صرف اس کا جائزہ لیا جاتا ہے ہم مزید کچھ مثالوں کو دیکھیں گے اور کچھ دوسری
یا اس معاملے کے لیے میں اسے dx مثالوں کی مثالیں فرض کریں کہ ہمیں انٹیگرل کا اندازہ کرنا ہے۔ ایک پلس بی سائن اسکوائر ایکس پر قسم کا
کچھ b اور a کا اندازہ لگانا ہے جہاں dx اسکوائر ایکس پر انٹیگرل b sin پلس x اسکوائر cos ایک کے طور پر کہوں گا آپ کو i
cos square xs 1 minus مستقل ہیں جو اب مناسب طریقے سے منتخب کیے گئے ہیں۔ آپ کر سکتے ہیں دیکھیں کہ اس مسئلے کو
کا انتخاب کرکے اس مسئلے میں تبدیل کیا جاسکتا ہے تو b اور a کا انتخاب کرکے اور پھر آسان بنانے اور پھر کچھ نئے sine square x
پر قسم b sin مربع x ah اس کے مطابق مسئلہ کا انتخاب کیا جاسکتا ہے تو ہم دیکھیں گے کہ اس مسئلے کو کیسے حل کیا جائے۔ ایک پلس
پہلی چیز جو ہمیں ذہن میں آنی چاہئے وہ یہ ہے کہ ایک ایسی شکل میں تبدیل کریں جہاں ہم اپنی کچھ تکنیکوں کا استعمال کر سکتے ہیں جو ہم dx
تاکہ بندسہ میں ہمیں سیکنڈ x مربع cos پہلے ہی سیکھ چکے ہیں ایک طریقہ یہ ہے کہ عدد اور اعشاریہ دونوں کو تقسیم کیا جائے۔ بذریعہ
ملے گا اگر میں یہ کرتا ہوں تو مجھے یہاں کیا احساس ہے کہ عدد x ٹین مربع b جمع x ملے گا اور ڈینومینیٹر میں ہمیں سیکنڈ مربع x مربع
بن جائے گا کہ xdx کو ایک اور نئے متغیر کے طور پر تبدیل کرتا ہوں تو سیکنڈ مربع tan x ملتا ہے اور اگر میں x مربع x کو dt
کے علاوہ کچھ x سیکنڈ مربع x کے ساتھ مسئلہ ہوگا لیکن خوش قسمتی سے ہمارا ایک تعلق ہے کہ ایک جمع ٹین مربع x صرف اس سیکنڈ مربع
x ایک جمع ٹین مربع xdx سیکنڈ مربع x مربع lus tan نہیں ہے لہذا ہم ڈینومینیٹر میں سیکنڈ مربع ایکس کو ایک پی کے طور پر تبدیل کریں۔
tan x کے برابر ہے اور پھر متبادل x ایک جمع ٹین مربع x مربع x فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے x ٹین مربع b جمع a جمع a تو
کے برابر ہے xdx dt کے برابر بنائیں تاکہ سیکنڈ مربع t کو
ہے t x tan بار b جمع a سے تقسیم کیا جاتا ہے معاف کیجیے b جمع a کو ایک جمع d t اس لیے ہمیں یہ انٹیگرل ملتا ہے جیسا کہ
مربع جمع صرف مربع کے قریب ہے بات یہ ہے کہ ہمیں ایک جمع بی کو عام کے t بذریعہ dt مربع ہے تو یہ فارم t ضرب b جمع a تو
میں بدل dt طور پر لینے کی ضرورت ہے لہذا اگر ہم اس کو ایک جمع بی کو مشترک کے طور پر ایک جمع بی کو عام کے طور پر لیں تو یہ فارم
یہ اب ایک معروف فارمولا ہے اگر میں ایک جمع بی لکھتا ہوں تو الفا مربع ون کے برابر ہوتا ہے ah مربع t جمع b جمع a جائے گا بذریعہ
ایک جمع بی انٹیگریشن سے اگر میں سمجھتا ہوں کہ یہ ایک جمع بی الفا مربع ہے تو میں یہاں فارمولہ استعمال کر سکتا ہوں تاکہ یہ جمع بی 1 سے
بذریعہ الفا جو اس چھوٹے متبادل کے بعد جمع مستقل ہوگا جو اس چھوٹے متبادل کے بعد الفا سے ایک جمع بی t ایک ہو جائے بذریعہ الفا ٹین الٹا
کے مربع جڑ سے تقسیم ایک جمع مستقل t ون بنائے گا ایک جمع بی کی مربع جڑ سے تقسیم ایک ٹین کے مربع جڑ سے تقسیم ایک جمع بی کی بار
کے b جمع a کے مربع جڑ سے ایک جمع بی میں لکھ سکتے ہیں۔ a کے مربع جڑ سے جو آخر کار تھوڑی سی آسانیاں کرنے کے بعد آپ اسے
پر منحصر ہے فرض کریں مسئلے میں خاص مسئلے میں یہ دیا b ah اور a جمع مستقل ہے لہذا a جڑ کے اوپر جڑ tan inverse t
کی کوئی اور قدر ہے تو آپ آسانی سے اندازہ لگا سکتے ہیں کہ کیا انٹیگرل ہو گا یا اگر اس فارم میں فارم دیا گیا b کی کچھ قدر ہے a گیا ہے کہ
ہے تو آپ بھی انٹیگرل کی قدر کا اندازہ لگا سکتے ہیں اگلی ہم آپ کے لیے ایک اور مثال منتخب کرتے ہیں تو فرض کریں کہ ہمیں ایک جمع ایکس پر
dx کا انضمام معلوم کرنا ہے۔ مربع sin inverse two x
کے متبادل x اس لیے کہ یہاں کوئی دوسرا عنصر موجود نہیں ہے آہ ہمیں یہاں کیا استعمال کرنا چاہیے وہ یہ ہے کہ ایک طریقہ یہ ہے کہ کوئی ایک
کو استعمال کر سکتا ہے آپ کچھ متبادل رکھ سکتے ہیں یا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ آپ اس خیال کو چیک کریں جو آپ کے پاس ہے الٹا فو کی مثال
