پچھلی کلاس میں طلباء کا خیرمقدم کرتے ہیں ہم نے لاتعلق انٹیگرلز کے خیال کو سمجھ لیا ہم نے سمجھ لیا کہ اس کا ایک ایریا فنکشن سے کیا
کے انٹیگرل کو تمام مخالف مشتقات کے مجموعہ کے طور پر fxdx مطلب ہے ہم نے یہ بھی سمجھا کہ اینٹی ڈیریویٹیو کا آئیڈیا کیا ہے پھر ہم نے
بیان کیا۔ آخر کی طرف حقیق
توں کے ایک مجموعے سے تعلق رکھتے ہوئے ہم نے منحنی خطوط کے اس خاندان یا مخالف مشتق کی ہندسی تشریح کو سمجھا اور ہم نے انٹیگرل
کے نقطہ نظر سے ایریا فنکشن کو بھی انٹیگرل سمجھتے ہوئے دیکھا جس پر ہم نے کہا کہ یہ ایک قطعی انٹیگرل ہے لہذا یہ وہ چیزیں ہیں جو ہم
نے اپنی پچھلی کلاس میں سیکھی ہیں آج ہم مزید دیکھیں گے کہ غیر معینہ انٹیگرل کی خصوصیات کیا ہیں ہم کسی فنکشن کے انٹیگرل کا اندازہ
کی اہمیت دکھاتے ہیں c کیسے لگا سکتے ہیں جو ہمیں دیا جائے گا اس لیے شروع کرنے سے پہلے ہم ایک مثال لیتے ہیں جہاں میں آپ کو مستقل
جو ہم لیتے ہیں جب ہم انٹیگرل لیتے ہیں
تو فرض کریں کہ ہم جیسے ہیں فنکشن سمال ایف ایکس کے اینٹی ڈیریویٹیو ایف ایکس کو تلاش کرنے کے لیے کیا گیا ہے جسے پانچ ایکس بڑھا
کر پاور فور پلس ٹو کے طور پر دیا جاتا ہے اس طرح کہ اینٹی ڈیریویٹیو کی ویلیو ہمیں دی جاتی ہے اس لیے یہ نہ صرف یہ کہتا ہے کہ ہمیں اینٹی
x کی قیمت پانچ ہے جب f مشتق جس کی قیمت nt کا لیکن یہ بھی کہتا ہے کہ ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ x ڈیریویٹیو کو تلاش کرنا ہے۔
ایک کے برابر ہے لہذا تمام اینٹی ڈیریویٹوز کے خاندان میں سے آپ کو ایک مخصوص اینٹی ڈیریویٹیو تلاش کرنا ہوگا۔ آپ کو دکھائے گا کہ یہ کیسے
کی قسم سے ہم ندازہ لگا سکتے ہیں کہ بذریعہ n کیا جا سکتا ہے ہمارے سابقہ تجربے کے ینٹی ڈیریویٹیو کے ایک فنکشن ای س ریائز ٹو پاور
نک تا ہے او اس لی اس فنکشن کو اینٹی ڈیریویٹیو کے طور پر سمجھا جاتا ہے ہمیں اینٹی ڈیریویٹیو x پانچ جم دو dx x rai e to power
کی قدر دو c پانچ کے برابر ہے c پانچ کے برابر ہے جس کا مطلب یہ ہوگا کہ ایک جمع دو جمع f کی ضرورت ہوتی ہے جیسے کہ ایک کا
جمع دو x پانچ جمع دو wer پر بڑھاتا ہے۔ po کو x سے یہاں قیمت fx کے طور پر دیتے ہیں لہذا مخالف مشتق
جمع دو کو طاقت میں بڑھاتا ہے جو آپ x ملا ہے جو پانچ جمع دو x تو اس صورت میں آپ نے دیکھا کہ ہمارے پاس ایک انوکھا اینٹی ڈیریویٹیو
ایک پانچ کے برابر ہوتا ہے x کو قیمت دیتا ہے جب
کے برابر ہے اس مستقل کی مخصوص قدر کا f1 5 تو اگر ہم ہیں ایسی شرط دی گئی ہے کہ جو شرط اس معاملے میں دی گئی تھی جیسا کہ
عمومی طور پر اندازہ لگایا جا سکتا ہے ہم اس مستقل کو کسی بھی صوابدیدی مستقل کے طور پر سمجھتے ہیں اگلا ہم غیر معینہ انٹیگرلز کی
خصوصیات کو دیکھیں گے۔ پراپرٹی سے متعلق ہے جیسا کہ ہم نے شروع میں بتایا تھا کہ انضمام کو تفریق کا الٹا عمل سمجھا جا سکتا ہے لہذا
کی خاصیت بذات خود فنکشن ہے جس کا مطلب ہے کہ یہ فنکشن کا انٹیگرل ہے اور اگر آپ اس انٹیگرل کا مشتق لیں گے dx کی fxdx انٹیگرل

تو آپ ایک ہی فنکشن حاصل کریں دوسری خاصیت یہ ہے کہ فنکشن کے مشتق کا انضمام فنکشن کے علاوہ ایک مستقل ہے اب ہم جانے سے پہلے
پہلے ان دونوں اظہار کو دیکھیں ان مساوا
توں کے ثبوت کے لیے پہلا اظہار یہ کہتا ہے کہ کسی فنکشن کے انٹیگرل کی تفریق خود فنکشن ہے جبکہ دوسری صورت میں یہ کہتی ہے کہ
فنکشن کے تفریق کا انضمام فنکشن جمع مستقل ہے اور اس لیے ہم یہ نہیں کہتے۔ کہ دونوں آپریشنز ڈیفرینسل اور انٹیگرلز ایک دوسرے کے الٹے
آپریشن ہیں لیکن ہم کہتے ہیں کہ ان کو ایک الٹا آپریشن سمجھا جا سکتا ہے کیونکہ بین الٹا آپریشن ہوتا
تو دونوں آپریشنز کو بیک وقت لگانے کے بعد انہیں آپ کو دینا چاہیے تھا ۔ خود کام کرتا ہے لیکن یہاں اس معاملے میں یہ ایک مستقل ہے لہذا اگر ہم
