آج ہم یقینی انٹیگرلز کے بارے میں جاننے جا رہے ہیں جہاں تک قطعی انٹیگرلز کی تاریخ کو سمجھا جاتا ہے دو ریاضی دانوں کی شراکت غیر
معمولی رہی ہے ایک ریمن ایک جرمن ریاضی دان دوسرا فرانسیسی ریاضی دان لیبیگ ہے میں اپنے تمام طلباء سے درخواست کرتا ہوں کہ ان دونوں
کے بارے میں زیادہ سے زیادہ سیکھیں ۔ حوصلہ افزائی کریں آئیے دیکھتے ہیں کہ قطعی انٹیگرلز کی ایپلی کیشنز کیا ہیں لہذا یقینی انٹیگرلز کی کئی
ایپلی کیشنز ہیں مثال کے طور پر آپ قطعی انٹیگرلز کا استعمال کروڈ کی سطح کے پلانر ریجن ایریا کے منحنی رقبے کی لمبائی کی گنتی کے لیے
کر سکتے ہیں مثال کے طور پر ایک کرہ حجم کا سطحی رقبہ کرہ ماس وغیرہ کا حجم مثال کے طور پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قطعی انٹیگرلز کی
بہت سی ایپلی کیشنز ہیں اس لیے میں نے یہ سمجھنے کے لیے ایک مثال کے طور پر رقبہ لیا ہے کہ قطعی انٹیگرلز سے ہمارا کیا مطلب ہے تاکہ
آپ کو پہلے کی کلاسوں سے معلوم ہو کہ آپ سادہ کے رقبے کی گنتی کر سکتے ہیں۔ مثلث مستطیل دائرہ وغیرہ جیسی شکلیں اور اگر آپ کی شکل
پیچیدہ ہے مثال کے طور پر اگر آپ سے ایریا کا اندازہ کرنے کو کہا جائے اس شکل میں آپ اس علاقے کو محدود تعداد میں سادہ شکلوں میں توڑ
سکتے ہیں اور پھر آپ ان تمام سادہ شکلوں کے انفرادی علاقوں کی گنتی کر سکتے ہیں اور اس کا خلاصہ کر سکتے ہیں کہ اصل رقبہ یہ مطلوبہ
رقبہ ہے لیکن اس پیچیدہ علاقے کو توڑنے کا تصور سادہ شکلیں ہمیشہ لاگو نہیں ہوتی ہیں مثال کے طور پر حقیقی زندگی کے بہت سے مسائل ہیں
اور کئی ریاضیاتی مسائل ہیں جن میں آپ کے پاس ایسی شکلیں ہوں گی جنہیں ہم شکلوں کی محدود تعداد میں تقسیم نہیں کر سکتے جن کا رقبہ آپ
کو معلوم ہے لہذا ہم کچھ ایسی مثالیں دیکھیں گے جہاں آپ نہیں کر سکتے۔ رقبہ کو ان شکلوں کی محدود تعداد میں تقسیم کریں جس کا رقبہ آسانی
مربع لیں، آئیے ہم x کے برابر y کے برابر 1 اور y سے شمار کیا جا سکتا ہے لہذا رقبہ ایک لکیر اور ایک وکر کے درمیان پابند ہے آئیے ہم
انہیں پلاٹ کریں

مربع کے متوازی ایک پیرابولا ہے جس کا y x محور کے متوازی ایک لائن ہے اور x مساوی 1 y محور ہے۔ x محور ہے یہ y تو یہ آپ کا
محور ہے لہذا اگر آپ اسے پلاٹ کرتے ہیں y ورٹیکس 0 0 ہے اور محور

تو آپ کو یہ مل جاتا ہے لہذا آپ کا مطلوبہ علاقہ ہے میں تمام طلباء سے درخواست کرتا ہوں کہ دیکھیں کہ آیا یا وہ اسے محدود تعداد میں شکلوں
دو منحنی خطوط کے y میں توڑ سکتے ہیں جن کا رقبہ آپ کو معلوم ہے کوشش کریں آئیے کچھ اور مثالیں دیکھیں مثال کے طور پر دو رقبہ
محور x محور ہے۔ یہ آپ کا y کے برابر ہے آئیے ہم ان کو پلاٹ کریں یہ آپ کا x مربع y مربع کے برابر اور x درمیان جکڑے ہوئے ہیں
محور ہے x مربع ہے ایک پیرابولا ہے جس کا ورٹیکس 0 0 ہے اور محور x برابر y ہے لہذا

