طلباء کا خیرمقدم کرتے ہیں لہذا اب تک ہم نے یقینی انٹیگرلز کے متبادل کا طریقہ دیکھا ہے اور ان خصوصیات کو استعمال کرکے ہم مختلف
انٹیگرلز کے بہت پیچیدہ مسئلے کو بہت آسان طریقے سے حل کرسکتے ہیں لہذا آئیے کچھ اور مثالیں آزمائیں اور دریافت کریں کہ ہم پیچیدہ مسائل
کو کس طرح آسان طریقے سے حل کر سکتے ہیں، آئیے ہم مثال کے طور پر ایک مثال لیتے ہیں، لہذا اگر میں آپ سے اس انٹیگرل کی گنتی کرنے
کو کہوں اور آپ اسے مختلف تکنیکوں سے انضمام کرنے لگیں
تو آپ کو پریشانی ہو سکتی ہے لیکن اگر یقینی انٹیگرل کی خصوصیات استعمال کریں
تو یہ ہو جاتا ہے۔ بہت آسان ہے لہذا آپ اس طرح سوچنے کی کوشش کر سکتے ہیں کہ چونکہ آپ کے پاس مائنس ٹو سے دو کی حدیں ہیں لہذا
اگر آپ کے پاس اس قسم کا ایک انٹیگرل ہے اور آپ جانتے ہیں کہ اگر فنکشن بھی ہے
ہو جاتا ہے۔ ایون فنکشن اور یہ طاق فنکشن کے لیے صفر ہو جاتا ہے اس لیے ہمیں پہلے یہ جاننے کی afxdx تو یہ صفر سے دو گنا صفر سے
یہ انٹیگرینڈ ہے fx کوشش کرنی چاہیے کہ آیا یہ انٹیگرینڈ طاق ہے یا پھر اگر
x تو چلو ہم اسے چیک کرتے ہیں کہ آیا یہ طاق ہے یا جفت، ہم یہاں پہنچیں گے آپ کو جمع کا نشان ملے گا کیونکہ یہ جفت طاقت ہے اور مائنس
ہے لہذا انٹیگرینڈ طاق فعل ہے لہذا قدر انٹیگرل کا fx مائنس f کا x ہے اس لئے ہم حاصل کر رہے ہیں کہ مائنس cos x cos x کی
کہنا ہے کہ میں صفر ہو گا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قطعی انٹیگرلز کی خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے آپ بہت آسانی سے انضمام کر سکتے
ہیں اور ایک بہت ہی پیچیدہ مسئلہ کے 0 ہونے کی قدر معلوم کر سکتے ہیں آئیے اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ایک اور مثال ایک نقطہ نظر لیتے
کے نیچے ضرب دے کر اسے عقلی بنانے کی کوشش کر سکتے ہیں اور پھر x مائنس کو جڑ 1 مائنس x ہیں۔ کیا آپ متعلقہ کنجوگیٹ کہے جڑ
اسے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں لیکن میں اس نقطہ نظر کو استعمال نہیں کروں گا میں یہ دیکھنے کی کوشش کروں گا کہ آیا ہم قطعی
مائنس afa سے afxdx 0 انٹیگرل کی خصوصیات استعمال کر سکتے ہیں یا نہیں یہ خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے یہ ہے کہ اگر 0 سے
کے برابر ہے xdx
xdx صفر کے برابر ہے صفر سے ون روٹ ایکس سوری روٹ ون مائنس ایکس روٹ ایک مائنس ایکس اور روٹ ون مائنس ون مائنس i تو
x dx یعنی صفر سے ایک جڑ کے نیچے ایک مائنس ایکس جڑ کے نیچے ایک مائنس ایکس جمع جڑ کے نیچے
تو اگر کہیں کہ یہ ہے 1 اور یہ 2 ہے اگر ہم ان دو مساوا
توں کو جوڑیں
ملتا ہے لہذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہندسہ اور ڈینومینیٹر ایک جیسے dx ملے گا اور صحیح ہمیں iتو ہمیں دائیں ہاتھ بائیں طرف ملتا ہے ہمیں 2
ہیں لہذا منسوخ ہو جائیں اور اس وجہ سے منسوخ ہو جائیں
