

आज आपण निश्चित पूर्णांकबद्दल जाणून घेणार आहोत कारण निश्चित पूर्णांकांचा इतिहास मानला जातो तोपर्यंत दोन गणितज्ञांचे योगदान विलक्षण आहे, एक रीमन एक जर्मन गणितज्ञ आहे आणि दुसरा फ्रेंच गणितज्ञ आहे, मी माझ्या सर्व विद्यार्थ्यांना विनंती करतो की त्यांनी या दोन्हीबद्दल अधिक जाणून घ्यावे आणि प्रवृत्त होऊ या, निश्चित अविभाज्यांचे अनुप्रयोग काय आहेत ते पाहूया

त्यामुळे निश्चित पूर्णांकांचे अनेक ऍप्लिकेशन्स आहेत उदाहरणार्थ तुम्ही वक्र पृष्ठभागाच्या प्लॅनर क्षेत्राच्या वक्र क्षेत्रफळाच्या वक्र क्षेत्रफळाच्या लांबीची गणना करण्यासाठी निश्चित पूर्णांक वापरू शकता उदाहरणार्थ गोलाच्या आकारमानाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ गोल वस्तुमान इत्यादिचे उदाहरण व्हॉल्यूम म्हणून तुम्ही पाहू शकता की निश्चित पूर्णांकांचे बरेच अनुप्रयोग आहेत म्हणून मी निश्चित पूर्णांकांचा अर्थ काय हे समजून घेण्यासाठी एक उदाहरण म्हणून क्षेत्र घेतले आहे जेणेकरून तुम्हाला पूर्वीच्या वर्गातून समजले असेल की तुम्ही साध्या क्षेत्राची गणना करू शकता. त्रिकोण आयताकृती वर्तुळ इत्यादीसारखे आकार आणि जर तुमच्याकडे गुंतागुंतीचा आकार असेल, उदाहरणार्थ तुम्हाला क्षेत्रफळाचे मूल्यांकन करण्यास सांगितले तर या आकारामुळे तुम्ही हे क्षेत्र मर्यादित संख्येच्या साध्या आकारांमध्ये मोडू शकता आणि नंतर तुम्ही या सर्व साध्या आकारांच्या वैयक्तिक क्षेत्रांची गणना करू शकता आणि वास्तविक क्षेत्र मिळविण्यासाठी त्याची बेरीज करू शकता हे आवश्यक क्षेत्र आहे परंतु जटिल क्षेत्रामध्ये मोडण्याची ही संकल्पना आहे. साधे आकार नेहमीच लागू होत नाहीत उदाहरणार्थ अनेक वास्तविक जीवनातील समस्या आहेत आणि अनेक गणिती समस्या आहेत ज्यामध्ये तुमच्याकडे असे आकार असतील ज्यांचे क्षेत्रफळ तुम्हाला माहित आहे अशा आकारांच्या मर्यादित संख्येत आम्ही विभागू शकत नाही म्हणून आम्ही काही उदाहरणे पाहू ज्यात तुम्ही करू शकत नाही. क्षेत्रफळाच्या मर्यादित संख्येच्या आकारांमध्ये विभागू ज्यांचे क्षेत्रफळ सहजपणे मोजता येते म्हणून क्षेत्रफळ रेषा आणि वक्र यांच्यामध्ये बांधलेले आहे, चला  $y$  बरोबर 1 आणि  $y$  बरोबर  $x$  चौरस घेऊ या, चला त्यांना प्लॉट करूया म्हणजे हा तुमचा  $y$  अक्ष आहे हा  $x$  अक्ष आहे.  $y$  बरोबर 1 ही  $x$  अक्षाच्या समांतर रेषा आहे आणि  $x$  चौरस बरोबर  $y$  हा एक पॅराबोला आहे ज्याचा शिरोबिंदू 0 0 आहे आणि अक्ष  $y$  अक्ष आहे, जर तुम्ही ते प्लॉट केले तर तुम्हाला हे मिळेल म्हणून तुमचे आवश्यक क्षेत्रफळ आहे हे मी सर्व विद्यार्थ्यांना विनंती करतो की ते पहा. ज्यांचे क्षेत्रफळ तुम्हाला माहित आहे अशा आकारांच्या मर्यादित संख्येत ते खंडित करू शकतात, चला आपण आणखी काही उदाहरणे पाहू या, दोन वक्रांमध्ये बांधलेले दोन क्षेत्र  $y$  समान  $x$  चौरस आणि  $y$  चौरस  $x$  च्या बरोबरीचे आहे, चला त्यांना प्लॉट करूया हा तुमचा  $y$  अक्ष आहे हा तुमचा  $x$  अक्ष आहे