ہے محور x کے برابر ہے پھر ایک پیرابولا ہے جس کا ورٹیکس 0 0 ہے اور محور x مربع y برابر y تو آپ کے پاس یہ پیرابولا ہے اور
تو آپ کے پاس یہ پیرابولا ہے اور یہ وہ علاقہ ہے جو ان کے درمیان پابند ہونا ضروری ہے آئیے ہم کچھ مزید مثالیں دیکھتے ہیں جو حوصلہ افزائی
x ہے جڑ دو y کرتے ہیں کہ ہمیں قطعی انٹیگرل کی ضرورت کیوں ہے لہذا تین منحنی خطوط کے درمیان رقبہ جکڑا ہوا ہے لہذا ایک منحنی
جڑ کے y دو کے برابر ہے آئیے ہم ان کو پلاٹ کریں تاکہ x مربع کے برابر ہے اور ایک لائن x مائنس x ہے جڑ کے نیچے دو y دوسرا
مربع کے برابر ایک دائرہ ہے آپ اس مساوات کو درج ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں تاکہ آپ دیکھ سکیں یہ ایک دائرہ ہے جس x مائنس x نیچے دو
کا مرکز ایک کوما صفر اور رداس ایک ہے۔ لہذا آپ کو دائرے کا رداس ایک کوما صفر مرکز میں ایک کوما صفر رداس ایک مل جائے گا آئیے ہم پلاٹ
محور ہے لہذا آپ کو یہ پیرابولا x پیرابولا ہے جس کا ورٹیکس 0 0 ہے اور محور x برابر ہے جڑ کے 2 x y مساوی ہے جڑ دو y کریں
برابر ملتا ہے۔ ٹو 2 ایک لکیر ہے کیونکہ اس نقطہ کا یہ نقاط 2 کوما 0 ہے۔ لہٰذا یہ لکیر اس نقطہ پر دائرے کی مماس ہوگی لہذا یہ مطلوبہ x اور
علاقہ ہے یہاں نوٹ کرنے کی بات یہ ہے کہ یہ پیرابولا دائرے کو کاٹنے والا نہیں ہے۔ صفر کوما صفر کے علاوہ کہیں اور جو کہ واضح ہے
مربع اگر آپ ان دونوں کو حل x مائنس x مساوی ہے دو جڑ کے نیچے دو y کے برابر حل کرتے ہیں اور x مساوی کو جڑ دو y اگر آپ
کرتے ہیں

تو آپ دیکھیں گے کہ صرف صفر کوما صفر پر ایک دوسرے کو کاٹتا ہے لہذا میں دوبارہ درخواست کرتا ہوں۔ میرے تمام طلباء یہ دیکھنے کے لیے
کہ آیا وہ اس علاقے کو محدود تعداد میں شکلوں میں تقسیم کر سکتے ہیں اور اس علاقے کا رقبہ حاصل کرنے کے لیے اسے شامل کر سکتے ہیں
یہ آخری مثال سب سے پیچیدہ ہے اور میں آپ کو بتاتا ہوں کہ میں یہ مثالیں کیوں دے رہا ہوں کہ آخر میں ہم ان تمام مسائل کو حل کریں گے اور
دیکھیں گے کہ یہ کیسے ہیں ۔ مسائل کو قطعی انٹیگرلز کے ذریعے سنبھالا جا سکتا ہے لہذا حتمی مثال چار منحنی خطوط کے درمیان بند رقبہ ہے
مربع کے برابر لیا x سولہ y مربع کے برابر اور x چار xy مربع کے برابر سولہ x y مربع برابر چار y اور میں نے چار پیرابولاس
مربع 16 y کے برابر ہے اور x مربع چار y محور ہے لہذا x محور ہے یہ آپ کا y ہے لہذا اگر آپ پلاٹ ان سے کہتے ہیں کہ یہ آپ کا
x کے برابر ہے ان کے vertex 0 0 اور vertex 0 0 اور axis x axis ہیں

مربع کے برابر ہے وہ دوبارہ پیرابولاس ہیں لیکن جن کا x سولہ y مربع کے برابر ہے اور x ملیں گے۔ چار y تو آپ کو یہ دو پیرابولاس اور
کے برابر ہے x مربع چار y محور ہے لہذا آپ کو یہ دو پیرابولاس ملیں گے اور اس طرح یہ آپ کا y ورٹیکس صفر صفر ہے اور محور
مربع کے برابر ہے لہذا یہ ایک خطہ ہے پھر میں آپ سب سے درخواست کرتا ہوں x سولہ y کے برابر ہے مربع اور یہ x چار y معذرت
کہ کیا آپ اسے محدود تعداد میں شکلوں میں توڑ سکتے ہیں جس کا رقبہ آپ کو معلوم ہے اور آخر میں آپ اس علاقے کو معلوم کے حساب سے
شمار کر سکتے ہیں۔ پہلے کی کلاسوں کے طریقے اور یہ تمام مثالیں جو میرے پاس ہیں۔ ای اب تک زیر بحث ہے ہم آخر میں دیکھیں گے اور ہم
یقینی انٹیگرلز کا استعمال کرکے حل کریں گے اور مطلوبہ رقبہ کی گنتی کریں گے لہذا آئیے ایک قطعی انٹیگرل کی وضاحت کریں ایک قطعی انٹیگرل
کو اوپری کہا جاتا ہے۔ حد اور یہ فنکشن کے علاقے کی نمائندگی کرتا ہے b کو نچلی حد اور a کی وضاحت اس شکل میں کی گئی ہے جہاں
مثبت ہے لہذا اگر آپ اسے پلاٹ کرتے ہیں fx آئیے فرض کریں کہ

اس لئے یہ یقینی انٹیگرل اس کی نمائندگی b کے برابر ہے x یہ a کے برابر ہے x محور آپ کا فنکشن ہے یہ x محور ہے یہ y تو یہ
کرتا ہے۔ ایریا اب سوال یہ ہے کہ اس قدر کی گنتی کیسے کی جائے، ایک حساب کرنے کے دو طریقے ہیں ایک محدود رقم کی حد سے اور دوسرا
اینٹی ڈیریویٹوز کا استعمال کرتے ہوئے، ہم پہلے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ ساتھ محدود رقم کی یہ حد کیسے تیار ہوئی آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ
کیسے محدود رقوم کی حد تیار ہوئی ہے لہذا اس کے لیے میں ایک بار پھر ایک مثال پر غور کروں گا اور میں آپ سے یہ معلوم کرنے کے لیے
کے برابر ہے ۔ پہلے اس خطے کو پلاٹ کریں 1 x کے برابر اور 0 x مربع x برابر 1 جمع y برابر 0 y کہوں گا کہ
مربع پھر ایک پیرابولا ہے جس کا ورٹیکس 0 کوما 1 ہے اور جس x برابر ہے 1 جمع y محور ہے لہذا x محور ہے۔ یہ آپ کا y تو یہ آپ کا
محور ہے y کا محور