x جمع 1 x یہاں غور کرتے ہوئے کہ یہ لکھا گیا ہے 1 ضرب بذریعہ سائن انورس 2 nction کے لیے پہلے ہی استعمال کیا جا چکا ہے۔
مربع تو آئیے کوشش کریں اور دیکھیں کہ اگر میں اس مرحلے میں انتخاب کرتا ہوں تو کیا ہوتا ہے کیونکہ یہ ایک الٹا مثلثی فنکشن ہے لہذا مجھے
اسے پہلا فنکشن سمجھنا چاہئے۔ اور یہ ایک الجبری فنکشن ہونے کے ناطے مجھے دوسرے فنکشن کے طور پر غور کرنا چاہیے لہذا حصوں کے
لحاظ سے انضمام میں یہاں لاگو کرنے جا رہا ہوں لہذا اگر میں اس انضمام کو حصوں کے حساب سے لاگو کروں گا تو مجھے جو ملے گا وہ یہ
مائنس انٹیگریشن x مربع جو کہ پہلے ہے دوسرے کا فنکشن انٹیگریشن لہذا ایک کا انضمام مجھے x پر ایک جمع x ہے کہ سائن انورس دو
مربع ہے لہذا میں اسے 1 بذریعہ x کی تفریق 1 بذریعہ مربع جڑ 1 مائنس x سائن انورس کا فرق دے گا لہذا میں جانتا ہوں کہ سائن انورس
مربع پورے مربع سے پھر ضرب کریں کیونکہ یہ عنصر ہے لہذا x ہے 1 جمع x کے بجائے 2 x مربع جڑ لکھوں گا . 1 مائنس کا تو یہ
مربع پر اب تک سب سے پہلے فنکشن انٹیگریشن آف x سے ایک جمع dx کے x کی تفریق دو d مجھے اس عنصر کا مشتق لینا ہوگا لہذا
سیکنڈ مائنس انٹیگرل تفریق پہلے کا اور پھر دوسرے کا انٹیگریشن
اس لیے سیکنڈ کا انٹیگریشن آپ کو ایکس ڈی ایکس دے گا اب مجھے یہ معلوم کرنا ہے کہ ایک جمع ایکس مربع پر دو ایکس کے لیے ڈی بائی ڈی
سے الگ الگ معلوم کریں تو یہ ڈینومینیٹر پر فارم بندسہ کا ہے تو اس dx کے x مربع پر دو x ایکس کیا ہے تو مجھے یہ بتانے دو ایک جمع
کو ایک x ملے گا۔ مربع مجھے دو x کے فرق میں دو مائنس دو x مربع ملے گا مجھے ایک جمع x کے فرق میں ایک جمع x سے مجھے دو

مربع دے گا جو بالآخر x مربع ہے جو مجھے دو مائنس دو x مربع مائنس چار x مربع سے تقسیم کرے گا پورا مربع یہ دو جمع دو x جمع سے تقسیم کر سکتا ہوں مربع مکمل مربع تو مشتق یہ اصطلاح میرے پاس اب قدر ہے میں اسے x مربع میں ایک جمع x میں دو کو ایک مائنس مربع بن جائے x مربع مائنس انٹیگریشن میرے پاس یہ اصطلاح ہے اب یہاں 1 مائنس یہ 4 x پر ایک جمع x سائن انورس دو x یہاں لکھوں گا مربع پورے مربع پر تو یہ یہاں اصطلاح ہے میں اسے ایک x مربع پر 1 جمع 4 x nus گا لہذا میں اس بضم کا اندازہ کروں گا الگ 1 میل لکھ سکتا ہوں۔ c 1 مربع پورے مربع کے بطور لکھوں گا جسے میں یہاں x مربع کی تقسیم ایک جمع x مربع پورے مربع مائنس چار x جمع مربع اسے x مربع مائنس 4 x کو طاقت میں اضافہ 4 جمع 2 x مربع تو اگر میں پورے مربع کو کھولتا ہوں تو مجھے ملے گا 1 جمع x جمع مربع پورے x مربع پورے مربع پر ایک جمع x مربع پورا مربع ملے تو عدد ایک مائنس x مربع بنا دے گا تاکہ مجھے 1 مائنس x مائنس 2 اصطلاح ah مربع کے طور پر حاصل کروں گا لہذا ڈینومینیٹر میں یہ x مربع پر 1 جمع x مربع پر بن جائے گا اور بالآخر میں اسے ایک مائنس اس ڈینومینیٹر کی اصطلاح کے لیے یہ متبادل بنائے گا تو یہ مجھے ملے گا 1 سے i مربع بن جائے گی لہذا x مربع 1 جمع 1 x مائنس 1 مربع x مربع اس کو یہاں اس تفریق سے ضرب دیا جائے گا جو مجھے پہلے ہی 2 گنا 1 مائنس x مربع سے زیادہ 1 جمع x زیادہ 1 مائنس اسے غور سے dx h یہاں رکھوں گا اور پھر آخر میں x تو میں اسے xdx مربع پورا مربع ملے گا اور پھر آخر کار یہ x سے زیادہ 1 جمع مربع کے ساتھ منسوخ ہو رہا x مربع ایک جمع x مربع ایک مائنس x دیکھیں کچھ اصطلاحات منسوخ ہو رہی ہیں مثال کے طور پر یہ ایک مائنس x مربع مائنس x اوور ہو جاتا ہے۔ ایک جمع x سائن الٹا دو x مربع میں سے ایک کے ساتھ منسوخ ہو رہا ہے تو آخر کار یہ x ہے ایک جمع ہو tx two xdx dt کے طور پر لے سکتا ہوں تاکہ t مربع کو بطور ایک نئے متغیر x پر دوبارہ میں اس ایک جمع dx مربع x ایک جمع تو x dx دو سے dt ہو گا جسے میں براہ راست a اس طرح ہم اس کا اندازہ کر سکتے ہیں لوگارتھمک آپ x sin پر لکھ سکتا ہوں۔ اس طرح ان constant مربع پلس of mod of one plus x مربع مائنس نصف لاگرتمک inverse two x on one plus x اصطلاحات کا جائزہ لینے کے بعد ہم یہ نتائج حاصل کر سکتے ہیں بعض اوقات یہ بہت آسان ہو جاتا ہے جب آپ کچھ متبادل استعمال کرتے ہیں۔