مستقل تک انفرادیت پر غور کریں
کو براہ راست اس تعریف کا استعمال کرکے ثابت کیا جاسکتا ہے جو ہم a تو انہیں ایک الٹا آپریشن ثبوت کے طور پر سوچا جاسکتا ہے تاکہ پراپرٹی
کا fx چھوٹے fx کے برابر ہے اس طرح کہ کیپٹل fx چھوٹے d by dx of fx اینٹی ڈیریویٹیو کے خیال سے جانتے ہیں۔ کیا وہ
مخالف مشتق ہے پھر fxdx کا انٹیگرل c ہے apital fx plus c
چھوٹے ایف ایکس کے لیے اینٹی ڈیریویٹیو ہے لہذا اگر f تو اب ہم اس انٹیگرل پر مشتق آپریٹر کا اطلاق کریں گے یہ فرض کرتے ہوئے کہ کیپیٹل
ہم یہاں مشتق کو لاگو کریں گے
جو c پلس dx fx بذریعہ d دے گا جیسا کہ اس کا اطلاق ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی طرف d کے ذریعے dx کے fxdx تو یہ ہمیں انٹیگرل
کے سوا df over dx کے برابر ہے کیونکہ مستقل کا مشتق صفر ہوگا اور ہم اس تعلق سے پہلے ہی جان چکے ہیں کہ dx سے زیادہ df
خود فنکشن ہے fxdx انٹیگرل dx بذریعہ d انٹیگرل ایف ایکس خود ہی فنکشن ایف ایکس نکلتا ہے لہذا fx so d by dx کچھ نہیں ہے
جو d by dx of fx ہم دوبارہ تعریف استعمال کرتے ہیں لہذا ہم نوٹ کرتے ہیں کہ b پراپرٹی کو ظاہر کرتا ہے a for لہذا یہ پراپرٹی
ہے لہذا اب اگر آپ اسے دوبارہ این ٹی ڈیریویٹیو کی تعریف کے نقطہ نظر سے دیکھیں f prime x بنیادی طور پر
f تو سمال ایف پرائم ایکس کے لیے اینٹی ڈیریویٹیو ہے اور اس لیے انٹیگرل کی تعریف کا استعمال کرتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں کہ
bf prime xdx کا تعلق اصلیت کے سیٹ سے ہے اور یہ وہی ہے جو پراپرٹی c کے لیے c پلس ہے۔ fx کا انٹیگرل prime xdx
کے برابر ہے لہذا ہم نے اس خاصیت کو اس تعریف کا استعمال کرتے ہوئے دکھایا ہے کہ مشتق کا انٹیگرل ایک ہی فنکشن اور ایک fx plus c
مستقل دوسری پراپرٹی ہے جسے ہم دیکھتے ہیں۔ یہ ہے کہ اگر ہمیں یہ دیا جائے کہ دو انٹیگرلز کا مشتق ایک جیسا ہے اس کا مطلب ہے کہ دو
کے برابر ہے dx کے gxdx انٹیگرل d by dx کا fxdx کے لیے اگر انٹیگرل gx اور fx فنکشنز
وہ فنکشنز کے ایک ہی خاندان سے تعلق رکھتے ہیں gx اور fx تو دونوں فنکشن انٹیگرل
تو ہم کیسے کر سکتے ہیں اگر ہم یہ دکھاتے ہیں
تو ہم کیا کرتے ہیں کہ ہم پورے اظہار کو لیتے ہیں اس اظہار کا مطلب ہے کہ d by dx انٹیگرل کے fxdx مائنس integral of
gxdx صفر
کو بائیں ہاتھ کی طرف لے جائیں پھر آپریٹر کو باہر لے جائیں integral dxdx میں منتقل کریں dx کے dx میں d تو پہلے آپ اسے
کے لیے بھی درست x کے لیے درست ہے اور اس لیے یہ مساوات تمام x اور پھر اس اظہار کو اس انداز میں لکھیں کیونکہ یہ مساوات تمام
کے کسی فعل کا مشتق صفر کے برابر ہونے کا امکان صرف اس صورت میں ہو جب فنکشن بذات خود ایک مستقل ہو x ہے اور یہ ممکن ہے کہ
اور جس کا مطلب یہ ہوگا c ایک مستقل کے برابر ہے ہم کہتے ہیں integral of gxdx کا انٹیگرل مائنس fxdx جس کا مطلب یہ ہے کہ
کہ اگر میں جی ایکس کو دائیں جانب منتقل کرتا ہوں
کو دائیں fx میں ہے اور اسی طرح اگر میں c one r کہتے ہیں جیسے c one پلس ون اس کو gxdx تو تمام فنکشنز کا مجموعہ انٹیگرل
جانب لیتا ہوں
سے تعلق رکھتے ہیں اس لیے وہ ان انٹیگرلز کے لیے منحنی خطوط کے خاندان کی نمائندگی r دو c جمع دو ایسے کہ fxdx تو انٹیگرل
کرتے ہیں اور اس لیے دو انٹیگرلز کیونکہ یہ دونوں خاندان اس برابری کی وجہ سے یہاں مساوی ہیں اس لیے ہم عام طور پر اس طرح نہیں کرتے
کا انٹیگرل fxdx جیسا کہ یہ خاندان برابر ہیں ہم عام طور پر یہاں لکھے جانے والے مستقل کے بارے میں پریشان نہ ہوں اور ہم لکھتے ہیں کہ
انٹیگرل آپریٹر کی کچھ اور خصوصیات تلاش ah یہاں مزید ہم ed کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ah کا انٹیگرل ہے یعنی مستقل gxdx وہی ہے جو