برابر ہے صفر کے برابر y ہے 1 کے برابر ہے یہ x ہے 0 کے برابر کہتے ہیں کہ یہ x تو آپ کو یہ شکل ملتی ہے یہ 0 کوما 1 ہے اور یہ
مربع کے اس لیے ہم اس سایہ دار علاقے کی تلاش کر رہے ہیں لہذا یہ قطعی طور پر اٹوٹ انگ ہے اس علاقے x برابر ہے ایک جمع y ہے یہ
ہو گی dx مربع x کی قیمت صفر سے ایک جمع

تو آئیے وہی چال استعمال کریں جو ہم پہلے کر رہے تھے اور ہم علاقے کو بہت سی شکلوں میں تقسیم کر رہے تھے

نصف کے برابر ہے اور پھر ہم x تو ہم کیا کریں ہم وقفہ کے اس وسط کو لے کر اس علاقے کو دو ذیلی علاقوں میں تقسیم کرتے ہیں کہ یہ
ایک ہے اور r مستطیل کھینچتے ہیں۔ اس طرح اور ہم ان دو مستطیلوں کے رقبے کی گنتی کرتے ہیں کہ اس مستطیل کے اس علاقے کا یہ رقبہ
دو ہے r یہ

دو کا r ایک رقبہ ہے پہلے مستطیل چھوٹا ایک اور r دو r ایک جمع r دو ہے l تو ہم کہیں گے کہ دونوں مستطیلوں کے دونوں کا رقبہ