ٹین تھیٹا پر x مثال کے طور پر معکوس ٹرگنومیٹرک فنکشنز کی اقدار کے لیے کوئی یہاں آہ کو منتخب کر کے دیکھ سکتا ہے آئیے ہم کہتے ہیں کہ جاتا ہے اور دیکھیں کہ اس خاص مثال کے ساتھ کیا ہوتا ہے میں آپ کے لیے ایک اور مثال کا انتخاب کروں گا تاکہ یہ ظاہر کیا جا سکے کہ اگر ہم کے انضمام کی مثال کا cos inverse کے متبادل کی قسم ایک اور متغیر ہے لہذا ah استعمال کرتے ہیں تو یہ کیسے تیار ہوتا ہے۔ کہ اس طرح جانے کے بجائے میں نے t مربع مائنس ون cos inverse two x تو یہ dx مربع مائنس ون x انتخاب کرتے ہوئے دو بار تھیٹا کے sin theta d مائنس آف dx تھیٹا کے برابر ہے لہذا x cos اسے حل کیا ہے پچھلی مثال میں ایک متبادل بناؤں گا۔ جیسا کہ تھیٹا کے طور پر لے لیتا integral i اپنی شکل cos inverse two cos مربع تھیٹا مائنس ون مائنس sin theta d برابر ہے تو تھیٹا ہے 2 cos مربع تھیٹا مائنس 1 cos الٹا ہے لیکن میں فارمولہ مثلثی رشتہ جانتا ہوں 2 cos ہے اب یہ اصطلاح اس فیلو کا ٹو تھیٹا کچھ نہیں ہے مگر تھیٹا کے دو cos inverse cos تھیٹا کچھ نہیں ہوگا مگر تھیٹا کے دو بار 2 cos inverse cos اس لیے بار اور پھر مائنس آف سائن تھیٹا ڈی تھیٹا تو یہ سائن تھیٹا تھیٹا ڈی تھیٹا کے مائنس ٹو انٹیگریشن کے برابر ہے اب میں پرزوں کے حساب سے اے ایچ انٹیگریشن کا استعمال کر سکتا ہوں کیونکہ یہ فرض کر رہا ہے کہ یہ پہلا فنکشن ہے اور یہ ٹرائیگونومیٹرک اے ایچ سیکنڈ فنکشن ہے تو یہ تھیٹا cos تھیٹا میں sin تھیٹا مائنس انٹیگریشن تھیٹا تفریق 1 اور cos تھیٹا کا مائنس دے گا انٹیگریشن بطور مائنس آف sin مجھے دو تھیٹا ڈی تھیٹا کے مائنس کے طور پر انٹیگریشن ہے جو آخر کار مجھے مائنس مائنس پلس 2 تھیٹا کوس تھیٹا پھر مائنس ٹو دے گا تو یہ مائنس مائنس پلس تھیٹا کا انٹیگریشن سائن تھیٹا اور انٹیگریشن کے مستقل کے cos تھیٹا کا مائنس ٹو انٹیگریشن کر دے گا cos ہو جائے گا اور پھر یہ مائنس یہ cos ہے اور تھیٹا برابر ہے x تھیٹا cos سوا کچھ نہیں ہے لہذا اب یہ متبادلات ہمیں واپس جانے میں مدد کریں گے کہ قیمت کیا ہے لہذا inverse x

So 2 x cos inverse x 2 یہاں سے مائنس sin تھیٹا تو sin تھیٹا 1 مائنس cos تو 1 مائنس اسکوائر تھیٹا کا مربع جڑ ہوگا cos کے متبادل کے ساتھ جب ہمیں الٹا کائینیمیٹک فنکشن دیا جاتا ah مربع ہے جب انضمام کا مستقل لہٰذا x مربع تھیٹا کا 2 مربع جڑ جو کہ ایک مائنس ہے تو ایک متغیر کے متبادل کے ساتھ ٹرگنومیٹرک فنکشن میں یہ کبھی کبھی انٹیگرینڈ کو دوسری آسان شکل میں تبدیل کرنے میں مدد کرتا ہے جسے ہم آسانی سے ای کر سکتے ہیں۔ ہم اسے مزید کچھ اور مثالوں میں دیکھیں گے آئیے ہم مندرجہ ذیل مثال کا انتخاب کرتے ہیں تو آئیے اس مثال کو لیتے ہیں i is equals to integration of tan inverse root of one minus x over one plus xdx اس مثال کو حل کرنے کے لیے ہم استعمال کریں گے جیسا کہ ہمارے پاس ہے پچھلے کیس میں استعمال کیا گیا صرف ایک چیز جو ہمیں ذہن میں رکھنا کا متبادل اس طرح بنانا چاہئے کہ یہ پوری اصطلاح ٹین فنکشن میں بدل جائے تاکہ یہ ٹین اس وقت کے فنکشن کے ساتھ x ہے وہ یہ ہے کہ ہمیں کو دیکھیں لہذا مجھے ایک فارمولا استعمال کرنا چاہئے x سے زیادہ 1 پلس x الٹا ہو جائے مجھے ذہن میں رکھنا چاہئے لہذا اس فارم کو 1 مائنس جہاں ان کو منسوخ کردیا جائے لہذا اگر آپ نوٹس کریں اور اگر آپ چیک کریں تو آپ کے پاس دو میں دو تھیٹا کا فارمولا موجود ہے۔ مختلف شکل اسکوائر تھیٹا مائنس ون کے طور پر بھی لکھ سکتے cos میں آپ اسے ون مائنس ٹو سائن اسکوائر تھیٹا کے طور پر لکھ سکتے ہیں یا آپ اسے دو ایک مائنس کے xi سے زیادہ ایک جمع x ٹو تھیٹا کے برابر ہوتا ہے میں نے دیکھا کہ ایک مائنس cos کا متبادل بناتا ہوں تو x ہیں لہذا اگر میں طور پر لکھ سکتا ہوں اور پھر جب سے میں ہوں یہاں اسے لکھتے ہوئے مجھے اسے کینسل کرنا پڑے گا