त्यामुळे  $y$  बरोबर  $x$  चौरस हा एक पॅराबोला आहे ज्याचा शिरोबिंदू 0 0 आहे आणि अक्ष  $x$  अक्ष आहे म्हणून तुमच्याकडे हा पॅराबोला आहे आणि  $y$  बरोबर  $y$  वर्ग  $x$  च्या बरोबरीचा आहे पुन्हा एक पॅराबोला आहे ज्याचा शिरोबिंदू 0 0 आहे आणि अक्ष  $x$  अक्ष आहे म्हणजे तुमच्याकडे हा पॅराबोला आहे आणि हे क्षेत्र त्यांच्या दरम्यान बांधलेले असणे आवश्यक आहे अशी आणखी काही उदाहरणे पाहू या, आम्हाला निश्चित अविभाज्य का आवश्यक आहे याची प्रेरणा देणारी उदाहरणे पाहू या म्हणून तीन वक्रांमध्ये क्षेत्रफळ बंधनकारक आहे म्हणून एक वक्र  $y$  आहे आणि मूळ दोन  $x$  दुसरा  $y$  आहे मूळ दोन  $x$  वजा  $x$  चौरसाच्या खाली आणि दुसरी  $x$  दोनच्या बरोबरीची एक रेषा आहे आपण त्यांना प्लॉट करूया म्हणजे  $y$  मूळ दोन  $x$  वजा  $x$  वर्गाच्या खाली एक वर्तुळ आहे आपण हे समीकरण खालील स्वरूपात लिहू शकता म्हणजे आपण ते पाहू शकता मध्य एक स्वल्पविराम शून्य आणि त्रिज्या एक असलेले हे वर्तुळ आहे तर तुम्हाला वर्तुळ त्रिज्या मिळेल एक स्वल्पविराम शून्य मध्यभागी स्वल्पविराम शून्य त्रिज्या एक  $y$  समतुल्य मूळ दोन  $x$   $y$  बरोबर मूळ  $2x$  हा पॅराबोला आहे ज्याचा शिरोबिंदू 0 0 आहे आणि अक्ष  $x$  अक्ष आहे

त्यामुळे तुम्हाला हा पॅराबोला आणि  $x$  समान मिळेल  $2$  ही एक रेषा आहे कारण या बिंदूचा हा समन्वय  $2$  स्वल्पविराम  $0$  आहे.