رقبہ بڑا ہے اب اگر ہم اس کی گنتی کریں
صفر کے برابر فنکشن ویلیو کے ذریعے کنٹرول کیا جاتا ہے لہذا ہمیں x نصف اس مستطیل کی چوڑائی ہے اور اونچائی کو f تو ہمیں بال ملے گا
ایک جمع صفر ملتا ہے پھر نصف میں فنکشن ویلیو نصف ہوتا ہے
تو ہمیں ایک جمع ایک سے چار ملے گا یہ ایک جمع ایک جمع کے برابر ہوگا۔ ایک بائے چار جسے ہم لکھ سکتے ہیں ایک جمع ایک بذریعہ آٹھ جو کہ نو
دو ان دونوں 1 اصل رقبہ درکار ہے اور a بذریعہ آٹھ ہے جس کی قدر افسوس کے برابر ہے ایک پوائنٹ ایک دو پانچ اب اگر آپ دیکھتے ہیں کہ
مطلوبہ رقبہ 2 1 کے رقبہ کا مجموعہ ہے۔ مستطیل اس لیے اس رقبے کا حساب لگاتے ہوئے ہم نے اس علاقے کو خارج کر دیا ہے اس لیے یہ
مطلوبہ رقبہ سے کم ہے اب آئیے کسی اور طریقے سے اصل رقبہ کا تخمینہ لگانے کی کوشش کریں 2 1 سے کم ہے
x مربع ہے کہتے ہیں کہ یہ x اور یہ پیرابولا ایک جمع y یہ ہے x تو اس کے لیے ہمیں اعداد و شمار کھینچنا ہوں گے۔ ایک بار پھر یہ ہے
محور کے برابر ہے اب ہم ذیلی علاقے کو دوبارہ دو ذیلی علاقوں میں x ہے صفر y صفر کے برابر ہے یہ x برابر ہے ایک کے برابر ہے
جو لیا ہے ہم اسے مستطیل اور اس gles لینے کے rectan تقسیم کرتے ہیں یہ آدھا ہے یہ ایک ہے یہ صفر ہے اب آہ لینے کے بجائے ان
ٹو بار کو جوڑیں r ایک بار اور r ٹو بار ہے لہذا اگر ہم r ایک بار ہے اور یہ r کو مستطیل کے طور پر لیتے ہیں اور کہتے ہیں کہ یہ رقبہ
تو ہمیں یو ٹو کا کہنا ہے اور یہ قدر ہوگی نصف میں فنکشن ویلیو نصف پر کیونکہ اس چھوٹے مستطیل کی اونچائی نصف پر ایک فنکشن ویلیو کے
ذریعہ کنٹرول ہوتی ہے لہذا آپ کو ایک جمع ایک سے چار جمع نصف فنکشن ویلیو میں ایک پر مل جاتا ہے جو ایک جمع ایک ہے لہذا اگر ہم گنتی کریں
جس u2 تو ہمیں ملتا ہے جو تیرہ ہے آٹھ کے حساب سے اور یہ ایک پوائنٹ چھ دو پانچ کے برابر ہے اب یہ رقم جو ہم نے شمار کی ہے کہ ہم نے
کی گنتی کی ہے جسے کم رقم 12 کی گنتی کی ہے ہم نے 12 کی ہم نے گنتی کی ہے اسے اوپری رقم کہا جاتا ہے اور آخری حساب میں ہم نے
سے بڑا ہوتا ہے اصل رقبہ سے ہمیشہ بڑا ہوتا ہے کیونکہ اس سے u2 ہمیشہ u2 کہا جاتا ہے۔ اب یہاں جو ہم دیکھ سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ
زیادہ رقبہ کا اضافی مطلوبہ رقبہ شمار کیا جاتا ہے کیا یہ اتنا زیادہ رقبہ شامل کیا جاتا ہے
کی قدر 1.125 تھی اب چلو ہم دیکھتے ہیں کہ اصل رقبہ 12 اصل رقبہ سے کم ہے 12 اصل رقبہ سے بڑا ہوتا ہے اور u2 ہے u2 تو
کیسے حاصل کیا جائے
دو کی گنتی کی ہے 1 تو ہم اپنے حساب سے کیا دیکھتے ہیں کہ اگر ہم نے ایک بار میں
دو کی گنتی کر لی ہے ah1 تو ہم نے یہ مستطیل لیا ہے اور ایک بار جب آپ نے
تو یہ مستطیل اور یہ مستطیل کیسے ہے ؟ درستگی کو بڑھانے کے لیے ہم کیا کریں اگر ہم اس علاقے کو مزید ذیلی علاقوں میں تقسیم کرتے ہیں
تو کہتے ہیں کہ یہ ایک سے چار ہے یہ نصف ہے یہ تین سے چار ہے یہ ایک ہے یہ صفر ہے
تو اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مستطیل رقبہ ملے گا۔ اس مستطیل کا جمع اس مستطیل کا رقبہ یہ مستطیل اور اس مستطیل کا رقبہ اس لیے کچھ
ہے یہ ایک اور 14 اور رقبہ شامل کیا جائے گا اس لیے قدر یہ ہوگی یہ دونوں حصے اب ہمارے تخمینی علاقے میں شامل ہیں ہم کہتے ہیں کہ یہ
چار ان چار مستطیلوں کے رقبہ کا خلاصہ ہے یہ اس مستطیل کی اونچائی میں ایک 1 چار اور 1 کم رقم ہے جس کا ہم حوالہ دیتے ہیں جیسا کہ
سے چار کے برابر ہوگا جو فنکشن ویلیو صفر سے چلتا ہے کیونکہ فنکشن بڑھ رہا ہے لہذا ہمیں فنکشن ویلیو میں صفر ایک سے چار ملتا ہے۔ زیر
o