اسکوائر تھیٹا مائنس اس قدر غور سے cos اس لیے مجھے یہ فارمولہ استعمال کرنا چاہیے تاکہ 1 مائنس 2 سائن اسکوائر تھیٹا اوور 1 پلس 2 دیکھیں اگر آپ اسے آخر کار یہاں حاصل کریں گے تو کیا یہ بھی منسوخ ہو جائے گا عدد میں منسوخ ہو جائے گا آپ کو سائن اسکوائر تھیٹا ملے گا اسکوائر تھیٹا ملے گا کیونکہ دو بھی دو کے ساتھ منسوخ ہو جاتے ہیں cos اور ڈینومینیٹر کو آپ کو

مربع تھیٹا پر x cos سے زیادہ 1 جمع x سے زیادہ 1 مائنس x اسکوائر تھیٹا پر سائن اسکوائر تھیٹا ملے گا تو 1 جمع cos اس لیے آپ کو ٹو تھیٹا کے cos بنانا x تھا لہذا اس کا متبادل m گناہ کا مربع بن جاتا ہے جو ٹین مربع تھیٹا کے سوا کچھ نہیں ہے اور یہ وہی ہے جو ہمارا کو اس فیلو i دے گا مائنس آف ٹو سائن ٹو تھیٹا ڈی تھیٹا کے برابر ہے تو بنانا اس متبادل سے ہمیں معلوم ہوا کہ انٹیگرینڈ dx برابر ہے جو آپ کو سے ضرب کیا گیا ہے جو کہ مائنس ٹو سائن dx تھیٹا ٹین الٹا ٹین تھیٹا کو tan مربع جڑ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے tan inverse کے مجھے تھیٹا سائن دو تھیٹا اور ڈی تھیٹا دیں یہ ill ٹو تھیٹا ڈی تھیٹا ہے لہذا میں اس مائنس ٹو کو انٹیگرل ٹائی کے باہر لے سکتا ہوں۔ الٹا ٹین ڈبلیو دوبارہ پچھلے مسئلے کی شکل میں ہے لہذا میں اسے پہلے اور اس کو دوسرا فنکشن سمجھوں گا اور پھر حصوں کے ذریعہ استعمال کے انضمام کا اندازہ لگاؤں گا یہ مکمل طور پر حل نہیں ہوگا اس کا اندازہ کرنے کے لئے حصوں کے ذریعہ انضمام کا استعمال کریں انٹیگرل اور پھر آخر میں تھیٹا سے ایکس میں کنورٹ کر کے ریلیشن شپ کا استعمال کر کے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جب آپ کچھ متبادل بنا کر مسائل کو حل کرتے ہیں تو آسان بنانے میں مدد ملتی ہے جو مسئلے کو آسان شکل میں بدل دے گا اسی قسم کا ایک اور مسئلہ میں آپ کے لیے یہ منتخب کروں گا۔ فرض کریں کی جانچ کرنے کے لئے دیا گیا ہے تو پچھلی مثال سے آپ کو کم از کم x dx سے زیادہ 1 پلس روٹ x کہ ہمیں یہ فنکشن صرف 1 مائنس روٹ کچھ اندازہ ہو جانا چاہئے کہ 1 مائنس اور پھر 1 پلس کا متبادل کیا ہو سکتا ہے تو میرا خیال ہے کہ آپ کر سکتے ہیں۔ آسانی سے اندازہ لگا سکتا ہوں پر جیسا کہ ہم نے پچھلے x پر 1 جمع جڑ x تھیٹا کے برابر ہے تاکہ 1 مائنس جڑ cos 2 کی کوشش کرنی چاہئے x کہ مجھے مربع جڑ بیٹا عدد میں میں سائن فنکشن استعمال کروں گا ڈینومینیٹر میں cos 2 t تھیٹا آئے گا 1 جمع cos 2 مسئلے میں کیا تھا اس کے لئے 1 مائنس کوزائن فنکشن استعمال کروں گا تاکہ میں اسے کوزائن اسکوائر تھیٹا پر سائین اسکوائر تھیٹا کے طور پر حاصل کروں جیسا کہ پچھلے مسئلے میں

cos theta is equals to 1 ہم نے آپ نے اس کو استعمال کرتے ہوئے بدل دیا تھا کہ رشتے کو عدد کے لیے آپ استعمال کرتے ہیں
مربع تھیٹا مائنس ون استعمال کرتے ہیں cos کے لیے آپ denominator cos theta 2 اور minus 2 sine square theta
تو آپ کو ایک ہی اصطلاح ملے گی
اس لیے یہاں اگر میں تفریق لیتا ہوں تو مجھے جو ملے گا وہ یہ ہے کہ ایک دو کرکے روٹ ایکس ڈی ایکس مائنس آف سائن ٹو تھیٹا کے برابر ہے
تھیٹا کے نام سے جانا جاتا ہے cos دو گنا ڈی تھیٹا روٹ ایکس میرے لیے پہلے سے ہی
ٹو تھیٹا سائن دو تھیٹا ڈی تھیٹا ہمیں اس cos ٹو تھیٹا ہے تو x cos مائنس فور کے برابر ہے جڑ dx اس لیے میں حفاظت کر سکتا ہوں کیونکہ
دو تھیٹا گناہ دو تھیٹا ایس سائن فور تھیٹا ڈی تھیٹا تو ہم نے اس اصطلاح کا اندازہ لگایا ہے اور یہ ٹین مربع تھیٹا ہے cos وقت لکھتے ہیں دو
plied by minus two کو ٹین مربع کے مربع جڑ کے انٹیگرل میں تبدیل کیا جائے گا۔ تھیٹا جو تھیٹا ملٹی کا ٹینجنٹ ہے۔ i اس لیے انٹیگرینڈ
تھیٹا d اور پھر sine 4 theta
اس لیے اگر آپ تشخیص کو دیکھیں تو ایسا نہیں لگتا کہ ہم فوری طور پر اس کا اندازہ کر سکتے ہیں
اس لیے ہمیں مثلثی تعلق کے مزید استعمال کے لیے جانا پڑے گا
کو سائن فور تھیٹا سے ضرب دیا sin theta on cos theta اس لیے اس ٹین تھیٹا کو دو بار انٹیگرلز کریں میں اسے لکھ سکتا ہوں۔