کرتے ہیں یہ پراپرٹیز ڈیفرینشل آپریٹر کی پراپرٹی سے ملتی جلتی ہیں جسے آپ پہلے ہی دیکھ چکے ہیں پہلی پراپرٹی لکیریٹی پراپرٹی ہے جسے

کے انٹیگرل کے gxdx کے انٹیگرل کے برابر ہے پلس gxdx fxdx پلس کے انٹیگرل fx میں اس میں درج ذیل طریقے سے لکھوں گا
فنکشنز کو دیکھیں اس میں کہا گیا ہے کہ دو فنکشنز کے مجموعے کا انٹیگرل ان دو فنکشنز کے انٹیگرلز کے مجموعے کے برابر ہے لہذا انٹیگرل
d سے dx بنیادی طور پر جمع ثبوت پر تقسیم کیا جاتا ہے آسان ہے یہاں یہ ہے کہ آپ بائیں ہاتھ کی طرف لے جائیں اور اسے بائیں ہاتھ کے
سے فرق کریں آپ کو فراہم کرتا ہے جیسا کہ ہم پراپرٹی سے جانتے ہیں جو ہم پہلے ہی دکھا چکے ہیں کہ انٹیگرل کا مشتق خود فنکشن ہے لہذا
ہے یہ ہم کہتے gx جمع fx پراپرٹی کو استعمال کرتے ہوئے جو بھی ہم پہلے ہی یہ ثابت کر چکے ہیں کہ اس انٹیگرل کا مشتق کچھ نہیں بلکہ
ہے۔ بائیں طرف سے اب اسی طرح کا کام ہم دائیں ہاتھ کی طرف کریں گے دائیں ہاتھ کی طرف فرق کریں کیونکہ ہم com ہیں کہ وہ رشتہ ہے جو
لکھ سکتے ہیں۔ dx بذریعہ d کے انٹیگرل پر dx کے d جمع fxdx پہلے ہی جانتے ہیں کہ مشتق اضافی پر تقسیم ہوتا ہے لہذا ہم اسے
پلس fx کا فنکشن d by dx integral پر انٹیگرل کا اب ایک بار پھر پراپرٹی ون کا استعمال کرتے ہوئے ہم جانتے ہیں کہ gxdx
غور سے تعلق رکھتا ہے لہذا ہم نے یہاں جو دکھایا ہے وہ یہ ہے کہ gx وہی ہے جیسا کہ فنکشن integral d by dx integral gx
کہ اگر ہم بائیں ہاتھ کی طرف اور دائیں ہاتھ کی طرف کے دو افعال میں فرق کرتے ہیں

تو ہمیں ایک ہی مشتق ملتا ہے اور سابقہ جائیداد سے وہ نحنی خطوط کے ایک ہی خاندان سے تعلق رکھتے ہیں او اس وجہ سے یہ خا یت درست
ہے لہ ا اس سے ثا ت ہوتا ہے کہ لکیری خا یت انٹیگرلز کے بعد دوسری خاصیت اسکیلر ضرب کے لیے ہے لہذا یہاں جو کہا گیا ہے وہ یہ ہے
کچھ مستقل ہے یہ بھی ہم وہی آئیڈیا استعمال کرتے k اوقات کے انضمام جیسا ہے جہاں k کے fxdx کا انضمام fxdx اوقات k کہ
دائیں ہاتھ کی d by dx بائیں ہاتھ کی طرف سے نکلا اور d by dx ہوئے ثابت کریں گے جیسا کہ ہم نے پچھلی پراپرٹی کے لیے کیا تھا
لیا جا سکتا ہے۔ ڈفرنشل آپریٹر سے مختلف کے لیے ہمیں دوبارہ ایک پراپرٹی کا استعمال کر رہا ہے اسی طرح k طرف ہم جانتے ہیں کہ اسکیلر
جیسا ہی ہے اب ہم کیا کریں گے کہ ہم ان دونوں پراپرٹیز کو ایک kfxdx kfxdx ایک بار پھر جیسا کہ پچھلے کیس میں ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ
ساتھ جمع کریں گے اور ان میں ڈالیں گے۔ ایک عام فارمولہ

کا تعلق ہے f one xf two x dot dot dot fn x اور افعال k 1 k 2 dot dot kn تو آئیے ہم کہتے ہیں مستقل کے لیے
f one کو باہر انٹیگریٹ k one کا انضمام ایک ہی ہے جیسا کہ آپ knfndx جمع ڈاٹ ڈاٹ ڈاٹ k 2 f 2 جمع k 1 f 1 کہ
یہ خاصیت انٹیگرلز کا اندازہ لگانے میں مدد کرتی ہے جہاں فنکشنز مخصوص لکیری knfnx dx ٹو لیتے ہیں اور پھر sorry dx plus k
امتزاج میں لکھے جاتے ہیں ہم ایک فوری مثال دیتے ہیں

کا انٹیگرل معلوم کرنا ہوگا ہم اسے bx plus c اسکوائر پلس ax ہمیں اس فنکشن کا انٹیگرل معلوم کرنے کے لیے فنکشن e تو فرض کریں۔
انٹیگرل b مربع پلس x کو مستقل لکھ سکتے ہیں abc اس انداز میں لکھتے ہیں چونکہ ہم لکیریٹی پراپرٹی کو جانتے ہیں اس لیے ہم یہاں اس
کے طور پر لکھتے ہیں جو ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں یا یہاں تک کہ ہم dx ٹائم انٹیگرل کا اور ایک ہے لہذا ہم اسے انٹیگرل ون c پلس x ہے
مربع ملے گا اور اس لئے اسے x کیوب بذریعہ 3 ہمیں x مخالف مشتق کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر ہم اس کی تفریق لیں
کے لئے ہے ایک کے لئے c مربع بذریعہ دو جمع چھوٹے x لکھ سکتے ہیں آپ نے پہلے ہی دیکھا ہے کہ یہ bx کیوب بذریعہ 3 جمع x ہم
کو فرق کریں گے x انضمام یعنی اگر ہم