تو یہ ایک جمع صفر ہے پھر ایک سے چار میں ایک جمع فنکشن ویلیو ایک بائے چار پر
تو ہمیں ایک بائے سولہ جمع ایک بذریعہ چار فنکشن ویلیو نصف پر ملتی ہے
تو ایک جمع ایک بذریعہ چار جمع ایک بذریعہ چار فنکشن ویلیو تین بائے چار
چار برابر ہے ایک بذریعہ چار چار جمع ایک جمع چار جمع نو بذریعہ 16 جو کہ برابر ہے 1 جمع 14 ضرب 4 1 تو ایک جمع نو بذریعہ سولہ لہٰذا
میں 16 جو کہ برابر ہے 32 ضرب 32 جمع 7 ضرب 32 جو کہ 39 ہے بذریعہ 32 جس کی قیمت ایک پوائنٹ دو ایک آٹھ ہے اب یاد کریں کہ آپ کا
دو ایک پوائنٹ ایک دو پانچ تھا 1
سے کم ہے کیونکہ ہم ہیں جب کہ ہم نے کچھ جگہ چھوڑ دی ہے ۔ ہم نے a 4 1 سے کم ہے اور 4 1 2 1 تو آپ کیا دیکھتے ہیں کہ
مستطیلوں کے ذریعہ اصل رقبہ کا تخمینہ لگایا ہے اب آئیے اس کو وقفوں کی قوت میں تقسیم کرکے دوبارہ تخمینی رقبہ کی گنتی کریں اور ان
مستطیلوں کو لے کر پہلے ہمارے پاس یہ دو مستطیل موجود تھے لہذا ہمارے پاس اتنا زیادہ رقبہ تھا لہذا اب یہ رقبہ ہوگا۔ نظرانداز کیا گیا
کی قدر اس بار پہلی u4 سے کم ہوں گے۔ لیکن یہ اصل میں اصل رقبہ سے بڑا ہے اس لیے u2 u4 کا مطلب ہے چار وقفے u4 u4 تو
مستطیل کی اونچائی کو فنکشن ویلیو کے ذریعے ایک بائے چار میں کنٹرول کیا جائے گا
تو ایک سے چار میں ایک جمع ایک سے سولہ جمع ایک سے چار انچ ایک جمع ایک سے چار جمع ایک سے چار میں ایک جمع نو بائی سولہ یہ نصف
ہے یہ تین بذریعہ چار ہے یہ ایک جمع ایک سے چار میں ایک جمع ایک ہے لہذا اس وقت اونچائی اس مقام پر فنکشن کی قدروں سے چلتی ہے یہ
نقطہ اور یہ نقطہ
تو ہمارے پاس یہ یو چار ہے اور یو چار کی قدر ہے ایک از چار پھر چار جمع ایک جمع چار جمع نو جمع سولہ ضرب سولہ
تو ہمیں 1 جمع 30 ضرب 4 سے 16 ملتا ہے جو 47 ضرب 32 کے برابر ہے 1.46875 کے برابر ہے
کی قدر 1.625 تھی u2 تو یاد رکھیں کہ
تو آخر کار اس حساب سے ہمیں جو حاصل ہو رہا ہے وہ یہ ہے کہ نچلی رقم اس رشتے کو پورا کرتی ہے اور اوپری رقوم اس رشتے کو پورا
ذیلی وقفے ہوں n کرتی ہیں لہذا اگر ہمارے پاس
تو کیا ہوگا
وقفہ ایک قدر حاصل کرے گا جو اوپری طرف اور نچلی طرف دونوں طرف سے n تو ہر بار ہم بیچ میں پوائنٹس کی زیادہ تعداد میں اضافہ کریں۔
اصل رقبہ کے قریب ہے جو کہ کم رقم اور اوپری رقم سے ہے لہذا اگر ہم ذیلی وقفوں کی تعداد کو بڑھاتے ہیں
لیتے ہیں ذیلی ذیلی تقسیم کے ذیلی وقفوں کی تعداد کبھی بھی اصل قدر finite تو اوپری رقم کم ہوتی ہے اور کم رقم بڑھ جاتی ہے لیکن اگر ہم
کی حد کو لیں uns اور lns حاصل کرنے کے قابل نہیں ہوگی لہذا ہم کیا کریں اگر ہم ان
مربع x تو ہم دیکھیں گے کہ یہ دونوں قدریں ایک ہی قدر میں بدل جائیں گی اور یہ آپ کی اصل ہو گی۔ انٹیگرل کی قدر جو کہ 0 سے 1 1 جمع
ہے آئیے ایک مثال دیکھتے ہیں کہ ہم اصل رقبہ معلوم کرنے کے لیے اس چال کو کس طرح استعمال کر سکتے ہیں مثال یہ ہے کہ ہم ایک فنکشن dx
مثبت ہے اس مفروضے کی وجہ یہ ہے کہ یہ سمجھانا fx پر ایک مسلسل فنکشن ہونے دیں یہ فرض کرنا کہ ab کو بند وقفہ let fx لیں
بڑھ رہا ہے fx محور کے ایک طرف پڑے گا اور فرض کریں کہ x آسان ہے کہ ایک رقبہ صرف
جس میں nction تو پہلے ہم اسے فنکشن بڑھانے کے لیے کریں گے لیکن اس نظریہ کو بڑھایا جا سکتا ہے۔ کسی بھی مسلسل فو کے لئے
اضافہ نہیں ہو رہا ہے
x axis کے درمیان ہے اور جو b کے برابر x اور a کے برابر ہے x کا رقبہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو fx تو آئیے ہم
سے اوپر ہے
ہم گراف کو اس طرح فرض کر سکتے ہیں ab مثبت ہے اور بڑھ رہا ہے۔ وقفہ fx تو آئیے تصویر کھینچتے ہیں کیونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ

ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں n کو برابر لمبائی کے ab محور ہے اب y محور ہے یہ x ہے یہ fx کہ یہ آپ کا
ہے xn نہیں ہے یہ x تو اب نمبر بتائیں پوائنٹس کہتے ہیں کہ یہ
ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا ہے n ہے لہذا ہم نے اس وقفہ کو برابر لمبائی کے axn b کچھ نہیں ہے x تو
کسی بھی xk ہے کیونکہ پوائنٹس برابر فاصلہ پر ہیں لہذا h تو کیا ہوگا کہ اس سے آپ کو ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی ملے گی اور کہا جائے گا کہ
تک جاتا ہے n سے k 1 نقطہ کی گنتی کی جا سکتی ہے اس فارمولے کے ذریعے جہاں
محور پر مساوی فاصلہ والے پوائنٹس پوائنٹس لے کر اس علاقے کو ذیلی علاقوں میں x تو ہمارے پاس صورتحال ہے جو ہم نے کیا ہے ہم نے
کم رقم کی وضاحت کرتے ہیں ln تقسیم کیا ہے اب ہم
نہیں ہے ایکس ایک یہ ایکس ٹو ہے یہ ایکس این ہے یہ ایکس این مائنس ون ہے x تو یہ
ہم ان مستطیلوں کے رقبے کا پتہ لگاتے ہیں جو کہ وکر کے نیچے ہیں n تو ایل ایل کی وضاحت کرنے کے لیے
یہ چوڑائی اس اونچائی میں ہے لہذا چونکہ پوائنٹس یکساں فاصلہ پر ہیں لہذا ہر مستطیل کی ہر ذیلی وقفہ کی چوڑائی کی چوڑائی کی ln تو
آخری کے لیے اونچائی مستطیل کی اونچائی پر حکمرانی کی fx one میں h میں ہے ln h fx nought plus ہے لہذا h اونچائی
میں صفر سے جاتا ہے h k کو fxk لکھ سکتے ہیں ln مائنس ون میں تاکہ ہم fx n کو h مائنس ون پر فنکشن ویلیو سے xn جائے گی
ہو گا un کی تعریف کر سکتے ہیں ہم مستطیل کو اس طرح بناتے ہیں کیونکہ فنکشن بڑھ رہا ہے un کے لیے un مائنس ون اسی طرح ہم n
ون پر بیان کیا جائے گا کیونکہ فنکشن بڑھ رہا ہے لہذا اس مستطیل کی اونچائی کو کنٹرول کیا x کے طور پر فنکشن ویلیو میں h اوپری رقم کو
میں حاصل کریں گے لہذا fxn کو h ٹو میں آخری کے لئے ہم fx میں h ایک جمع fx میں h ایک پر x جائے گا۔ فنکشن ویلیو کے ذریعہ
تک جاتا ہے nfxk کا خلاصہ 1 سے k ہم اسے بھی لکھ سکتے ہیں جیسا کہ
تک جاتا nfxk ایک سے k میں جاتا ہے۔ کیا خلاصہ un اور h سے fxk مائنس 1 n سے 0 k کا خلاصہ ln تو ہم نے کیا دیکھا ہے
ہمیشہ حقیقی رقبہ سے زیادہ ہوتے ہیں اور ان uns ہے پچھلی بحث سے ہم نے دیکھا ہے کہ عناصر ہمیشہ وہ حقیقی رقبہ سے کم ہوتے ہیں اور
مائنس n کی حد صفر سے k کا مطلب یہ ہے کہ اگر آپ ln کی محدود قدریں آپ کو اصل رقبہ فراہم کرتی ہیں لہذا اگر آپ حد کو لیتے ہیں
میں لیتے ہیں h کے fxk ایک
کے درمیان ہے تاکہ آپ دیکھ سکیں کہ یہ انٹیگرل کس طرح b کے برابر ax کے برابر ہے x تو یہ آپ کو فنکشن کا رقبہ فراہم کرتا ہے جو
سے متعلق ہے اس فارمولے سے خلاصہ آپ انٹیگرل کا اندازہ لگا سکتے ہیں یا
کو بھی استعمال کر سکتے ہیں وکر uns تو کم رقم یا اوپری رقم کا استعمال کرتے ہوئے انٹیگرل کی قدر تبدیل نہیں ہونے والی ہے لہذا اگر آپ
اب ہم کچھ مثالیں حل کرتے ہیں اور x axis کے درمیان پڑے ہوئے ہیں۔ b اور a کے رقبہ کی گنتی کرنے کے لیے دی گئی وکر لیکن اوپر
دیکھتے ہیں کہ یہ نظریہ کیسے کام کرتا ہے
ایک کے برابر ہے یہ وہی وکر x صفر کے برابر ہے اور x مربع x کے برابر ہے ایک جمع y کے درمیان رقبہ صفر y تو معلوم کریں کہ
n ہمیں یہ علاقہ ملا ہے اب وقفہ کو ایک ہی سائز کے o میں اس کی دوبارہ وضاحت نہیں کروں گا۔ i ہے جو آپ نے پہلے ہی کھینچا ہے لہذا
ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں
تو یہ آپ کا 0 ہے
مائنس 1 ہے اور اسی طرح آپ وقفہ 0 کو تقسیم کر رہے ہیں۔ 1 کے برابر کے xn ہے یہ 1 x یہ x ہے 1 xn نہیں 0 x nought تو
جمع 0 1 plus khx ہے xk x nought دے رہا ہے اور اس فارمولے کے ذریعے کہ h آپ کو n ذیلی وقفوں میں 1 مائنس 0 بذریعہ
ہوگا h 1 x n
مل جائے گا k میں x n تو آپ کو 1
ہے xk تو
n سے k ہے xk تو
لکھتے ہیں ln ایک ہے ہم اس کے لیے xn اور n مائنس ایک سے n مائنس ایک ہے x n اور n سے دو ہے nx ایک ایک x تو
کوئی نہیں fx کے نیچے h ان تمام مستطیلوں کا خلاصہ ہے جو وکر ln میں ln ہو گا جو ہر ذیلی کی لمبائی ہے وقفہ اس طرح ln h تو
ایک پر x میں ایک جمع فنکشن ویلیو ہے h ہے لہذا یہ ایک جمع صفر جمع
مائنس 1 پر فنکشن ویلیو کی اونچائی کیونکہ فنکشن بڑھ رہا xn پلس میں h 1 مربع جمع آخری مستطیل یہ ایک n تو ایک جمع ایک مربع بذریعہ
میں دوبارہ لکھنے دو ہر جگہ عام ہے لہذا h مجھے اسے ln ہے اور مستطیل منحنی خطوط کے نیچے پڑا ہوا ہے لہذا ہمیں یہ ملتا ہے لہذا
مربع ملتا ہے کیونکہ ہم نے ثابت کیا ہے کہ n مائنس ایک مربع بذریعہ n بار ملتا ہے اور پھر ہمیں 1 مربع جمع 2 مربع جمع n ہمیں 1 جمع یہ
جمع نیم کے طور پر خلاصہ کی قدر آپ کو اچھی n سے بدل سکتا ہوں۔ یہاں خلاصہ بطور n کو ایک سے h ہے لہذا میں n ایک سے h
مائنس ایک مربع کا یہ خلاصہ لکھ سکتے ہیں اس طرح یہ 1 جمع 1 ضرب 6 1 مائنس 1 کے n طرح معلوم ہے آپ ایک مربع جمع دو مربع جمع
انفینٹی کی طرف جاتا ہے ہمیں 1 جمع 1 بذریعہ 6 n کی حد لیں کیونکہ ln اب اس ln ہے n by مائنس 1 2 n بذریعہ nn برابر ہے
میں 2 ملتا ہے یہ 1 جمع 1 ضرب 3 کے برابر ہے جو کہ چار ضرب تین ہے
مربع صفر سے ایک تک تاکہ آپ دیکھ سکیں کہ رقم کی حد کے اس عمل کو کس طرح استعمال کیا جا x تو یہ اس کا ایک لازمی جزو ہے۔ ایک جمع
کے x اور n کے برابر ہے x سکتا ہے کہ کس طرح دیے گئے وکر کے تحت اہ کے نیچے رقبہ کے رقبہ کی گنتی کی جا سکتی ہے جو کہ
کے درمیان رقبہ کی طاقت e برابر دو y محور کے اوپر آئیے ہم ایک اور مثال دیکھتے ہیں تاکہ آپ زیادہ آرام سے رہیں اس لیے x برابر ہے
ایک als برابر x برابر صفر اور x برابر صفر xy مائنس
پاور مائنس ایکس کو اس طرح کھینچا جا سکتا ہے e محور ہے اور x محور ہے یہ آپ کا y تو یہ آپ کا
برابر ہے 0 سے۔ y یہ x پاور مائنس e برابر ہے y کے برابر ہے 1 یہ x کے برابر ہے 0 یہ x تو یہ
ذیلی وقفوں میں n کو 1 وقفہ 0 1 کے x کو 0 کے برابر تقسیم کرنے کی ضرورت ہے لیکن اور x تو پھر پچھلے کیس کی طرح آپ کو وقفہ
تقسیم کرنا ہوگا
x nought یہاں x nought plus kh ہوگا x 1 xk ہوگا اور یہ ہر ایک کی لمبائی ہوگی۔ ذیلی وقفہ اور by تو دوبارہ 1 مائنس 0
صفر ہے
n میں ون بذریعہ k صفر ہے جمع xk تو
اوقات فنکشن ویلیو مل h آپ کو ln اور اسی طرح یہاں نوٹ کرنے کی بات ہے کہ اگر آپ لکھتے ہیں x n دو ہے 2 nx ایک ایک ہے x تو
x کے برابر صفر پر فنکشن ویلیو کے ذریعے نہیں چلی جائے گی بلکہ x رہی ہو گی لیکن یہاں چونکہ اس بار فنکشن کم ہو رہا ہے فنکشن ویلیو
پر فنکشن ویلیو اس لیے اس مستطیل کی اونچائی کو کنٹرول کیا جائے گا۔ ایکس ون پر فنکشن ویلیو کیونکہ فنکشن اسی طرح آخری کے لیے کم one
ہو رہا ہے یہ ایکس پر فنکشنل فنکشن ویلیو ایک کے برابر ہوگی
دو x ٹو پر مستطیل کی اونچائی کے لیے کم رقم کے لیے x ایک پلس ہے دوسرے ایک فنکشن ویلیو کے لیے فنکشن ویلیو پر fx میں ln h تو