त्यामुळे रेषा या बिंदूवर वर्तुळाला स्पर्शिका असेल म्हणून हे आवश्यक क्षेत्र आहे, येथे लक्षात घेण्यासारखे आहे की हा पॅराबोला वर्तुळाला छेदणार नाही शून्य स्वल्पविराम शून्य वगळता इतरत्र कुठेही स्पर्श आहे जे तुम्ही सोडवले तर स्पर्श आहे जर तुम्ही  $y$  समान सोडवलात मूळ दोन  $x$  आणि  $y$  समान दोन मूळ दोन  $x$  उणे  $x$  चौरस खाली सोडवले तर तुम्हाला दिसेल की ते छेदते फक्त शून्य स्वल्पविराम शून्यावर, म्हणून मी पुन्हा विनंती करतो माझे सर्व विद्यार्थी हे क्षेत्रफळ मर्यादित आकारात विभाजित करू शकतात का हे पाहण्यासाठी आणि या प्रदेशाचे क्षेत्रफळ मिळवण्यासाठी ते जोडू शकतात हे अंतिम उदाहरण सर्वात क्लिष्ट आहे आणि मी ही उदाहरणे का देत आहे ते मी तुम्हाला सांगू इच्छितो की शेवटी आम्ही या सर्व समस्यांचे निराकरण केले जाईल आणि ते कसे ते पाहतील निश्चित अविभाज्य घटकांद्वारे समस्यांची काळजी घेतली जाऊ शकते म्हणून अंतिम उदाहरण म्हणजे चार वक्रांमध्ये बांधलेले क्षेत्रफळ आणि मी चार पॅराबोलास  $y$  स्केअर इक्वल टू चार  $x$   $y$  स्केअर इक्वल टू सोळा  $xy$  बरोबर चार  $x$  स्केअर आणि  $y$  बरोबर सोळा  $x$  स्केअर घेतले आहेत. त्यांना प्लॉट करा म्हणा की हा तुमचा  $y$  अक्ष आहे हा तुमचा  $x$  अक्ष आहे म्हणून  $y$  चौरस चार  $x$  च्या बरोबरीचा आहे आणि  $y$  चौरस  $16x$  च्या बरोबरीचा आहे त्यांना शिरोबिंदू  $0 0$  आणि शिरोबिंदू  $0 0$  आणि अक्ष  $x$  अक्ष आहे म्हणून तुम्हाला हे दोन पॅराबोला आणि  $y$  मिळेल चार  $x$  चौरस आणि  $y$  बरोबर सोळा  $x$  चौरस आहे ते पुन्हा पॅराबोलास आहेत परंतु ज्याचा शिरोबिंदू शून्य शून्य आहे आणि अक्ष  $y$  अक्ष आहे म्हणून तुम्हाला हे दोन पॅराबोला मिळतील आणि म्हणून हा तुमचा  $y$  वर्ग चार  $x$  क्षमस्व  $y$  चार  $x$  च्या बरोबरीचा आहे चौरस आणि हे  $y$  आहे सोळा  $x$  चौरसाच्या बरोबरीचे आहे म्हणून हा एक प्रदेश आहे म्हणून मी तुम्हा सर्वांना विनंती करतो की तुम्ही त्याचे क्षेत्रफळ तुम्हाला ज्ञात असलेल्या मर्यादित संख्येत मोडू शकता का ते पहा आणि शेवटी तुम्ही या क्षेत्राची गणना करू शकता. पूर्वीच्या वर्गातील पद्धती आणि माझ्याकडे असलेली ही सर्व उदाहरणे ई आतापर्यंत चर्चा केलेली आपण शेवटी पाहू आणि निश्चित पूर्णांक वापरून निराकरण करू आणि आवश्यक क्षेत्राची गणना करू, म्हणून आपण निश्चित अविभाज्य परिभाषित करूया एक निश्चित अविभाज्य या फॉर्ममध्ये परिभाषित केले आहे जेथे  $a$  ला लोअर लिमिट आणि  $b$  ला अप्पर म्हणतात. मर्यादा आणि हे फंक्शनचे क्षेत्रफळ दर्शवते म्हणजे  $f(x)$  सकारात्मक आहे असे गृहीत धरूया, जर तुम्ही ते प्लॉट केले तर हा  $y$  अक्ष आहे हा  $x$  अक्ष आहे तुमचे कार्य हे  $x$  च्या बरोबरीचे आहे हे  $x$  च्या बरोबरीचे आहे हे  $b$  च्या बरोबरीचे आहे म्हणून हे निश्चित पूर्णांक हे दर्शवते क्षेत्रफळ आता प्रश्न आहे की या मूल्याची गणना कशी करायची एक मोजण्यासाठी दोन पद्धती आहेत एक म्हणजे मर्यादित रकमेच्या मर्यादेनुसार आणि दुसरी म्हणजे अँटी डेरिव्हेटिव्ह वापरणे. आपण प्रथम पाहू या मर्यादित रकमेची ही मर्यादा कालांतराने कशी विकसित झाली ते पाहू. मर्यादित रकमेची मर्यादा विकसित झाली आहे म्हणून मी पुन्हा एक उदाहरण विचारात घेईन आणि मी तुम्हाला  $y$  बरोबर  $0$   $y$  बरोबर  $1$  अधिक  $x$  चौरस  $x$  बरोबर  $0$  आणि  $x$  बरोबर  $1$  मधील क्षेत्रफळ शोधण्यास सांगेन. चला तर मग चला हा प्रदेश प्रथम प्लॉट करा म्हणजे हा तुमचा  $y$  अक्ष आहे हा तुमचा  $x$  अक्ष आहे