تو آپ کو ملے گا۔ ایک

یہاں پہلے ہی ظاہر ہو رہا ہے اس c کہیں گے کیونکہ یہ c one کو یہاں ظاہر ہونا چاہئے اور آخر میں مستقل اس لئے ہم اسے x تو فنکشن
فنکشن جس کا آسانی سے اس انٹیگرل کو تین الگ الگ s نکلے thi لئے اسے ہمیں الجھن میں نہیں ڈالنا چاہئے لہذا اس لکیری امتزاج کا انٹیگرل
انٹیگرلز میں

توڑ کر اور ان کا اندازہ لگا کر کیا جا سکتا ہے اس تکنیک سے ہمیں کچھ پیچیدہ مسائل کو حل کرنے میں مزید مدد ملے گی اب ہم تفریق کے بارے میں
اپنے علم کو استعمال کریں گے اور کچھ فارمولے لکھیں گے جو ہمیں انٹیگرلز کا اندازہ کرنے میں مدد کریں گے۔ مسئلہ حل کرنے کے یہ فارمولے
بہت بنیادی فارمولے ہیں اور آپ کو ان کو زیادہ سے زیادہ یاد رکھنے کی کوشش کرنی چاہیے
تو میں بائیں طرف کیا کروں گا میں مشتق کا متعلقہ فارمولہ لکھوں گا اور دائیں طرف میں متعلقہ انٹیگرل لکھوں گا۔

تو ہمارے پاس یہ ہے d by dx x raise to power n plus 1 by n plus 1 x raise to power n
ہو جاتا ہے یہاں ہمیں یہ نوٹ n plus 1 plus a constant c پر x n plus 1 تک اٹھانے والا ndx کی طاقت x n plus تو
کے طور c مائنس 1 کے برابر نہیں ہو سکتا ہم اس مائنس 1 کیس کو الگ سے ڈیل کریں گے جو وقت کے ساتھ ساتھ ایک خاص n کرنا چاہیے کہ
پلس x کا انٹیگرل ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ یہ dx کا ایک ہے اور اس لئے ایک dx x بذریعہ d پر آئے گا۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ
کا انٹیگرل ہے۔ cosine x اور اس لئے cosine x ہے t by dx of sine x مستقل یقینی گرامیٹک افعال بنتا ہے مثال کے طور پر
کیا سائن ایکس پلس سی ڈی بذریعہ ڈی ایکس کوزائن ایکس نکلتا ہے سائن ایکس کا مائنس ہوتا ہے اس لیے ہم یہاں مائنس کا نشان لگائیں گے تاکہ جب
ہم انٹیگرل لکھیں

ہے اور اس لیے معذرت x سیکنڈ اسکوائر x تو یہ سائن ایکس کا انٹیگرل بن جائے مائنس کوزائن ایکس پلس مستقل ڈی بذریعہ ٹین کا ڈی ایکس
یہ تمام معیاری فارمولے ہیں جو آپ کو کسی بھی حوالہ کتاب c پلس tan x برابر x dx چھوڑا سیکنڈ اسکوائر dx کے ساتھ میں نے یہاں
cos x لیکن میں اسے اس طرح لکھوں گا تاکہ یہ x مربع ہے۔ cos x ایک بار پھر مائنس d by dx of cortex میں مل سکتے ہیں
کا seck x tan x جو آپ کو seck x tan x ہے dx of six بذریعہ d پلس مستقل cot x کا اٹوٹ ہو جائے مائنس x مربع
cot x اور cos xx ہے cosec x ilarly کے برابر ہے۔ پلس مستقل ڈی بذریعہ سم کا ڈی ایکس x سیکنڈ xdx انٹیگرل دیتا ہے
یہاں منفی نشان کے ساتھ جو دوبارہ اسی طرح پہلے کی طرح میں اسے یہاں لوں گا

مزید ہم الٹا مثلث کے مشتق کو دیکھیں گے۔ فنکشنز c پلس cos xx کا اٹوٹ ہو جائے گا مائنس cos xx cot xdx تو یہ
مربع کا ایک اوور مربع جڑ ہے اور اس x ایک مائنس sin inverse x کے dx کے dx تو ہم نے اسے پچھلی کلاس کے دوران دیکھا ہے
d by dx of پلس مستقل ہے اور ہمارے پاس بھی ہے دیکھا کہ x کے لئے انضمام سائن انورس dx مربع جڑ x لئے ایک سے زیادہ مائنس
مربع کے مربع جڑ کے برابر ہے اور اس لیے ایک مائنس ہے اس لیے مجھے ایک ہی فنکشن x بھی ایک مائنس minus cos inverse x
سے الجھنا نہیں چاہیے کیونکہ ہم آپ کو پہلے ہی دکھا چکے ہیں کہ یہ دونوں فنکشن ایک ہی خاندان سے تعلق رکھتے ہیں . وکر اور اس وجہ سے
tan سائن انورس ایکس اور مائنس کوزائن الٹا ایکس وہ ایک ہی فنکشن کا انٹیگرل ہو سکتے ہیں مزید ہم کچھ اور فارمولوں کو دیکھتے ہیں جیسے
کا انضمام dx مربع x مربع ہے اور اس لیے ایک سے ایک جمع x کے ذریعے ہم جانتے ہیں کہ ایک سے ایک جمع dx کے inverse x
کے م d پلس مستقل اور اس پچھلے tan x

xa سے زیادہ ایک جمع dx مربع ہے جو یہاں مائنس لیتا ہے اور لہذا x کا مائنس ایک سے زیادہ ایک جمع cot inverse x توازی ہے