ایک دو سے ایک ہے لہذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایسا لگتا ہے کہ مسئلہ بہت پیچیدہ ہے لیکن آپ بہت کر i تو ہمیں ایک ملتا ہے اور اس طرح
سکتے ہیں ڈیفینٹ انٹیگرلز کی خصوصیات کو استعمال کرکے اسے آسانی سے حل کریں آئیے ایک اور مسئلے کی مثال لیتے ہیں
سے بدل دیں قطعی انٹیگرلز کی خاصیت کا x کو ایک مائنس دو x اسکوائر sin تو اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ایک آسان طریقہ آپ
استعمال کرتے ہوئے
ہے اس لیے یہ فنکشن یکساں ہے اس لیے آپ x کا سائن اسکوائر سائن اسکوائر x تو آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ فنکشن برابر ہے یا طاق ، مائنس
اب ہمیں ایک اور پراپرٹی استعمال xdx اسکوائر sine کے دو بار لکھ سکتے ہیں۔ pi کو دو بار صفر سے pi اس انٹیگرل کو صفر سے
to pi by 2 sine square pi by 2 کے برابر ہے لہذا آپ اسے xdx 0 مائنس afa سے afxdx 0 کرنے دیں کہ 0 سے
ہے sin pi by two minus x دو pi by کے طور پر لکھ سکتے ہیں اس سے آپ کو دو گنا ملے گا۔ صفر سے minus x dx
cos x
ملتا ہے اگر آپ یہ ہیں xdx مربع cos تو اب آپ کو
تو کہتے ہیں یہ ایک ہے اور یہ دو ہے
بذریعہ دو سائن اسکوائر ایکس پلس کوس اسکوائر ایکس ڈی ایکس جو pi برابر دو بار صفر سے i تو پھر ایک اور دو کو جوڑ کر آپ کو دو ملے
کے برابر ہے لہذا pi برابر i ایک ہے جو ہم جانتے ہیں کہ ہم دو میں پائی بذریعہ دو حاصل کرتے ہیں لہذا انٹیگرل کی قدر ہے لہذا ہمیں دو
ہے دو کے ذریعے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک اور ایک اور بہت ہی خوبصورت استعمال میں دو خاص انٹیگرلز کا استعمال کیا pi انٹیگرل کی قدر
جا سکتا ہے جو ایک بہت ہی پیچیدہ مسئلہ کو حل کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے، آئیے ایک اور مثال لیتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ انضمام
یہ ہمیشہ کی طرح ایک بہت e کتنے آسان ہیں اگر آپ یقینی کے لیے فارمولہ استعمال کر سکتے ہیں۔ بالکل پہلے موقع پر صحیح طور پر انٹیگرلز
کے برابر ہے ہم xdx مائنس afa صفر سے afxdx ہی پیچیدہ مسئلہ لگتا ہے لیکن دوبارہ اس پراپرٹی کو استعمال کرتے ہوئے کہ صفر سے
cos pi by 2 جمع 3 4 sine pi by 2 minus x لکھ سکتے ہیں کہ میں یہ کہنا برابر ہو گا کہ یہ مساوات ہے 1 4 جمع 3
minus x dx
پر lhs اب دوبارہ ایک اور دو کا اضافہ کریں ہمیں sin xdx فور جمع تین cos x by اس لیے برابر ہو جائے گا لاگ آف 4 جمع 3 i تو
از چار جمع تین cos x جمع لاگ آف چار جمع تین cos x پر 4 جمع 3 sin x ملے اور دائیں طرف ہمیں ملتا ہے۔ لاگ آف 4 جمع 3 i دو
ہے لہذا اس کو استعمال کرکے آپ فوری طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ آپ کو mn لاگ log n جمع log m آپ کو معلوم ہے کہ xdx سائن
جو منسوخ ہو جاتا ہے x چار جمع تین سائن cos x x میں چار جمع تین cos x پر چار جمع تین x چار ملے ہیں۔ جمع تین گناہ