त्यामुळे  $y$  बरोबर  $1$  अधिक  $x$  चौरस हा पुन्हा एक पॅराबोला आहे ज्याचा शिरोबिंदू  $0$  स्वल्पविराम  $1$  आहे आणि ज्याचा अक्ष  $y$  अक्ष आहे

त्यामुळे तुम्हाला हा आकार मिळेल हा  $0$  स्वल्पविराम  $1$  आहे आणि हा  $x$   $0$  च्या बरोबरीचा आहे म्हणा हा  $x$  आहे  $1$  च्या बरोबरीचे हे  $y$  बरोबर शून्य हे  $y$  बरोबर एक अधिक  $x$  चौरस आहे म्हणून आम्ही हे छायांकित क्षेत्र शोधत आहोत म्हणून ते निश्चित अविभाज्यपणे क्षेत्राचे मूल्य शून्य ते एक अधिक  $x$  चौरस  $dx$  असेल तर चला चला तीच युक्ती वापरा जी आपण आधी करत होतो आणि आपण क्षेत्रफळाची अनेक आकारांमध्ये विभागणी करत होतो, मग आपण काय करू या मध्यांतराचा मध्यबिंदू घेऊन या क्षेत्राचे दोन उपक्षेत्रांमध्ये विभाजन करू, हे  $x$  समान अर्द्याचे आहे आणि मग आपण आयत काढू. याप्रमाणे आणि आपण या दोन आयतांचे क्षेत्रफळ मोजू या आयताच्या या क्षेत्रफळाचे हे क्षेत्र  $r$  एक आहे आणि हे  $r$  दोन आहे म्हणून आपण असे म्हणू की दोन आयतांचे क्षेत्रफळ  $1$  दोन म्हणजे  $r$  एक अधिक  $r$  दोन  $r$  एक प्रथम आयत क्षेत्रफळ लहान एक आणि आर दोन क्षेत्रफळ मोठे आहे आता आपण याची गणना केल्यास आपल्याला  $ha/1$  मिळेल  $f$  अर्धा ही या आयताची रुंदी आहे आणि उंची  $x$  शून्याच्या बरोबरीच्या फंक्शन व्हॅल्यूद्वारे नियंत्रित केली जाते, म्हणून आपल्याला एक अधिक शून्य मिळते आणि अर्ध्यामध्ये फंक्शन मूल्य अर्ध्यामध्ये मिळते म्हणून आपल्याला एक अधिक एक बाय चार मिळेल हे एक अधिक एक अधिक असेल एक बाय चार ज्याला आपण एक अधिक एक बाय आठ म्हणजे नऊ बाय आठ असे लिहू शकतो ज्याचे मूल्य क्षमस्व एक बिंदू एक दोन पाच इतके आहे आता जर तुम्हाला  $a$  हे खरे क्षेत्र आवश्यक आहे आणि  $1$  दोन हे या दोघांच्या क्षेत्रफळाची बेरीज आहे आयत म्हणून या क्षेत्राची गणना करताना आम्ही हे क्षेत्र वगळले आहे म्हणून हे  $1$   $2$  आवश्यक क्षेत्रापेक्षा कमी आहे  $1$   $2$  आवश्यक क्षेत्रापेक्षा कमी आहे आता आपण दुसऱ्या पद्धतीने वास्तविक क्षेत्राचा अंदाज घेण्याचा प्रयत्न करूया