مربع جڑ ہے اور x مربع مائنس 1 کا x x d by dx of sec inverse کے علاوہ مستقل cot inverse x مربع مائنس ہے یہاں
ایک dx cos x inverse x بذریعہ d پلس مستقل اسی طرح x مربع جڑ کا انضمام نکلا سیکنڈ الٹا x مربع مائنس 1 کے x اس لئے
کو بھی لکھا جا dx مربع جڑ سے زیادہ x مربع مائنس ون کے x مربع جڑ کے برابر ہے لہذا x مربع مائنس ون کے x منفی نشان کے ساتھ
مائنس کے طور پر cosec inverse x پلس constant c سکتا ہے۔

کے dx بذریعہ d تو کائینیمیٹک اور انورس ٹرگونومیٹرک فنکشن کے ساتھ ہمارے پاس لوگارتھمک اور ایکسپونینشل فنکشن کا تعلق ہے ہمارے پاس
کا کفایتی حصہ دیتا ہے جیسا dx انٹیگرل x جو ہمیں er x کا علم ہے e raise to pow کے طور پر e raise to power x
e سے تقسیم کیا گیا ہے اور n کو nx بڑھا کر e سے dx کے d کے طور پر درحقیقت ہم لکھ سکتے ہیں کہ x بڑھا کر پاور e کہ
کے علاوہ ایک n سے n کے برابر ہے جو کہ nx پر اٹھائی گئی طاقت nxdx کی طاقت e میں 0 سے بڑا ہے تاکہ انٹیگرل nx بڑھا کر
یہاں صفر ہو جائے گا یہ فنکشن n منفی کے لیے بھی درست ہے کیونکہ جیسے ہی n برابر 0 ہے یہی n nought مستقل 0 سے بڑا ہے یا
بن جائے گا۔ ایک اور ہم ون ڈی ایکس کے انٹیگرل کو پہلے ہی جانتے ہیں اور ہم موڈ ایکس کے لاگ کے لیے ڈی بائی ڈی ایکس کو بھی جانتے ہیں
جو کہ ایک بذریعہ ایکس ہے اور اس لیے ون بائی ایکس ڈی ایکس کو لاگ ان موڈ ایکس پلس کانسٹینٹ کے طور پر لکھا جائے گا لہذا یہ آہ کیس جو
مائنس ون کے برابر نہیں ہے لہذا آپ سمجھ ah کوئی چیز x raise to power nn جس کے بارے میں جب ہم بحث کر رہے ہیں کہ
مائنس ون کے برابر ہو جائے n سکتے ہیں کہ اس صورت میں جب
تو اس فارمولے سے اس فارمولے کا خیال رکھا جا سکتا ہے ، مجھے یہ بتانے دیں کہ وہ بہت اہم ہیں۔ اور چونکہ وہ بہت بنیادی ہیں لہذا ہم ان کو
یاد رکھنا چاہئے کیونکہ ہم ان کو کثرت سے استعمال کریں گے ایک اور اہم تبصرہ جو میں مثال کے ساتھ آگے بڑھنے سے پہلے یہاں رکھنا چاہوں
گا وہ یہ ہے کہ وہاں پر ابتدائی افعال کے لحاظ سے تمام افعال کے انضمام کا پتہ لگانا ممکن نہیں ہو سکتا۔ کوئی ایسا فنکشن ہو جس کے لیے ہمیں
معلوم نہ ہو کہ اس کا اینٹی ڈیریویٹیو کیا ہے بذریعہ معائنہ یا یہاں تک کہ تشخیص کے ذریعے بھی ایسی ہی ایک مثال کو پاور مائنس ایکس مربع ڈی
ایکس تک بڑھایا جا سکتا ہے تاکہ معلوم ہو کہ ابتدائی فنکشن کے لحاظ سے اس فنکشن کے لیے اینٹی ڈیریویٹیو اس کا مطلب یہ ہے کہ کثیر الجہتی
مثلثی سرمایہ کاری نمبر چال ایکسپونینشل وغیرہ ممکن نہیں ہے اس لیے بعض صور
توں میں ہم اندازہ نہیں کر سکتے اور ان صور
توں میں ہم غیر معینہ انٹیگرلز کو ان کی اپنی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں اس لیے اب ہم خصوصیات کے لحاظ سے کچھ مثالیں دیکھیں گے۔ اور
x کو پاور 3 e انٹیگرلز جو ہم نے پہلی مثال سیکھی ہے جس کا میں نے انتخاب کیا ہے اس کے لیے فنکشن کا انٹیگرل معلوم کرنا بہت آسان ہے۔
تک بڑھایا گیا ہے لہذا اگر آپ اس انٹیگرل کو دیکھیں plus 1 dx
تو سب سے پہلے یہ دو فنکشنز کا مجموعہ ہے اور اس لئے ہم سمیشن پر انٹیگرل کی تقسیمی نوعیت کی خاصیت کا استعمال کرتے ہیں اور اسے
کو e کو اب فارمولے سے جو ہم جانتے ہیں کہ dx مستقل 4 کے باہر جمع سیکنڈ انٹیگرل 1 x بڑھا کر پاور 3 e اس شکل میں لکھتے ہیں
میں بڑھایا جاتا ہے nx پاور
x بائی تھری پلس کنسٹینٹ کو اس طرح رکھیں انٹیگرل ای کو تین x بڑھا کر پاور تھری e نکلتا ہے x 3 xdx کا اٹوٹ انگ پاور 3 e تو
سے تین جمع چار بار اس مستقل میں بڑھایا گیا
ٹو ہے تاکہ پوری c پلس مستقل x تو ہم اسے فور سی ون پلس انٹیگرل ایک کے طور پر کہیں گے یہ ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ یہ انٹیگرل
دونوں مستقل ہیں لہذا ہم ان کو c 2 اور c 1 چونکہ c 2 x plus x plus 4 c 1 plus بن جائے۔ پاور 3 e 3 x اصطلاح 4