جائے گا جسے میں دو سائن دو تھیٹا کوس ٹو تھیٹا ڈی تھیٹا لکھوں گا تو یہ مائنس فور ہو جائے گا اور آپ جانتے ہیں کہ آپ گناہ دو تھیٹا کو دو گناہ
تھیٹا کو اس دو دو سے چار سے ضرب دیا گیا ہے پہلے سے ہی دو سائن تھیٹا کوس تھیٹا cos تھیٹا کوس تھیٹا لکھ سکتے ہیں تاکہ سائن تھیٹا اوور
تھیٹا منسوخ ہو جاتا ہے اور جو آپ کے پاس رہ جاتا ہے وہ ہے مائنس آٹھ چار سے آٹھ مائنس آٹھ سائن cos کوس ٹو تھیٹا ڈی تھیٹا میں ہے تو یہ
اسکوائر تھیٹا ڈی تھیٹا اب آپ cos اسکوائر تھیٹا sin theta sin theta sine اسکوائر تھیٹا cos اسکوائر تھیٹا cos اسکوائر تھیٹا
اسے حل کرسکتے ہیں جس طرح آپ چاہیں لیکن ایک آسان طریقہ شاید یہ ہے کہ آپ سائن ٹو تھیٹا میں تبدیل ہوجائیں تو یہ ہوجائے گا اگر میں لوں
انوس ٹو انٹیگریشن میں یہاں لکھتا ہوں چار سائن اسکوائر تھیٹا کوس اسکوائر تھیٹا اور یہ کچھ نہیں سوائے دو سائن تھیٹا کوس تھیٹا جو کہ سائن m
ٹو تھیٹا مکمل اسکوائر سائن اسکوائر ٹو تھیٹا ڈی تھیٹا دوبارہ آپ فارمولہ استعمال کریں کیونکہ دو تھیٹا ایک مائنس ٹو سائن کے برابر ہے مربع تھیٹا تو
سے تھیٹا ملے گا کیونکہ چار تھیٹا کا ایک cos یہاں ڈالیں تھیٹا دو تھیٹا کے برابر ہے تاکہ آپ کو ایک مائنس سوری ملے گا تاکہ آپ کو ایک مائنس
تقسیم دو سے cos مائنس
کے بدل دیں۔ چار تھیٹا کو دو ڈی تھیٹا سے تقسیم کیا تو بالآخر یہ دو منسوخ ہو جاتے ہیں cos of اس لیے اس مائنس ٹو انٹیگریشن کو ایک مائنس
اور آپ کو یہاں مائنس تھیٹا مائنس مائنس پلس کوزائن کا انضمام ملے گا آپ کو چار تھیٹا کی سائن ملے گی تقسیم چار اور پلس انٹیگریشن کا مستقل
تھیٹا میں لکھنا cos 2 تھیٹا sine 2 تھیٹا کو sin 4 2 تھیٹا تھا لہذا cos 2 کا روٹ x اور آپ نے جو مفروضہ لیا ہے وہ مربع تھا۔
کے نصف کے برابر ہوگا اور میرا مطلب cos inverse root x ضروری ہے تاکہ آپ اس طرح تبدیل کر سکیں تاکہ یہاں آپ کے پاس تھیٹا
دو تھیٹا sin مربع تھیٹا کے مربع جڑ کے طور پر لکھتے ہیں cos دیکھ سکتے ہیں یا یہ آہ سائن تھیٹا آپ اسے ایک مائنس f ہے اسی طرح آپ
کے برابر ہے x تھیٹا جڑ cos کا استعمال کرتے ہوئے تبدیل کریں کیونکہ x مربع دو تھیٹا اور پھر اسے اس جڑ cos کے بطور ایک مائنس
کے طور پر تو حتمی جواب حاصل کرنے کے لیے اسے مزید آسان بنائیں اور اب آپ یہاں x لہذا آپ اسے آخر میں لکھ سکتے ہیں۔ ایک مائنس
تھیٹا کے طور پر استعمال کرتے ہوئے اور پھر ان تھیٹاز کی قدروں کو تبدیل کر کے اس کا اندازہ کر cos 2 تھیٹا sin 2 سائن 4 تھیٹا کو 2
سکتے ہیں تو اب میں اس کی دوسری کلاس میں جاؤں گا۔ سادہ مسائل جہاں ایک مخصوص قسم کے فنکشن کو کئی بار ایکسپونینشل فنکشن کے ساتھ
تک بڑھایا جاتا ہے لہذا اگر ہم اس قسم کے مسئلے کا جائزہ لیں تو یہ بہت مددگار xfx plus f prime x dx کو پاور e لکھا جاتا ہے
ثابت ہوتا ہے اگر ایکسپونینشل کے ساتھ پروڈکٹ لکھا جائے اور ہم پہچان سکتے ہیں کہ جس پروڈکٹ کو ایکسپونینشل کے ساتھ لکھا گیا ہے اس فارم
آپ کو مثال کے ساتھ دکھائیں گے تو اس کا اندازہ کرنے کے لیے ہم اسے دو حصوں میں تقسیم fx plus f prime xi میں لکھا جا سکتا ہے
ایک اور i میں انضمام ای ریز ٹو پاور ایکس ایف پرائم ایکس ڈی ایکس پر اسے fxdx plus پاور e کرتے ہیں آئیے ہم بتائیں کہ کیا ہوتا ہے
اور اس کو پہلے فنکشن e raise to power xfx dx ہے i one ایک کو چیک کریں تاکہ i ٹو کے طور پر دیکھیں اور i اس کو
مائنس انٹیگریشن کا فرق x بڑھا کر پاور fxe اور اس کو دوسرا فنکشن سمجھ کر حصوں کے ذریعہ اس کا اندازہ کریں۔ انٹیگرل باہر نکلے گا
تک بڑھایا گیا اور یقینا انضمام کا مستقل جو آخر کار وہاں ظاہر ہوگا لہذا اب آپ xdx کے پاور e انٹیگریشن کے دوسرے f prime x پہلی
کے سوا کچھ نہیں اور ah i 2 دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ہے
f ایک کے طور پر لکھا جاتا ہے جس کی قدر i کو i تک بڑھایا گیا ہے لہذا اب انٹیگرل c پلس i 2 مائنس x کو پاور i 1 fxe اس لیے
بڑھا کر پاور e نکلتا ہے i جو منسوخ ہو جاتا ہے تو آخر میں انٹیگرل c ٹو پلس ہوتی ہے۔ i ٹو پلس i مائنس x میں بڑھا کر پاور x e