n میں پاور مائنس ون بذریعہ e میں ملتا ہے۔ h بطور ln ہے لہذا آپ کو x مائنس fx 0 میں یہاں آپ کا فنکشن h fxn جمع
سے دو کے باہر لکھ سکتے ہیں e پلس n عام ہے لہذا ہم اسے پاور مائنس ون پر h تو

آپ اس سے e پلس n پلس ای ملا ہے مائنس ٹو سے پاور مائنس ون پر n کو پاور مائنس ون بذریعہ e اوقات h کے طور پر ln تو ہمیں
ملتا ہے لہذا یہ ایک ہندسی ترقی ہے اور آپ اس کا خلاصہ n مائنس ون بذریعہ n پہلے ایک اور اصطلاح لکھ سکتے ہیں اس سے پہلے آپ کو
کو e سے ضرب دیں اور h سے n آسان فارمولے کے ذریعہ لکھ سکتے ہیں جو آپ کو یہ ملتا ہے جو مجھے تبدیل کرنے کے برابر ہے۔ 1 کو
سے ضرب دیں h طاقت

تو آپ کو ضرب اور تقسیم ملے گا

لامحدودیت کی n کی طاقت مائنس 1 میں دے گا آپ جانتے ہیں کہ جب e مائنس 1 پر حاصل کریں گے اور یہ آپ کو h کی طاقت e تو آپ
کی طرف s 0 کا رجحان اس تعلق سے لامحدودیت کی طرف ہوتا ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n تک h 0 رجحانات s 0 طرف مائل ہوتا ہے
صفر ہوتا ہے اور یہ حد برابر ہو h جیسا کہ ln کا ln لامحدود کی طرف جاتا ہے حد کے برابر ہوگا۔ n کی حد جیسا کہ ln ہوتا ہے لہذا
h مائنس 1 کی ہے جیسا کہ h کی طاقت e کی حد h سے پاور مائنس ایک اس کے پیچھے e سے پاور مائنس ون e جائے گی ایک بذریعہ
سے لے کر پاور e ہوتا ہے۔ 1 ہے لہذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس طریقہ سے آپ حساب کر سکتے ہیں کہ آپ انٹیگرل کی قدر 0 سے 1 0
مائنس 1 کے طور پر آئیے دیکھتے ہیں کہ اینٹی ڈیریویٹوز کو کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے۔ u تک گن سکتے ہیں کہ 1 مائنس x dx مائنس
حتمی انٹیگرلز کو حل کریں اب تک ہم نے دیکھا ہے کہ رقم کی حد کو کیسے استعمال کیا جائے اور مختلف انٹیگرلز کی قدر معلوم کی جائے آئیے
دیکھتے ہیں کہ اینٹی ڈیریویٹوز کو قطعی انٹیگرلز کا پتہ لگانے کے لیے کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے

تو اینٹی ڈیریویٹوز اس لیے اس سے پہلے کہ ہم مسائل کو حل کرنا شروع کریں۔ کچھ تصورات پر بحث کریں
ہے b یہ ہے a تو آئیے ایک فنکشن لیں جو مثبت اور مسلسل ہو اور ہم اسے کھینچیں یہ