त्यामुळे आपल्याला आकृती काढावी लागेल. पुन्हा हा  $x$  हा  $y$  आहे आणि हा पॅराबोला आहे एक अधिक  $x$  चौरस म्हणा हा  $x$  आहे  $x$  बरोबर एक हा  $x$  बरोबरीचा शून्य हा  $y$  आहे बरोबर शून्य  $x$  अक्ष आता आपण पुन्हा उपक्षेत्र या क्षेत्राचे दोन उपक्षेत्रांमध्ये विभाजन करू हे अर्थ आहे हे एक आहे हे आता शून्य आहे त्याऐवजी ते रेक्टन घेण्याऐवजी  $g1es$  ज्याने घेतले आहे ते आपण आयत म्हणून घेतो आणि हे आयत म्हणून घेतो आणि म्हणू की हे क्षेत्र  $r$  एक बार आहे आणि हा  $r$  दोन बार आहे म्हणून जर आपण  $r$  एक बार आणि  $r$  दोन बार जोडले तर आपल्याला  $u$  दोन असे म्हणता येईल आणि हे मूल्य असेल फंक्शन व्हॅल्यूमध्ये अर्धा हा अर्धा आहे कारण या लहान आयताची उंची फंक्शन व्हॅल्यूने निम्न्याने नियंत्रित केली जाते

त्यामुळे तुम्हाला फंक्शन व्हॅल्यूमध्ये एक अधिक एक बाय चार अधिक अर्धा मिळेल जे एक अधिक एक आहे, म्हणून जर आपण गणना केली तर आपल्याला तेरा मिळेल आठ ने आणि हे एक बिंदू सहा दोन पाच इतके आहे आता आपण जी बेरीज केली आहे ती  $u2$  जी आपण मोजली आहे ती वरची बेरीज म्हणून संबोधली जाते आणि शेवटच्या गणनेमध्ये आपण 12 ची गणना केली आहे जी कमी बेरीज म्हणून संदर्भित आहे आता येथे आपण पाहू शकतो की  $u2$  नेहमी  $u2$  पेक्षा मोठा असतो हे नेहमी वास्तविक क्षेत्रापेक्षा मोठे असते कारण इतके जास्त क्षेत्रफळ आवश्यक क्षेत्र मोजले गेले आहे का हे इतके क्षेत्र जोडले आहे म्हणून  $u2$  म्हणजे  $u2$  वास्तविक क्षेत्रापेक्षा मोठे आहे आणि 12 वास्तविक क्षेत्रापेक्षा कमी आहे 12 चे मूल्य 1.125 होते आता द्या वास्तविक क्षेत्रफळ कसे मिळवायचे ते आपण पाहतो तर आपल्या गणनेतून आपल्याला काय दिसते की जर आपण एकदा 1 दोन ची गणना केली तर आपण हा आयत घेतला आहे आणि एकदा आपण  $ah$  1 दोनची गणना केल्यावर हा आयत आणि हा आयत कसा घेतला आहे अचूकता वाढवण्यासाठी आपण काय करू जर आपण या क्षेत्राची पुढील उपक्षेत्रात विभागणी केली तर म्हणा की हे एक बाय चार आहे हे अर्थ आहे तीन बाय चार आहे हे एक आहे हे शून्य आहे