ایک ساتھ جمع کر سکتے ہیں اور ہم ان کا نام بدل کر ایک نئے مستقل کے طور پر رکھ سکتے ہیں
c جمع ایک مستقل x جمع x بڑھا کر 3 طاقت ہو جائے گا۔ e 3 by تو یہ 4
تو انٹیگرل نکلے گا۔ اتنا ہی اب یہاں آپ آپ یہ بھی کر سکتے ہیں کہ انٹیگریٹ کرتے وقت یا
تو آپ مستقل کو تبدیل کر سکتے ہیں جب آپ انٹیگرل کو انٹیگریٹ کر رہے ہوتے ہیں یا آپ یہ بھی کر سکتے ہیں کہ آپ مستقل کو آخر میں تبدیل کر
سکتے ہیں
تو کئی بار ہم نہیں کرتے یا ہم نہیں کر سکتے۔ کسی خاص انٹیگرل کی تشخیص کرتے وقت مستقل کو فوری طور پر تبدیل کریں بلکہ ہم اسے آخر
مائنس ون کے مربع جڑ کے مربع جڑ سے انٹیگرل کا x میں ایک سنگل مستقل کو لگا کر کریں گے لہذا ہم آپ کے لیے ایک اور مثال لیں گے کہ ہم
اتنی بار ہمارے پاس انٹیگرلز کا اطلاق نہیں ہوسکتا ہے جو ہم نے براہ راست سیکھا ہے ہمیں کچھ dx مکمل مربع x اندازہ لگانا چاہتے ہیں ۔
آسانیاں کرنا پڑسکتی ہیں مثال کے طور پر یہاں اگر آپ دیکھیں کہ اگر ہم مربع کو بڑھاتے ہیں
مائنس دو گنا مصنوع جو x مربع کا مطلب ہے ایک بذریعہ x جمع ایک بذریعہ مربع جڑ x تو ہمیں کیا ملے گا وہ ہے مربع جڑ مربع کا مطلب ہے
دو ہے لکیریٹی پراپرٹی کو یہاں لاگو کریں
مربع از 2 x جس کا اندازہ آپ یہاں فارمولہ dx مائنس دو گنا انٹیگرل ایک xdx کا انٹیگرل پلس انٹیگرل ایک xdx تو ہمیں جو ملے گا وہ ہے
پلس انٹیگریشن کا مستقل ہے لہذا یہ اس معاملے کے لئے x مائنس 2 x کا استعمال کرتے ہوئے کر سکتے ہیں یہ لاگ آف موڈ x x جمع 1
لازمی ہے لہذا ایک مسئلہ جو شروع میں تھوڑا سا پیچیدہ لگ سکتا ہے لیکن اگر ہم کچھ ایسے رش
توں کو استعمال کرتے ہیں جن کے بارے میں ہم پہلے ہی جانتے ہیں اسے آسان بنایا جا سکتا ہے اور مزید ہم اندازہ لگا سکتے ہیں کہ انٹیگرل بہت
x مائنس 1 کو x مربع جمع x کیوب لینے دو مائنس x آسان ہو جائے گا اسی طرح کی ایک اور مثال جو میں آپ کے لیے لوں گا وہ ہے ہمیں
سے تقسیم کیا dx مائنس 1
تو یہ شروع میں تھوڑا پیچیدہ لگتا ہے لیکن اگر آپ غور سے دیکھیں
مربع کو عام کے طور پر لے سکتے ہیں x تو آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ پہلی دو اصطلاحات میں آپ
مائنس ون سے تقسیم x مائنس 1۔ اب آپ دیکھیں گے کہ x مائنس 1 پوری تقسیم x مائنس 1 آئے گا۔ پلس دوسری اصطلاح بطور x تو یہ
مربع جمع ایک کے علاوہ کچھ نہیں ہے جس کے لئے کوئی x مربع جمع ایک ملے گا لہذا یہاں پیچیدہ نظر آنے والی اصطلاح x کرنے سے ہمیں
اور مستقل ہے x مکعب بذریعہ تین ایک ہوگا اور اس لئے یہ x مربع کا پتہ لگا سکتے ہیں اور اس لئے یہ x ہم فوری طور پر انٹیگرل w نہیں
اس لئے نوٹ کریں کہ ہم نے ابھی اس انٹیگرل کو سممیشن پر تقسیم نہیں کیا ہے ہم نے اسے براہ راست لکھا ہے اس لئے مقررہ وقت میں مشق کے
ساتھ وقت کے ساتھ آپ انٹیگرلز کو براہ راست لکھ سکتے ہیں اور جب ہم انٹیگرل کی جانچ کر رہے ہیں
تو ہم ان تمام انٹیگرل تفصیلات کو چھوڑ دیں گے آپ کے لیے کچھ مثلثی تعلق کا استعمال کرتے ہوئے ایک اور مثال پیش کریں گے مثال چار کہتے
سے تقسیم کرنا ہوگا لہذا ہمارے پاس براہ راست ہمارے یہاں کوئی فارمولہ نہیں ہے لیکن xdx مربع cos x کو x ہیں کہ ہمیں سیکنڈ مربع
cos x اور x مربع cos کچھ بھی نہیں ہے مگر ایک بذریعہ x اگر آپ ان کو غور سے دیکھیں اور مثلثی تعلق کو لاگو کریں کہ سیکنڈ مربع
x مربع sin کچھ نہیں ہے مگر ایک بذریعہ x مربع
کے سوا کچھ نہیں ہے اب پھر ہم xdx اسکوائر ایکس پر ہے جو کہ ٹین اسکوائر cos تو ہم لکھ سکتے ہیں۔ یہ سائن اسکوائر ایکس کے طور پر
کا x کے ساتھ اور ہم سیکنڈ مربع x ہیں سیکنڈ مربع x ٹین اسکوائر ایکس کا انٹیگرل نہیں جانتے ہیں لیکن ہم ٹین اسکوائر کا رشتہ جانتے ہیں