کی b x تو یہ فنکشن ایریا فنکشن کی نمائندگی کرتا ہے یہ اس شیڈڈ ایریا کی نمائندگی کر رہا ہے اور اسے ایریا فنکشن کہا جاتا ہے اگر میں ڈالوں
کے برابر b محور کے اوپر x کے برابر ہے nx مساوی ہے x کے درمیان es ہے۔ li جگہ یہ آپ کو وکر کے نیچے کا رقبہ دے گا جو
بنیادی تھیوریم ہے اور دوسرا کیلکولس ah ہے لہذا اس ایریا فنکشن کو استعمال کرتے ہوئے ہم دو اہم تھیورمز بیان کرتے ہیں ایک کیلکولس ایک کا
ٹو کا بنیادی تھیورم ہے

پر ab قریبی وقفہ fx تو آئیے کیلکولس کے پہلے بنیادی تھیوریم پر بات کریں ۔ لہذا یہ کہتا ہے کہ اگر آپ کے پاس کوئی فنکشن ہے اگر
کے طور پر بیان کیا گیا ہے a to xfxdx مسلسل ہے اور ایریا فنکشن کو

کے برابر ہے جسے کیلکولس کا دوسرا بنیادی تھیوریم کہا جاتا ہے اصل میں استعمال کیا جائے گا۔ متعین fx دوسرے تھیوریم کے x تو ایک ڈیش
چھوٹے ایف ایکس کا fx پر ایک مسلسل فنکشن ہونے دیں اور کیپٹل ab کلوز وقفہ ab کو fx انٹیگرلز کو کمپیوٹنگ کرنا اور یہ کہتا ہے کہ
کے برابر ہے جسے ہم b کے برابر x کے برابر ہے bfxdx fx x سے a کے برابر ہے پھر x fx ڈیش f اینٹی ڈیریویٹیو ہے جو
کے طور پر لکھتے ہیں لہذا اس تھیوریم کو قطعی انٹیگرلز کا اندازہ کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ ہم اینٹی fa مائنس fb
ڈیریویٹیوز کو جانتے ہوں ہمیں کچھ مسائل حل کرنے دیں اور دیکھیں کہ مختلف انٹیگرلز کو جانچنے کے لیے اس تھیوریم کو کیسے استعمال کیا
جائے تاکہ ہم پہلے سے ہی کچھ انٹیگرلز کا اندازہ کر لیا ہے اور ہم ان کی مدد لیں گے

کے برابر صفر x مربع کے نیچے کے رقبے کی نمائندگی کرتی ہے جو کہ x تو ہم نے دیکھا ہے کہ اس انٹیگرل کی ویلیو جو کہ وکر ایک جمع
محور کے برابر ہے چار بائے تین اور جو ہم نے رقم کی حد کے عمل سے حاصل کیا ہے اب x کے برابر ہے ایک اوپر x کے درمیان ہے اور
اینٹی ڈیریویٹوز کے طریقہ کار کو لاگو کریں اور دیکھیں کہ کیا آپ کو ایک ہی قیمت مل رہی ہے یا نہیں اس تھیوریم کے مطابق اس انٹیگرل کی ویلیو
مربع ہے لہذا ہم آسانی x جمع x 1 ڈیش f مربع کا مخالف مشتق ہے جو x جمع fx 1 پر جاتا ہے جہاں 1 x سے صفر جائے گی۔ x
مکعب بذریعہ تین اس x جمع x مربع کا مخالف مشتق ہوگا۔ ہے x مربع کا مخالف مشتق یہ ایک جمع x سے معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک جمع
3 x ہے 0 سے 1 تک جاتی تھیوریم کو لاگو کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں 1 جمع 1 x مکعب بذریعہ 3 x جمع x لئے انٹیگرل کی قدر
کے برابر ہے اور کون سا وہی قدر ہے جو ہم نے رقم کی حد سے حاصل کی ہے آئیے ایک اور مثال لیتے ہیں ہمارے 3 x مائنس 0 ملتا ہے جو 4
کے برابر ہے منحنی خطوط کے نیچے منحنی ای پاور x کے برابر ہے 0 اور x کے درمیان موجود رقبہ کو باہر نکالیں جو x پاس فائی ہے۔
سے پاور مائنس ون ہے اب اگر آپ سیکنڈ لگاتے ہیں۔ کیلکولس کا e محور کے اوپر ہے اور ہم نے دیکھا ہے کہ یہ 1 مائنس x جو x مائنس
بنیادی نظریہ یہ ہے

x مائنس x e ہے یعنی مائنس ای پاور مائنس x مائنس dx eo بذریعہ d تو یہ اس کے برابر ہوگا آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا
کے برابر ہے پاور مائنس ایک اور آپ دوبارہ دیکھ e کا مخالف ہے لہذا تھیوریم کے ذریعہ آپ اسے لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح اور جو ایک مائنس
سکتے ہیں کہ یہ قیمت جو آپ کو رقم کی حد سے ملی ہے وہی قدر ہے جو آپ کو اگلی کلاس میں اینٹی ڈیریویٹو استعمال کرنے سے ملی ہے۔ ہم
یقینی انٹیگرلز کی خصوصیات کے بارے میں مزید جانیں گے اور مزید پیچیدہ مسائل حل کریں گے آپ کا شکریہ