त्यामुळे आता आपण पाहू शकता की हे आयत क्षेत्रफळ मिळेल या आयताचे क्षेत्र अधिक या आयताचे क्षेत्रफळ हा आयत आणि या आयताचे क्षेत्रफळ त्यामुळे आणखी काही क्षेत्र समाविष्ट केले जाईल म्हणून मूल्य हे असेल हे दोन भाग आता आमच्या अंदाजे क्षेत्रामध्ये समाविष्ट केले आहेत आम्ही म्हणतो की ही 14 आहे ही आणखी एक कमी बेरीज आम्ही संदर्भित करतो 1 चार आणि 1 चार ही या चार आयताच्या क्षेत्रफळाची बेरीज असल्यामुळे या आयताच्या उंचीच्या एक बाय चार इतकं असेल जे फंक्शन व्हॅल्यू झिरो द्वारे शासित आहे कारण फंक्शन वाढत आहे म्हणून आपल्याला फंक्शन व्हॅल्यूमध्ये शून्य एक बाय चार मिळते.  $zer\ 0$  तर हे एक अधिक शून्य आहे मग एक बाय चार मध्ये एक अधिक फंक्शन व्हॅल्यू एक बाय चार म्हणजे आपल्याला एक बाय सोळा अधिक एक बाय चार फंक्शन व्हॅल्यू अर्ध्याने मिळते म्हणजे एक अधिक एक बाय चार अधिक एक बाय चार फंक्शन व्हॅल्यू तीन बाय चार चार म्हणजे एक अधिक नऊ बाय सोळा म्हणून 1 चार म्हणजे एक बरोबर चार चार अधिक एक अधिक चार अधिक नऊ बाय १६ जे बरोबर 1 अधिक 14 बाय 4 ते 16 जे बरोबर 32 बाय 32 अधिक 7 बाय 32 म्हणजे 39 32 पर्यंत ज्याचे मूल्य एक बिंदू दोन एक आठ आहे आता आठवते की तुमचे 1 दोन एक बिंदू एक दोन पाच होते तर तुम्हाला काय दिसते की 1 2 1 4 पेक्षा कमी आहे आणि 1 4 a पेक्षा कमी आहे कारण आम्ही आहोत तेव्हा आम्ही विशिष्ट क्षेत्र सोडले आहे आपण वास्तविक क्षेत्रफळ आयतांद्वारे अंदाजे काढले आहे आता आपण अंदाजे क्षेत्रफळाची गणना करू या मध्यांतराच्या बलामध्ये भाग करून आणि हे आयत घेऊन पूर्वी आपल्याकडे हे दोन आयत होते म्हणून आपल्याकडे इतके क्षेत्र जास्त होते

त्यामुळे आता हे क्षेत्रफळ होईल दुर्लक्षित म्हणून  $u4\ u4$  म्हणजे चार अंतराल  $u4\ u2$  पेक्षा कमी असेल पण ते वास्तविक क्षेत्रफळापेक्षा मोठे आहे त्यामुळे  $u4$  चे मूल्य  $u4$  या वेळी पहिल्या आयताची उंची फंक्शन व्हॅल्यू द्वारे एक बाय चार मध्ये नियंत्रित केली जाईल

त्यामुळे एक बाय चार मध्ये एक अधिक एक बाय सोळा अधिक एक बाय चार इंच एक अधिक एक बाय चार अधिक एक चार ते एक अधिक नऊ बाय सोळा हा अर्धा आहे तीन बाय चार हा एक अधिक एक चार म्हणजे एक अधिक एक म्हणजे या वेळी उंची या टप्प्यावर फंक्शन मूल्यांद्वारे नियंत्रित केली जाते हा बिंदू आणि हा बिंदू म्हणून आपल्याकडे हा  $u$  चार आहे आणि  $u$  चार ची किंमत एक बाय चार पुन्हा चार अधिक एक अधिक चार अधिक नऊ अधिक सोळा बाय सोळा म्हणजे आपल्याला 1 अधिक 30 बाय 4 ते 16 मिळेल जे 47 बाय 32 च्या बरोबरीचे आहे 1.46875 च्या बरोबरीचे आहे म्हणून लक्षात ठेवा की  $u2$  चे मूल्य 1.625 होते