انٹیگرل جانتے ہیں اس لئے ہمیں یہ سوچنا ہوگا کہ ہم کیا جانتے ہیں اور ہم اس مسئلے کو فارمولے میں کیسے تبدیل کر سکتے ہیں یا اس مسئلے کو
کے برابر ہے اور اس لئے اس فارمولے کو استعمال x سیکنڈ مربع x جو ہم پہلے ہی جانتے ہیں لہذا ہم جانتے ہیں کہ فارمولا ون جمع ٹین مربع
مائنس x کا اتنا انٹیگرل دے گا کہ ٹین x کے طور پر رکھ سکتے ہیں جو آپ کو سیکنڈ مربع dx مائنس ون x کرتے ہوئے ہم اسے سیکنڈ مربع
جمع انٹیگرل کا مستقل x انٹیگرل ہے ایک کا
تو یہ تھوڑا سا کچھ حساب لگانے کے بعد پیچیدہ نظر آنے والے فارمولے سے ہم ایک ایسے رشتے تک پہنچ گئے جس کے بارے میں ہمیں معلوم تھا

اور ہم نے اس رشتے کو استعمال کیا اور بالآخر ہمیں انٹیگرل مل گیا ہم تفریق اور انضمام کا کمپریشن ڈالیں گے ایک یہ کہ یہ دونوں آپریٹر ہیں جو
فنکشنز کے فرق پر کام کرتے ہیں۔ آپریٹر بھی ہے اور انٹیگرل بھی ایک آپریٹر ہے آپریٹر فنکشنز کو بطور ان پٹ لیتے ہیں میرا مطلب یہ ہے کہ مثال
dx of fx بذریعہ d کے طور پر
کا انٹیگرل یہ آپ کو فنکشن ایف ایکس دینے fxdx دیتا ہے اور اسی طرح یہاں x پرائم f تب ہی یہ آپ کو x پر چلتا ہے۔ f تو یہ فنکشن
کے لیے فنکشن ایفیکٹ پر آپریٹ ہوتا ہے لہذا وہ آپریٹر ہیں دونوں ہی لکیریٹی پراپرٹی کو مطمئن کرتے ہیں انٹیگرل بھی لکیریٹی پراپرٹی کو مطمئن
کرتے ہیں یہ ہم نے دیکھا ہے اگر ہم نے فرق دیکھا ہے۔ کسی فنکشن کو لے کر یہ انوکھا ہوتا ہے اس لیے فنکشن کا مشتق انوکھا انٹیگرل ہوتا ہے ہم
نے دیکھا ہے کہ اگر ہم کسی فنکشن کا انٹیگرل لیں
ہے لہذا یہ یو کے لحاظ سے منفرد نہیں ہے جس طرح سے ہم انفرادیت کی تعریف کرتے ہیں لیکن ہم اسے کہتے ہیں۔ جیسا c پلس fx تو یہ
کہ زیادہ تر وقت مستقل تک منفرد ہوتا ہے جس کا مطلب ہے کہ اگر ہم مستقل کو نظر انداز کرتے ہیں
تو وہ انٹیگرلز منفرد ہوتے ہیں آپ کسی نقطہ پر کسی فنکشن کے مشتق کی وضاحت کر سکتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ یہ نقطہ پر ٹینجنٹ کی
سمت کی نمائندگی کرتا ہے لیکن ایسا کوئی معنی نہیں انٹیگرل کی صورت میں تفویض کیا جا سکتا ہے اس کا مطلب ہے کہ کسی نقطے پر انٹیگرل کا
ہندسی تشریح برائے منحنی e کوئی مطلب نہیں ہے جبکہ ایک نقطہ پر تفریق کا مطلب ٹینجنٹ کی سمت کا ہوتا ہے جسے ہم نے بھی دیکھا ہے۔
بھی سمجھا جاتا ہے ہم نے dx بذریعہ dy خطوط کے خاندان کے لیے انٹیگرل کے معاملے کے لیے اور اسی طرح کی ہندسی تشریح برائے
مشتق کے معاملے کے لیے دیکھا ہے کہ یہ ایک محدود عمل ہے اور اسی طرح آپ انٹیگرل کے بارے میں بھی سیکھیں گے۔ آخر کار یہ عمل کو
محدود کر رہا ہے جیسا کہ میں نے پہلے ہی ایک خاصیت کا ذکر کیا ہے وہ یہ ہے کہ انٹیگرلز کو تفریق کا الٹا آپریٹر سمجھا جاتا ہے لیکن جیسا کہ
میں نے ذکر کیا کہ وہ بنیادی طور پر بالکل الٹا آپریٹرز نہیں ہیں کیونکہ مستقل اگلے کی موجودگی کی وجہ سے ہم ہیں۔ انٹیگرلز کا اندازہ کرنے کا
طریقہ سیکھنے جا رہے ہیں لہذا کوئی خاص طریقہ نہیں ہے جو ہر ایک ہاتھ پر ہر فنکشن پر لاگو کیا جائے گا اور آن یا کسی خاص مسئلے پر کسی
فنکشن پر منحصر ہے ہمیں مختلف طریقے لاگو کرنے ہوں گے لہذا ہم ان کو ایک ایک کرکے دیکھیں گے ۔ پہلا طریقہ جس پر میں آج آپ کے لیے
بات کرنے جا رہا ہوں وہ طریقہ متبادل ہے جیسا کہ آپ نام کے متبادل سے دیکھ سکتے ہیں۔
ہے ہم اس متغیر آزاد x کی جانچ کرنے کے لیے ہم نے دیکھا کہ یہاں پر آزاد متغیر fxdx تو اس طریقہ کار میں ہم کیا کرتے ہیں کہ انٹیگرل
کا کچھ فنکشن t ہے x میں کسی رشتے کے ذریعے تبدیل کرتے ہیں مثال کے طور پر فرض کریں کہ t کو کسی دوسرے آزاد متغیر x متغیر
جس میں اس تفریق پر کچھ خاص خصوصیات ہیں تاکہ ہم اس میں فرق کر سکیں
dx g کے اور اس لیے تفریق کے لحاظ سے ہم اسے لکھ سکتے ہیں کہ g prime t مساوی dt is دے گا بذریعہ dx تو یہ ہمیں