ہے صفر مجھے امید ہے کہ i اس لئے صفر ہے لہذا i کے دو لاگ کے ذریعے دو dx ایک pi برابر ملتا ہے صفر سے i تو آپ کو دو
پیچیدہ انٹیگرلز آئیے ایک aluate آپ یقینی انٹیگرلز اور ای وی کے ان خوبصورت فارمولوں کو استعمال کرنے کا طریقہ سیکھ رہے ہوں گے۔
اور مثال لیں یہ ہماری آخری مثال ہے پھر ہم لائن اور کریو کے درمیان کا علاقہ معلوم کرنے میں قطعی انٹیگرلز کے اطلاق کی طرف آگے بڑھیں
گے
پر لے جائیں تاکہ ہم انضمام میں استعمال کر سکیں اس قطعی انٹیگرل کو معلوم کرنے کے لیے حصوں کے ذریعے x کو پاور xe تو آئیے اس
اگر ہم کہتے ہیں کہ یہ ہمارا فنکشن پہلے ہے اور یہ ہمارا فنکشن سیکنڈ ہے
تو پارٹ انٹیگریشن سے ہم سیکنڈ کے انضمام میں پہلا فنکشن حاصل کرتے ہیں
ہے xdx سے پاور e برابر ایک منفی صفر کے برابر ملتا ہے۔ پہلے کا ایک تفریق آپ کو ایک دے گا اور انضمام x برابر صفر سے x تو ہمیں
صفر سے ایک ہے x پاور e انٹیگریشن ملتا ہے اس کا x سے پاور e لہذا ہمیں ایک مائنس صفر مائنس
ملتا ہے۔ صفر کی طاقت جو کہ ای مائنس ای پلس ون ہے e مائنس e مائنس صفر مائنس e تو ہمیں
تو جواب ایک ہے
تو یہ اختتام نہیں ہے ہم بعد میں مزید پیچیدہ مسائل کو اٹھائیں گے متفرق مشقیں ہوں گی جہاں ہم ان تمام پی آر کو دوبارہ استعمال کریں گے۔ اس وقت
کے لیے بہت سے پیچیدہ قطعی انٹیگرلز کو آپریٹ کرتے ہیں اور حل کرتے ہیں آئیے اپنے پہلے ہی لیکچر میں ڈیفینٹ انٹیگرلز کا اطلاق شروع
کرتے ہیں ہم نے کئی مسائل پر بات کی ہے جہاں ہم نے کئی معاملات پر بات کی ہے ایک لکیر کے درمیان جکڑے ہوئے علاقے اور دو منحنی خطوط
کے درمیان گھماؤ والے علاقے کے درمیان جکڑے ہوئے تین منحنی خطوط اور اسی طرح کے درمیان ہم ان تمام صور

توں کو ایک ایک کر کے لے جائیں گے یہاں سے آئیے ہم سادہ لعنت کیس ایک کے تحت رقبہ لیں
کے یہ n برابر ہے x کا کچھ فعل ہے جو ہمیشہ رہتا ہے۔ مثبت یہ لائن x محور ہے اور یہ x محور ہے یہ y تو فرض کریں کہ یہ آپ کا
ہے y کے برابر fx ہے صفر کے برابر ہے اور یہ وکر آپ کو معلوم ہے کہ یہ y یہ لائن b برابر ہے x نو
تو رقبہ کیسے معلوم کیا جائے
تو ہم نے آپ کو کیا کیا جان لیں کہ ہم نے اسے کئی انتہائی پتلی مستطیلوں میں صحیح طور پر تقسیم کیا ہے لہذا ہم اس معاملے میں ایک مستطیل
ہوگی لہذا ابتدائی پٹی یا مستطیل y ہوگی اس مستطیل کی اونچائی y کے طور پر لے سکتے ہیں اور اس مستطیل کی اونچائی dx کی چوڑائی کو
اب چوڑائی ہے اگر آپ اس میں ہیں dx ہے اونچائی ہے اور dxy میں y کا رقبہ
b کے برابر ہوتا ہے x سے a سے ضم کرتے ہیں x کو da ابتدائی رقبہ ہے لہذا اگر آپ اس dada تو آپ کے پاس یہ ابتدائی علاقہ ہے
کے برابر ہوتا ہے۔ یہ آپ کو مطلوبہ رقبہ فراہم کرتا ہے مجھے اس کا سایہ کرنے دیں تاکہ مطلوبہ رقبہ یہ آپ کو مطلوبہ رقبہ دے گا جو چار
صفر کے برابر ہے y اور b کے برابر ہے fxx منحنی خطوط کے درمیان بند ہے
اب ایسے معاملات ہیں جہاں یہ چال کام نہیں کرے گی مثال کے طور پر اگر آپ a to bydx تو یہ آپ کو مطلوبہ رقبہ دے گا ایک فارمولا ہے