x fx
کے ساتھ exponential لکھا جائے تو ah اس لیے اگر کوئی مسئلہ اس قسم کا ہو کہ اس کا ایکسپونینشل فنکشن ہو رہا ہو اور پروڈکٹ کو
یہ بہت ہو جاتا ہے۔ جانچنا آسان ہے اور ہم اس فارمولے کو براہ راست استعمال کر سکتے ہیں۔ یہ اس کے علاوہ کچھ f prime x پلس fx
اس پراپرٹی کے اطلاق کے لیے سب سے پہلے ایک سادہ مثال کا انتخاب کرے گا constant ci پلس x fx بڑھا کر پاور e نہیں ہے
منتخب کریں تاکہ آپ کر سکیں میرے خیال میں dx مربع e raise to power x 1 by x minus 1 by x اس لیے اس انٹیگرل
کے سوا کچھ نہیں ہے اور اس لئے اس کا x پرائم f مربع x ہے تو مائنس 1 بائی x fx آسانی سے اندازہ لگانا ہے کہ اگر ایک بذریعہ
تو یہ وہ جواب ہے x plus constant کو پاور پر بڑھایا جاتا ہے۔ xe xe پر اٹھایا جانا چاہئے لہذا انٹیگرل 1 x کو پاور fxe انٹیگرل
بطور i جسے آپ ایک لائن میں فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں آپ تشخیص کر کے بھی اس کی تصدیق کر سکتے ہیں تو لکھیں
مربع ڈی ایکس اس انٹیگرل کو پہلے فنکشن x ون میں بذریعہ x مائنس انٹیگریشن اور بڑھا کر xdx کو ایک میں x بڑھا کر پاور e انضمام
کے طور پر استعمال کرتے ہوئے اور اس کو دوسرے فنکشن کے طور پر استعمال کریں تو آپ کو یہاں کیا ملے گا وہ یہ ہے کہ یہ پہلے فنکشن
مربع ہے ایک منفی نشان x مائنس انٹیگریشن تفریق پہلے کا 1 x بڑھا کر پاور xe کے طور پر ہے لہذا 1 بذریعہ
اسکوائر x پر x بڑھا کر پاور e مائنس انٹیگریشن xdx بڑھا کر e انٹیگرل 2 x بڑھا کر پاور lus e بنا دے گا۔ p اس لیے یہ اسے
x پر x دیتی ہے e raise اور پلس آخر میں انضمام کا ایک مستقل اس لئے یہ دونوں اصطلاحات منسوخ ہو جاتی ہیں جو آخر کار آپ کو dx
پلس مستقل وہی اصطلاح جو آپ نے یہاں اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کی ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ فارمولہ آہ بہت کارآمد
اور مددگار ہو جاتا ہے جب ہم آہ کو حل کرتے ہیں جس طرح کی مثالیں آہ کبھی کبھی نہیں دی جاتیں ہو سکتا ہے مسئلہ براہ راست اس شکل میں نہ
دیا جائے لیکن یقینی کے بعد متبادل ہم اسے اس شکل میں حاصل کر سکتے ہیں تو آئیے ہم چند مثالوں کو دیکھتے ہیں جہاں ہم ان کو متبادل بنا سکتے
ہیں تو اس مثال کو لیں میں لاگ آف لاگ آف ایکس ڈی ایکس کے انضمام کے برابر ہے معذرت کے ساتھ لاگ آف لاگ آف ایکس پلس 1 بذریعہ لاگ
ایکس مربع یہ مربع ڈی ایکس ہے تو فرض کریں کہ ہمیں اس انٹیگرل کا جائزہ لینا ہے تو اب چونکہ اس کے بہت سارے لوگاریتھمک فنکشنز یہاں
کی جگہ کچھ نیا متغیر ہونا چاہئے اور دیکھنا چاہئے کہ اصل میں کیا ہوتا ہے لہذا log x ظاہر ہو رہے ہیں ایک فطری انتخاب لگتا ہے کہ مجھے
x کے برابر ہے لیکن چونکہ اس اظہار میں کوئی xdx dt کے برابر ہے فوراً میں دیکھ سکتا ہوں کہ 1 بذریعہ t ڈالوں log x اگر میں
ظاہر نہیں ہو رہا ہے

کے لیے کوشش کرنی چاہیے اور اسے حل کرنا چاہیے x اس لیے مجھے اس
اس لیے میں لوگارتھمک سے جانتا ہوں کہ لوگارتھمک اور ایکسپونینشل انورس فنکشن ایک دوسرے کے لیے
میں t کو پاور e کے برابر ہے x e کا یہ بھی مطلب ہوتا ہے کہ اگر میں اسے حل کرتا ہوں تو log x is equals to t اس لیے
جو کچھ بھی نہیں ہے xdtxdt میں اٹھایا گیا ہے جس پر افسوس ہے t کو پاور xe دیتا ہے dx اٹھایا گیا ہے اور اس وجہ سے یہ مجھے
میں اٹھایا گیا ہے۔ اور t کو پاور x e مگر
کی طاقت میں کہ اب مجھے ان متبادلات کو انٹیگرل میں بنانے دیں تو میں dt کے برابر ہے dx e تک بڑھایا گیا تو dt کو پاور e اس لیے
ہے تو اسے اس tdt بڑھا کر پاور e مربع اور پھر یہ t جمع ایک سے t ہے مربع لاگ ان t جمع 1 بذریعہ x t لاگ کا لاگ بن جاتا ہوں
e raise to power t log tdt plus e raise to power t by t مربع dt فارم میں لکھتے ہوئے مجھے یہ ملتا ہے کہ
میں اس فارمولے کا اطلاق نہیں دیکھ رہا جو ہم نے ویں میں استعمال i لیکن براہ راست ah اب تک یہ اظہار فارم میں تبدیل ہو چکا ہے اس فارم