کے برابر ہے۔ اصل انٹیگرل اگر میں اس کا نام دیتا ہوں prime tdt
g prime tdt بذریعہ gtdx کی جگہ x کا انٹیگرل نکلتا ہے f تو یہ
میں تبدیل کرتا ہوں t سے x کا فارمولہ اگر میں آزاد متغیر کو fxdx تو انٹیگرل
کا f کے gtg prime t dt تو یہ انٹیگرل کے دوسرے فارمولے میں بدل جاتا ہے۔
کے انٹیگرل کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اب ہم f کے gt g prime t dt کو integral کے fx dx تو میں یہاں دوبارہ لکھوں گا
x کبھی کبھی ایسا بھی ہو سکتا ہے کہ ah وہ ڈمی ہیں اور اسی لیے t اور les of integrals x پہلے ہی بتا چکے ہیں کہ یہ متغیر
کے فعل کے طور پر x کو t کے طور پر منتخب کریں اس کا مطلب ہے کہ gx کو ah t کے طور پر منتخب کرنے کے بجائے ہم gt کو
کے طور پر اور پھر ہم اس آہ متبادل کے ساتھ آگے بڑھ سکتے ہیں جو t کے کچھ مخصوص فنکشن کو ہم بطور منتخب کر سکتے ہیں۔ x اس لیے
وقت کے ساتھ ساتھ واضح ہو جائے گا میں بہت آسان مثال لوں گا
کا انضمام معلوم کرنا ہے۔ لہذا ہم ابتدائی فارمولوں کے ذریعہ dx مربع x سے زیادہ ایک جمع x تو آئیے یہاں یہ مثال لیتے ہیں کہ ہم نے دو
اس انضمام کو فوری طور پر حاصل نہیں کرسکتے ہیں جو ہم پہلے ہی جانتے ہیں لیکن اگر آپ نے دیکھا کہ یہاں ڈینومینیٹر کی اصطلاح اگر آپ اس
میں فرق کرتے ہیں
ملے گا جو یہاں عددی اصطلاح کے برابر ہے اور اس لیے اگر آپ یہاں غور سے دیکھیں ڈیریویٹیو کو ڈیفرینشل سے ضرب کیا گیا x تو آپ کو 2
دوسرے ویری ایبل میں ڈیفرینشل لکھا جا سکتا ہے لہذا اگر میں اس فنکشن کو جی ایکس سمجھتا ہوں
تو یہ جی پرائم ایکس ڈی ایکس کے علاوہ کچھ نہیں ہے اور اس لیے میں اسے ایک نئے ویری ایبل میں تبدیل کر سکتا ہوں۔ ہم اسے کیسے کر
سکتے ہیں
dt کے برابر ہے تاکہ t مربع x مربع کے برابر کی وضاحت کریں یا کبھی کبھی ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ متبادل 1 جمع x کو 1 جمع t تو
کے برابر xdx دو dt میں تفریق اس لیے xdx بار ہے x مشتق کے برابر ہے جو کہ 2 dt تفریق کو ہم ہمیشہ اس انداز میں لکھتے ہیں
اور اب یہ فارم اس فارم میں تبدیل dt over t ہے اس متبادل کو دیے گئے انٹیگرل میں اس کو انٹیگرل کہتے ہیں جیسا کہ ہم حاصل کریں گے
میں تھا اس لیے x لیکن ہمارا مسئلہ plus constant کا لاگ ملے گا۔ mod t ہو گیا ہے جسے ہم پہلے سے جانتے ہیں اور اس سے ہمیں
کے برابر کریں c مربع جمع x کے برابر ایک جمع t کا متبادل بنائیں اسے لاگ آف t پر جانا ہوگا اور اس لیے x ہمیں واپس
کا تاکہ آپ آسانی سے دیکھ سکیں ax plus bdx تو یہ اس کیس کے لیے ہمارا حتمی انٹیگرل بن جائے گا سائن کی ایک اور سادہ مثال انضمام
کا انٹیگرل معلوم ہے لہذا اس انٹیگرل کو جانچنے کے لیے ہم sin t کو کچھ نئے متغیر کے طور پر لیتا ہوں، ہمیں ax plus b کہ کیا میں
جسے ہم a بذریعہ sin tdt برابر i کے برابر ہو اور انٹیگرل بن جاتا ہے adx dt کے برابر بدل دیتے ہیں تاکہ t کو ax plus b
کے ذریعے ڈالیں گے sin tdt یہاں ایک
کا مائنس cos t is کا اضافہ کریں گے جو آپ کو c کا ایک ضم کرنے کے علاوہ کچھ بھی نہیں ہے اور آخر میں ہم ایک مستقل sin t تو
سے تقسیم کیا جاتا ہے درحقیقت اس تعلق کو عام کیا جا سکتا ہے c کو ایک جمع ax plus b دے گا۔ ہمارے لیے پہلے سے ہی جانا جاتا ہے
ہوتی ہے ax plus b جسے ہم اپنی اگلی کلاس میں دیکھیں گے کہ اگر ہمیں ایک فنکشن دیا جاتا ہے جس کی لکیری اصطلاح
تو یہ ہمیشہ ہوتا ہے۔ اس فنکشن کے انٹیگرل کو مستقل سے تقسیم کیا گیا ہے لہذا ہم آج جو کچھ بھی سیکھا اس کا خلاصہ کریں گے لہذا ہم نے غیر
معینہ انٹیگرل کی خصوصیات سیکھیں ہم نے کچھ ابتدائی فارمولہ بھی سیکھا ہم نے سیکھا کہ سادہ انٹیگرل کی تشخیص کیسے کی جائے ہم نے تفریق
اور انضمام کی تکمیل بھی سیکھی اور آخر کار ہم متبادل کا بہت اہم طریقہ سیکھا آپ کا شکریہ