c برابر ہے y کے لحاظ سے دیا گیا ہے اور رقبہ دو افقی لکیروں کے درمیان بند ہے کہیے کہ y کو x کے پاس اس طرح کا وکر ہے جہاں
کے لیے پھر آپ انٹیگرل کا اندازہ کیسے کریں گے d کے برابر y سے
تو رقبہ کو عمودی پٹیوں سے تقسیم کرنے کے بجائے ہم رقبہ کو افقی پٹیوں سے تقسیم کرتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ اس مستطیل ایلیمنٹری
ہے جو کہ xdy ہوں گے لہذا ابتدائی رقبہ x ہے۔ اس پٹی میں سے آٹھ اس مساوات کے تحت h اور dy مستطیل ابتدائی پٹی کی چوڑائی
کے برابر کرتے ہیں d کے برابر y سے c کے برابر y ہمارا ابتدائی رقبہ ہے اب اگر ہم اسے
تو ہمیں مطلوبہ رقبہ مل جاتا ہے
کے برابر ہے dxdy کے برابر ہے y سے c ہوگا۔ y تو اس صورت میں فارمولا
ایکسس سے نیچے ہے x تو یہ کیس دو تھا آئیے کیس تھری دیکھیں جہاں آپ کا فنکشن
کے برابر ہے اور یہ مطلوبہ رقبہ ہے x b کے برابر ہے یہ لینڈ لائن ہے x تک تمام منفی ہے یہ لائن b سے a ہے جو fx تو یہ آپ کا
کی پوری قیمت میں منفی ہوگا لہذا مطلوبہ fx a ہوگا لیکن چونکہ bfxdx سے a لہذا اسی طرح کی منطق کے ذریعہ ایک بار پھر فارمولہ
علاقے کے لئے آپ کو حتمی قیمت کا ماڈیولس لینا ہوگا لہذا مطلوبہ علاقہ اب ایک اور کیس لیتے ہیں جہاں فنکشن پوری طرح منفی نہیں ہے یا
پورے مثبت میں نہیں ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ اپنا نشان بدلتا ہے پھر کیا ہوگا
محور ہے اور آپ کے پاس ایک فنکشن ہے جو اس کے x محور ہے یہ آپ کا y تو آئیے ہم کیس 4 لیتے ہیں جہاں آپ کا فنکشن ہے یہ آپ کا
ہے لہذا آپ اس فنکشن کے c محور کے ساتھ x کے چوراہے کا یہ نقطہ fx اور فنکشن b یہ ہے a نشان کو تبدیل کر رہا ہے کہ یہ ہے
محور کے برابر ہے لہذا اس معاملے میں کل x اور x b کے برابر ہے اور x a علاقے کو تلاش کرنا چاہتے ہیں جس کے درمیان پابند ہے
سے a میں ضم کرنے سے حاصل نہیں ہو سکے گا لہذا آپ کو انضمام کرنا پڑے گا اور کہنے کا رقبہ b سے a آپ کو براہ راست a رقبہ
تک ضم کر کے رقبہ ایک دو حاصل کرتے ہیں d سے c سے حاصل کرنا ہوگا۔ یہ ایک ہے اور یہ رقبہ دو ہے اور آپ اسے c
b سے c چونکہ فنکشن b سے c ہے b سے c تک منفی ہے معذرت افسوس d سے fx c تو کل رقبہ مطلوبہ ایک مثبت ہوگا کیونکہ
ایک دو کا ایک پلس موڈ ہوگا اب آئیے ہم ان تمام حقائق کو استعمال کریں اور شروع میں کچھ a دو منفی ہوں گے لہذا کل رقبہ a تک منفی ہے لہذا
مربع مربع کے برابر ہے y مربع جمع x بہت ہی آسان مسائل کو حل کریں مثال کے طور پر کہتے ہیں۔ ایک دائرے کا رقبہ معلوم کریں
x محور ہے اور دائرہ یہ ہے لہذا آپ جانتے ہیں کہ دائرہ x محور ہے اور یہ آپ کا y محور ہے معذرت یہ آپ کا x یہ آپ کا th تو اگر
محور دونوں کے بارے میں ہم آہنگ ہے لہذا دائرے کا کل رقبہ بھی ہم آہنگ ہے لہذا اگر ہم اندازہ کریں اس رقبے کو پھر ہم اسے چار سے y اور
ضرب دے سکتے ہیں
تو اگر یہ رقبہ اتنا کل رقبہ ہے