کیا ہے۔ پچھلا مسئلہ لیکن میں یہاں کیا کرسکتا ہوں وہ یہ ہے کہ میں دوبارہ اس فیکٹر کے لیے پرزوں کے ذریعے انضمام کا استعمال کرسکتا ہوں
اور چونکہ لوگارتھمک یہاں موجود ہے اور
اس لیے مجھے اس لوگارتھمک کو پہلے فنکشن کے طور پر اور اس ایکسپونینشل کو دوسرے فنکشن کے طور پر منتخب کرنا ہوگا لہذا اگر میں ایسا
کا انضمام ایک log t میں اضافہ ٹی پاور میں مائنس انٹیگریشن tz کے پاور e انضمام کے log t کرتا ہوں تو میں کروں گا حاصل کریں
مربع t پر t کو پاور میں اٹھایا گیا e میں اٹھایا گیا پلس انٹیگریشن tdt کو پاور e e کو پاور میں اٹھایا گیا e کے انضمام سے t ہے
کو پاور ٹی لاگ ٹی مائنس انٹیگریشن تک بڑھایا گیا اور پاور ٹی ون اوور ٹی مائنس e آئیے اب ہم ان کو ایک ساتھ جمع کریں اور دیکھتے ہیں کہ dt
ah ون اوور ٹی اسکوائر تک بڑھایا گیا اب اس عنصر کو دیکھیں تاکہ متبادل کے استعمال کے بعد ابتدائی طور پر لاگرتھمک میں شامل مسئلہ اور
کو طاقت c اس مسئلے کے لیے جس میں فارمولے کا اطلاق ہوتا ہے جس کا میں نے آپ کو بتایا تھا تو integration by part to q
مربع وہی مسئلہ جو میں نے پچھلی مثال میں حل کیا تھا لہذا آپ جانتے ہیں کہ کی مدد سے ویں مثال کے t مائنس ون بائے t میں ایک بذریعہ
پلس مستقل میں بڑھایا جائے گا لہذا ہم لکھتے ہیں کہ ft کو t ہے لہذا انضمام کو طاقت t پرائم f ہے اور یہ ft طور پر یہ ہے کہ یہ
اٹھایا جائے گا۔ ٹی کو فٹ میں پاور کرنا ایک بائے ٹی ہے پلس ایک e مائنس اس فیلو کا انٹیگرل e raise to power t log t یہاں
ظاہر x log t حصہ تک بڑھا ہوا tc کو پاور تک بڑھایا e برابر ہے x لاگ ایکس کے برابر ہے اور t مستقل طور پر قدروں کو واپس ڈالنا
ہے لہذا یہ c اور پلس مستقل x ہے ایک سے لاگ t سے 1 سے x دوبارہ t طاقت میں e raise کا لاگ ہے لاگ ایکس مائنس t ہے
اس خاص مسئلے کا حل یا جواب ہے جس سے ہم نے اس کے متبادل کے ساتھ نمٹا تو اس پروب کا اطلاق اس فارمولے کا جس کا ہم نے مطالعہ کیا
کی طرف جاتا ہے۔ اس خاص مسئلے کا حل آپ کے لیے ایک اور آسان مسئلہ ہے جو اسی آئیڈیا کو استعمال کرتا ہے یہ ہے کہ ای ریزڈ ٹو ah
کے انٹیگرل کو تلاش کریں پہلی نظر میں یہ کسی فنکشن کی طرح نہیں لگتا ہے اور مشتق فٹ cos x اوور 1 پلس sin x پلس 1 x پاور
بیٹھتا ہے۔ لیکن اگر آپ اسے غور سے دیکھیں تو آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ اسے تبدیل کر سکتے ہیں۔ ایک مخصوص شکل میں اور آپ دیکھیں گے
پر لکھیں گے اور اسی زاویہ کے cos x کو 1 جمع x کہ ہم اسے کیسے کریں گے تو سب سے پہلے ہم اس مثلثی اظہار 1 جمع سائن
x x مربع sin کو دو جمع x اسکوائر cos فارمولوں کو استعمال کرتے ہوئے تبدیل کریں گے تو ایک جمع گناہ ایک لکھیں گے۔ میں لکھوں گا
پورے کو ایک جمع اس سے x دو تو یہ ایک ہے اور یہ سائن cos x دو x دو جمع دو سائن x دو جمع سائن مربع x x مربع cos دو
دو مائنس ون میں تبدیل ہو جائے گا تاکہ یہ منسوخ ہو جائے اور آپ کو یہاں کیا ملے گا وہ یہ x x مربع cos دو cos xi تقسیم کیا جائے گا۔
سے دو ایک سے دو یہاں اور اس کوس ایکس کو یہاں کے اندر متعارف x مربع cos دو پورے مربع کو x دو جمع سائن cos x ہے کہ
کروائیں تاکہ آپ کو ایک جمع ٹین ایکس کا نصف ملے گا اگر آپ کو آہ ملے گا تو یہ اصطلاح ایک جمع ٹین ایکس دو پورے مربع سے اب ہم اس فنکشن
کو بڑھاتے ہیں کیونکہ ہم ابھی تک وہاں نہیں پہنچے جہاں ہم اب ہم اس فنکشن کو درج ذیل میں 1 جمع ٹین مربع ایکس بذریعہ 2 جمع 2 ٹین ایکس
دو دو دو دو x بذریعہ بڑھاتے ہیں دو اور نوٹ کریں کہ ایک جمع ٹین مربع تھیٹا سیکنڈ مربع تھیٹا کے سوا کچھ نہیں ہے تاکہ یہ آدھا سیکنڈ مربع
دو ہو جائے تو مثلثی فنکشن جو انٹیگرینڈ میں ہے اس فارم میں لکھا جا سکتا ہے اب اس عنصر کو دیکھیں اگر میں x منسوخ ہو جائے جمع ٹین کا
ہے دو کو ایک سے دو سے ضرب کیا جاتا ہے تو یہ x کا مشتق سیکنڈ مربع tan x x 2 سمجھتا ہوں تو fx tan x 2 by fx اسے
لکھ سکتا ہوں جس کے برابر ہے اس i ہے لہذا اس فیکٹر میں ہر ایک کے ساتھ تھوڑی ہیرا پھیری کے بعد یہ کہ میں انٹیگرنٹ x پرائم f عنصر