تو کل رقبہ اس دائرے کا رقبہ 4 گنا ہے جو پہلے کواڈرینٹ میں پڑا ہے
تو 4 میں کیسے حاصل کیا جائے
ہے y لمبائی کی عمودی پٹی کھینچیں جس کی اونچائی dx تو
کی قدر 0 سے شروع ہوگی x یہاں سے یہاں تک جاتا ہے لہذا دائرے کا مرکز 0 0 ہے اور یہ نقطہ ایک کوما 0 ہوگا لہذا ydxx ہو گا a تو
کے برابر جمع منفی جڑ کے نیچے ایک y کی قدر کی گنتی کی جائے گی۔ دائرے کی مساوات سے آپ کو ملے گا y پر جائے گی اور a اور یہ
کی دو قدریں ملیں گی y کی ہر قدر کے لیے آپ کو x مربع اس طرح x مربع مائنس
برابر ہے 4 گنا s 0 محور اور منفی قدر آپ کو نچلی شاخ دے گی۔ x کی مثبت قدر آپ کو دائرے کی اوپری شاخ دے گی جو اوپر ہے y تو
a صفر سے x ہے لہذا x اب اس کا انضمام آپ کو معلوم ہے لہذا آپ براہ راست قیمت ڈال سکتے ہیں یہ dx مربع x مربع مائنس aa سے
پر جاتا ہے اب آپ کو حاصل ہونے والی بالائی اور نچلی حدود کی قدریں ڈالیں
مائنس 0 پر ہے pi by 2 پر یہ اس اصطلاح کی وجہ سے 0 ہوگا اور یہ اصطلاح آپ کو 1 بائے 2 ایک مربع سائن انورس 1 دے گی جو a تو
صحیح ہے x یہ
کی وجہ سے 0 ہوگا۔ آپ کو یہاں صفر ملے گا اور پھر صفر کے گناہ پر الٹا صفر صفر ہوگا x تو 0 پر یہ
تو آپ کو صفر ملے گا
مربع اب ہم نے یہ حساب عمودی پٹی لے کر کیا ہے وہی چیز افقی پٹی لے کر بھی کی جاسکتی ہے pi a تو حتمی جواب ہے
تو آئیے دیکھتے ہیں اسے دائرے کے لیے کیسے کرنا ہے
تو آئیے ہم دوبارہ دائرہ کھینچتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ افقی پٹی کا استعمال کرکے اسے کیسے کرنا ہے آئیے ہم اس افقی پٹی کو لیتے ہیں جس کی
دائرے کی مساوات کے تحت چلتی ہے x ہے اور لمبائی ty چوڑائی
ہم اس برانچ کو استعمال کر رہے ہیں ce مربع گناہ y مربع مائنس a کرے گا۔ اس صورت میں ہو پلس مائنس انڈر روٹ x تو
کے xdy کی مثبت ویلیو لے لی جائے گی منفی ویلیو دائرے کی اس برانچ کو دے رہی ہے اس لیے دائرے کا کل رقبہ مطلوبہ رقبہ چار گنا x تو
کی حدود کیا ہیں y برابر ہے اب
a تو یہ پوائنٹ ہے 0 کوما 0 اور یہ پوائنٹ 0 کوما ہے
a صفر سے جاتا ہے اور یہ صفر کوما پر جاتا ہے y تو
کی قدر کو مثبت لیا جائے گا کیونکہ آپ مثبت طرف ہیں لہذا اس شاخ کے لئے 0 سے ایک انڈر روٹ مربع x پر جاتا ہے اور a صفر سے y تو
مربع جمع 1 بائی 2 ایک مربع سائن y انڈر روٹ ایک مربع مائنس y دوبارہ اسی فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے 1 بائی 2 dy مربع y مائنس
پر جاتا ہے a سے ay 0 بذریعہ y انورس
دے گا اور 0 پر یہ 0 ہوگا اور صفر پر دوبارہ صفر ہوگا pi by 2 ایک مربع x 2 پر یہ آپ کو 1 a پر یہ 0 ہوگا اور a تو پھر

Prutor@IITK

b مربع بذریعہ y مربع کا رقبہ معلوم کریں۔ بذریعہ مربع جمع x مربع ملے گا آئیے ایک اور مثال لیں اور بیضوی pi a تو آپ کو دوبارہ
محور y اور x دوبارہ کچھ ایسا ہی نظر آئے گا کیونکہ یہ بیضوی wi سے بڑا ہے لہذا یہ بیضوی a b مربع ایک کے برابر ہے جہاں
دونوں کے حوالے سے ہم آہنگ ہے اس لیے ہم رقبہ کا صرف ایک چوتھائی شمار کر سکتے ہیں اور پھر اسے 4 سے ضرب کر کے کل رقبہ حاصل
کر سکتے ہیں
اگر آپ عمودی پٹی کا استعمال کرتے ہیں a تو کل رقبہ اس رقبہ کا 4 گنا ہو گا ۔ اور یہ علاقہ
یہاں سے یہاں تک قدریں لے جائے گا لہذا اس بیضوی کے لئے یہ مرکز صفر صفر ہے یہ کوما x کے ذریعہ دیا جائے گا جہاں ydx تو دوبارہ
کم از کم 0 ہے اور زیادہ x ہے اس لیے اس خطے کے لیے b صفر ہے یہ مائنس کوما صفر ہے یہ صفر کوما مائنس بی ہے اور یہ صفر کوما
ہے a سے زیادہ
کی قیمت حاصل ہوتی ہے اسے ہونٹوں کی مساوات سے حاصل کریں اور اسے حاصل کرنے کے لیے آپ کو اسے حل کرنے ay تو ہمیں 0 سے
b جمع مائنس y مربع بذریعہ مربع اس لئے x جڑ کے نیچے ایک مائنس b کے برابر جمع مائنس ملے y کی ضرورت ہے تاکہ آپ کو
کی دو قدریں مل رہی ہیں لیکن چونکہ آپ فہرست کا وہ حصہ استعمال y کی ہر قدر کے لئے آپ کو x مربع ہے لہذا x بذریعہ ایک مربع مائنس
محور کے اوپر لیٹا جائے x کر رہے ہیں جو ہے اسے
تو آپ مثبت لے رہے ہوں گے۔ نشان کریں
dx مربع x مربع مائنس a under root a حاصل ہوتا ہے بذریعہ b تو ہمیں
مربع x 2 a مربع جمع 1 x مربع مائنس a جڑ کے نیچے x کے برابر ہے ایک بذریعہ دو b ملتا ہے جو کہ چار a تو ہمیں صفر سے
مربع جمع ایک بذریعہ دو ایک x جڑ کے نیچے ایک مربع مائنس x اس لیے کل رقبہ چار ب بذریعہ ایک بذریعہ دو inverse x by سائن
بذریعہ ایک x مربع سائن الٹا
تو چار ب بذریعہ ایک انچ آٹھ یہ صفر ہوگا اور یہ آپ کو ایک بائے ایک دے گا۔ دو ایک مربع پائی بذریعہ دو مائنس صفر صفر منفی صفر کیونکہ صفر
حاصل کرتے ہیں اسی طرح یہ ہم نے عمودی پٹی ab بذریعہ چار پائی pi بذریعہ ایک مربع b پر یہ صفر ہے اور یہ بھی صفر ہے لہذا ہم چار
کے ذریعے کیا ہے آئیے ہم اسے استعمال کرکے کرتے ہیں۔ افقی پٹی افقی پٹی
b ہے یہ نقطہ صفر ہے x ہے اور لمبائی dy تو آئیے ہم بیضوی کو دوبارہ کھینچتے ہیں اس بار افقی قدم اٹھا رہے ہوں گے جس کی چوڑائی
کے لئے حل کرنا ہے x یہ کوما صفر ہے یہ مائنس کوما صفر ہے بیضوی اب آپ کو b یہ نقطہ صفر ہے مائنس
مربع b ہے۔ مربع بذریعہ y مربع بذریعہ مربع ایک مائنس x تو
جڑ کے نیچے x مربع ہے لہذا چونکہ ہم بیضوی کا یہ حصہ لے رہے ہیں لہذا v مربع بذریعہ y جمع مائنس جڑ کے نیچے ایک مائنس x تو
تک جاتا ہے bxdy ہے 0 سے y مثبت ہوگا اور مطلوبہ رقبہ بیضوی کا رقبہ چار گنا ہے اس رقبہ کا چار گنا ہے جو کہ
dy مربع y مربع مائنس a by b under root b ملتا ہے bx تو ہمیں 4 گنا 0 سے
مربع سائن الٹا v مربع جمع ایک بذریعہ دو y مربع مائنس a by b one by two y under root b تو اس انٹیگرل کی قدر ہے چار
b سے 0 b بذریعہ y
دو منفی صفر ہے پھر یہ صفر ہے pi x مربع b پر یہ ایک بذریعہ دو b پر 0 جمع ملے یہ صفر ہے پھر b تو آپ کو
ملے گا۔ عمودی اور افقی دونوں پٹیوں کا استعمال کرتے ہوئے رقبہ اور دائروں کی ان دو مثالوں کے ساتھ آپ دیکھ سکتے ہیں pi ab تو آپ کو