tan x 2 کو بڑھایا گیا ہے لہذا اس فیکٹر کو میں نے اس فارم میں آسانی سے حساب کیا ہے میں اسے x کو اس فیکٹر سے ضرب e فیلو
ہے لہذا f prime x ہے یہ fx اور اب میں جانتا ہوں کہ یہ dx کے نصف کے طور پر لکھوں گا اور پھر x کے علاوہ سیکنڈ مربع
پلس کنسٹنٹ کو حل کے طور xfx تک بڑھانا آپ کو پاور f prime x پلس xfx کو پاور e فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے پچھلے کیس
دے گا تاکہ آپ کو یہ پیچیدہ نظر آنے والا مسئلہ نظر آئے۔ اور ہم نے مخصوص ریلا کا استعمال کرتے ہوئے کچھ میں آسان بنایا e raise پر
ہم اسے یہاں تک پہنچا سکتے ہیں اور پھر اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے ہم اسے حل کرتے ہیں تاکہ اس کا یہی جواب ہے tionships
اس انٹیگرل by xe raise to power x plus 1 by xdx مائنس 1 x جمع 1 جمع x آخر میں ہم ایک اور مثال دیکھیں گے 1 جمع
t جمع 1 کو براہ راست x کو جانچنے کے لیے آپ دیکھتے ہیں کہ ہمیں اسے ایک مختلف زاویے سے دیکھنے کی ضرورت ہے کیونکہ اگر ہم
کے برابر ہے جو یہاں ظاہر نہیں ہوتا ہے۔ تو آئیے پہلے اسے dt کے برابر ہے dx مربع x کے طور پر منتخب کریں گے تو یہ 1 مائنس 1
لکھ سکیں اور دوسرا x dx جمع ایک کو x کو الگ رکھیں تاکہ ہم اسے x مائنس ایک کو x دو حصوں میں توڑتے ہیں ایک کو الگ رکھیں اور
اب ہم اس دوسرے عنصر سے نمٹنے کی کوشش کریں گے اور x dx لکھیں 1 بذریعہ x plus بڑھا کر xe مائنس 1 بذریعہ x حصہ اسے
کے برابر ہو جسے میں غور dx dt مربع x x کا انتخاب کریں گے تاکہ ایک مائنس ون x x جمع ایک x کے طور پر t کچھ نئے متغیر
جیسا ہی ہوگا۔ اگر میں اس فیکٹر کو دیکھتا ہوں تو یہ مجھے ایکس مربع مائنس 1 پر ایکس ایکس مربع ڈی ایکس کے برابر ہے تو x سے دیکھوں تو
سے ضرب اور تقسیم کرتا ہوں تاکہ میں وہ عنصر حاصل کر سکوں لیکن یہ نہیں ہے کہ وہ x مجھے کیا چاہیے کرنے کا مطلب یہ ہے کہ میں
x سے ضرب کریں اور x چیز ہے جو اس وقت یہاں موجود نہیں ہے تو میں یہ کروں گا کہ میں اس عنصر سے ضرب اور تقسیم کروں گا
مربع ہے تو اسے غور سے دیکھیں x x ضرب x مربع مائنس 1 x سے تقسیم کریں تو اگر میں یہ کرتا ہوں تو مجھے یہاں جو ملے گا وہ ہے
ہے اور dt میں نئے حصے کا حصہ dx کو ابھی چھوڑ دیں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر آپ اسے لیتے ہیں پھر یہ کہ انٹیگرینڈ ٹائمز x اس عدد
اس وجہ سے اس فیلو کا انٹیگرل ممکن ہے
کو پہلے فنکشن کے طور پر سمجھنا چاہیے اور ان حصوں کے ذریعے انضمام کا اطلاق کرنا چاہیے جو x اس لیے مجھے اسے دوسرے فنکشن
دوسرے کے x کے ذریعے بڑھایا گیا اور پھر پلس پہلے فنکشن xdx پلس ون میں x اس خیال میں ڈالے گا۔ اس کو اس طرح سے ہمارے
میں اٹھایا جاتا t کا انضمام پاور e بن جائے گا اس لئے dt اوقات dx بڑھایا جاتا ہے اور یہ پورا عنصر e میں t انضمام سے یہ پاور
کریں آپ کو الگ سے اس کی x پلس ون سے x کو بڑھا کر e میں اٹھایا گیا ہے لہذا یہ ہوگا۔ t کے انضمام کے طور پر طاقت ah e ہے۔
x x پلس 1 x بڑھا کر پاور e کے برابر ہے xdx پلس 1 x بڑھا کر پاور xe xe میں 1 x x مائنس 1 x گنتی کرنی ہوگی دعویٰ ہے
ہو سکتا ہے۔ اس کی جگہ لے کر حاصل کیا گیا ہے لہذا آپ کو پہلے کے مائنس تفریق کا الگ سے حساب لگانا ہوگا اور پھر دوبارہ انضمام کرنا ہوگا
پلس 1 کی طاقت حاصل ہو جائے اب انہیں غور سے دیکھیں وہ ایک جیسے ہیں x کے ذریعے xdx تاکہ آپ کو

x جمع 1 سے x کو xe اس لیے معذرت کے ساتھ یہ منسوخ ہو گیا ہے ایک مستقل مساوات تو یہ اس ساتھی کی طرح ہے اور اس وجہ سے یہ تک بڑھا ہوا نظر آتا ہے لہذا متغیرات کی بعض تبدیلیوں نے ان انٹیگرلز کا اندازہ کرنے میں ہماری مدد کی اور ہم نے سیکھا اور ہم نے دیکھا c جمع کہ ہم کیسے کر سکتے ہیں انہیں ایک ایسی شکل میں تبدیل کریں جو ہمارے لئے آرام دہ ہو جسے ہم آسانی سے سنبھال سکتے ہیں لہذا آہ اس کے ساتھ ہی ہم اس لیکچر کے اختتام پر آئے ہیں آہ مزید پریشانیوں کے ساتھ مشق کریں اور اپنے آپ کو ان سے راحت بخش بنائیں شکریہ

Prutor@IITK