کہ سادہ منحنی خطوط کے رقبے کی گنتی کیسے کی جاتی ہے، آئیے ہم صورت حال کو پیچیدہ بناتے ہیں اور ہمیں ایک لکیر کے درمیان بند علاقے
مربع کے nd y x کے برابر ہے۔ a کے درمیان بند رقبہ ایک y اور واقع ہونے کا پتہ دیتے ہیں، اس سلسلے میں ہم مثال لیتے ہیں۔ ایک
برابر ہے
تو آئیے پہلے ان دونوں کو پلاٹ کریں
محور کے م x ایک کے برابر ہے y تو
مربع کے م y x توازی ایک افقی لکیر ہے اور
محور ہے لہذا مطلوبہ رقبہ یہ ہے لہذا ہم یہاں افقی پٹی کا استعمال کر سکتے y توازی ہے پیرابولا ہے جس کا ورٹیکس صفر صفر ہے اور محور
محور کے بارے میں ہم آہنگی ہے لہذا مطلوبہ کل رقبہ سبز سے سایہ y مربع کے برابر ہے y x ہیں لہذا آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ
a شدہ رقبہ کے دو گنا کے برابر ہے کہے کہ رقبہ کا دو گنا
تو میں استعمال کروں گا۔ افقی پٹی
ہے x ہے اور اس پٹی کی اونچائی dy تو ہم حاصل کرتے ہیں یہ
کی قدریں یہاں سے یہاں تک رکھیں y ملتا ہے اس افقی پٹی کا رقبہ ہے اور پھر کل رقبہ ہوگا اگر آپ xty تو ہمیں
صفر سے جاتا ہے۔ صفر ہے اور یہ ایک پر جاتا ہے y تو
کی قدر پیرابولا کی مساوات سے چلتی ہے کیونکہ افقی مرحلہ پیرابولا پر ختم ہوتا ہے x ہے لہذا y جڑ x ایک کے برابر ہوتا ہے اب y تو
لہذا اس پٹی کی اونچائی فنکشن ویلیو کے ذریعہ کنٹرول ہوتی ہے۔ پیرابولا سے
oot y ہے۔ r اس لیے x تو
ملتا ہے ydy تو آپ کو 0 سے 1 روٹ
2 تو y 3 طاقت سے by 2 by 3 by 2 0 to 1
ملتے ہیں اب ہم اسے عمودی پٹیوں کے ذریعے کرتے ہیں by three تو آپ کو چار
تو عمودی پٹیوں یا عمودی ایلیمینٹری ایریا ایلیمنٹری کا استعمال کرتے ہوئے ابتدائی مستطیلات
مربع کے برابر ہے لہذا اگر آپ y x ایک کے برابر ہے یہ y محور ہے یہ x محور ہے یہ آپ کا y تو میں اسے دوبارہ کھینچتا ہوں یہ آپ کا
عمودی قدم اٹھائیں گے
تو کیا مسائل ہوں گے اگر آپ عمودی پٹی لیں گے
کو یہاں سے یہاں تک ضم کرکے دینے سے ہوتا ہے یا اسے 2 سے ضرب دینے سے بھی دوگنا کرنے سے آپ کو مطلوبہ y dx تو کیا ہوگا
اگر آپ اس پیرابولک ریجن کے لیے اپلائی کرتے ہیں y dx رقبہ نہیں ملے گا کیونکہ
تو آپ کو یہ رقبہ ملے گا جو مطلوبہ رقبہ نہیں ہے
تو استعمال کیسے کریں؟ یہ عمودی پٹی رقبہ کی گنتی کرنے کے لیے یہ دیکھنے کے لیے کہ آئیے ہمیں دوبارہ اعداد و شمار کھینچیں
تو ہم کیا کر سکتے ہیں کہ ہم اتنا مطلوبہ رقبہ کر سکتے ہیں کیا یہ رقبہ مائنس ہے
تو مطلوبہ رقبہ سرخ رنگ سے سایہ دار رقبہ ہے اور مائنس کا رقبہ سبز رنگ سے سایہ دار ہے۔ کی طرف سے سایہ دار علاقے سرخ ہو جائے
x برابر ہے y کو ایک کے برابر حل کریں گے اور y جاتا ہے سے آپ کو یہ قیمت معلوم کرنی ہوگی اور اس کے لیے آپ ydxx گا برابر
کے برابر جمع مائنس ون دے گا x مربع جو آپ کو
DrTutor@IITK

تو یہ x اور یہ x ایک کے برابر ہے مائنس ون کے برابر ہے
پھر مائنس 1 سے 1 تک جاتا x dx y برابر 1 مائنس مائنس y لائن سے آرہا ہے y تک ہوگا کیا یہ y تو مستطیل کا رقبہ مائنس ون سے ایک مائنس مائنس ایک سے ایک dx ہے پیرابولا سے حساب کیا جا رہا ہے لہذا آپ کے پاس مطلوبہ رقبہ ہے مائنس ایک سے ایک ایک y ہے لیکن یہ dx مربع x
مکعب تین مائنس ایک سے ایک x تو یہ برابر ہے دو مائنس
تو دو مائنس دو بائی تین جو دوبارہ برابر ہے پچھلے حساب سے چار سے تین برابر ہے لہذا آہ مستطیل کے علاقے کے اس رقبے کی گنتی کرنے کے لیے ہم نے یہ پٹی لی ہے اور آہ کے اس علاقے کی گنتی کرنے کے لیے جو پیرابولا کے نیچے واقع ہے، ہم نے یہ مستطیل عمودی پٹیاں لی میں گھٹانے کے لیے اور اصل رقبہ جو عمودی پٹیوں کے طریقہ کار کو استعمال کرتے ہوئے g ہیں اور اس لیے ہمارے پاس ہے دو علاقوں کو 0 y کے برابر ہے اور x مربع کے درمیان جکڑا ہوا رقبہ دو مائنس xy برابر y یہ ہے آئیے ہم ایک اور مثال لیتے ہیں اور پھر مثال یہ ہے کہ کے برابر ہے جو کہ پہلے کواڈرینٹ میں ہے
کے برابر ہے ایک پیرابولا ہے جس کا ورٹیکس دو کوما x مربع دو مائنس y کے برابر ہے یہ لائن ہے اور x y تو آئیے ہم ڈرا کرتے ہیں۔ یہ برابر ہے صفر y صفر ہے لہذا ہمارے پاس اس قسم کی صورتحال ہے اور مطلوبہ رقبہ یہ ہے وہ لائن ہے جس لائن کے درمیان کا رقبہ پارابولا تک اور جو پہلے کواڈرینٹ میں پڑا ہے اس لیے اس انٹیگرل کو حل کرنے کے لیے ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ یہ دو کوما صفر ہے یہ صفر صفر برابر ہے x ہے ہمیں ان دو پوائنٹس کا کوآرڈینیٹ معلوم کرنا ہوگا لہذا ہم اسے حل کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ
تو یہ ایک کوما صفر ہے اور یہ ایک کوما ایک ہے
تو کل رقبہ درکار ہے ایک ہے ایک جمع دو ایک ایک یہ علاقہ ایک دو یہ علاقہ ہے
کے برابر x y تک جاتا ہے اور ایک دو کے لیے یہ ایکس حد ایک سے دو تک ہوگا یہ ydx کے ذریعہ دیا جاتا ہے 0 سے 1 جمع ydxx تو ایک جمع ایک سے دو xdx کے برابر ہے لہذا کل رقبہ درکار ہے ایک جمع ایک دو ایک ایک صفر سے ایک x جڑ کے نیچے دو مائنس y ہے اور یہ تین بذریعہ دو بذریعہ تین بذریعہ دو مائنس x مربع صفر کے برابر ہے ایک جمع دو مائنس x یہ ایک بذریعہ دو xdx جڑ کے نیچے دو مائنس ایک سے دو
تو ہم ایک بائے دو مائنس صفر جمع دو پر یہ صفر ہوگا
تو صفر مائنس ایک پر یہ ایک ہوگا
تو مائنس دو بہ تین
تو کل رقبہ ایک بذریعہ دو جمع دو تین سے سات ضرب چھ آج ہم نے دیکھا کہ سادہ منحنی خطوط کا رقبہ کیسے معلوم کیا جاتا ہے اور ہم نے حلقوں کے بیضوی رقبہ کی گنتی کی ہے اور پھر ہم چھوٹے پیچیدہ معاملات کی طرف بڑھتے ہیں جہاں ہم میں نے دیکھا ہے کہ ایک منحنی خطوط اور لکیر کے درمیان جکڑے ہوئے علاقے کے رقبے کی گنتی کیسے کی جائے اس زمرے میں کچھ اور مسائل باقی رہ گئے ہیں جہاں ہم ایک وکر اور ایک لکیر کے درمیان بند خطہ کا علاقہ تلاش کر رہے ہیں اور مزید پیچیدہ مثالیں مزید کلاسوں میں لی جائیں گی شکریہ آپ آپ

Prutor@IITK