त्यामुळे शेवटी या गणनेतून आपल्याला जे मिळत आहे ते असे आहे की कमी बेरीज या नातेसंबंधाचे समाधान करतात आणि वरच्या बेरीज या नातेसंबंधाचे समाधान करतात म्हणून जर आपल्याकडे  $n$  उप अंतराल असतील तर काय होईल म्हणून प्रत्येक वेळी आपण मध्यभागी अधिक गुण वाढवा  $n$  मध्यांतराला एक मूल्य प्राप्त होईल जे वरच्या बाजूने आणि खालच्या बाजूने वास्तविक क्षेत्राच्या जवळ आहे जे कमी बेरीज आणि वरच्या बेरीजमधून आहे म्हणून जर आपण उप अंतरालांची संख्या वाढवली तर वरची बेरीज कमी होते आणि कमी बेरीज वाढते परंतु जर आपण मर्यादित घेतले तर उप-उपविभागांच्या उप-अंतरालांची संख्या कधीही वास्तविक मूल्य प्राप्त करण्यास सक्षम होणार नाही, म्हणून आपण काय करू जर आपण या  $lns$  आणि  $uns$  ची मर्यादा घेतली तर आपल्याला दिसेल की ही दोन्ही मूल्ये एकाच मूल्यात एकत्रित होतील आणि ती तुमची वास्तविक असेल इंटिग्रलचे मूल्य जे 0 ते 1 1 अधिक  $x$  चौरस  $dx$  आहे ते एक उदाहरण पाहू या की आपण वास्तविक क्षेत्रफळ शोधण्यासाठी ही युक्ती कशी वापरू शकतो याचे उदाहरण म्हणजे क्लोज्ड इंटरव्हल  $ab$  वर  $fx$  एक सतत फंक्शन असू द्या हे गृहित धरण्यासाठी की  $fx$  सकारात्मक आहे या गृहितकामागील कारण समजावून सांगणे सोपे आहे की एखादे क्षेत्र  $x$  अक्षाच्या एका बाजूला असेल आणि गृहित धरा की  $fx$  वाढत आहे म्हणून प्रथम आपण कार्य वाढवण्यासाठी ते करू पण हा सिद्धांत वाढवता येऊ शकतो. कोणत्याही सतत फू करण्यासाठी  $n$ ction जे वाढत नाही म्हणून आपण  $fx$  चे क्षेत्रफळ शोधण्याचा प्रयत्न करूया जे  $x$  च्या बरोबरीचे  $a$  आणि  $x$  च्या बरोबरीचे  $b$  च्या मध्ये आहे आणि ते  $x$  अक्षाच्या वर आहे म्हणून आपण  $Fx$  सकारात्मक आहे आणि मध्ये वाढत आहे असे गृहीत धरून चित्र काढूया. मध्यांतर  $ab$  आपण आलेख असे गृहीत धरू शकतो की हा तुमचा  $fx$  आहे हा  $x$  अक्ष आहे हा  $y$  अक्ष आहे आता  $ab$  ला समान लांबीच्या  $n$  उप अंतरालमध्ये विभाजित करा म्हणून आता संख्या म्हणा बिंदू म्हणा की हे  $x$  नाही हे  $xn$  आहे तर  $x$  शून्य आहे  $axn$  हा  $b$  आहे म्हणून आम्ही हा मध्यांतर समान लांबीच्या  $n$  उप अंतरालांमध्ये विभागला आहे,

त्यामुळे असे काय होईल की याद्वारे तुम्हाला प्रत्येक उप अंतरालची लांबी मिळेल आणि म्हणू की  $h$  आहे कारण बिंदू समान अंतरावर आहेत म्हणून  $xk$  कोणत्याही बिंदूची गणना केली जाऊ शकते या सूत्राने जेथे  $k\ 1$  ते  $n$  वर जातो, त्यामुळे आपण काय केले आहे अशी परिस्थिती आहे आपण  $x$  अक्षावर समान अंतराचे बिंदू बिंदू घेऊन हे क्षेत्र उपक्षेत्रात विभागले आहे आता आपण  $ln$  कमी बेरीज परिभाषित करूया म्हणजे हे  $x$  शून्य आहे  $x$  एक हे  $x$  दोन हे  $xn$  हे  $xn$  वजा एक म्हणजे 1 1 परिभाषित करण्यासाठी  $n$  आपण या आयताचे क्षेत्रफळ शोधतो जे वक्र खाली आहेत

त्यामुळे  $ln$  ही रुंदी या उंचीमध्ये आहे म्हणून बिंदू समान अंतरावर असल्यामुळे प्रत्येक आयताच्या प्रत्येक उप अंतराल रुंदीच्या रुंदीची उंची  $h$  आहे त्यामुळे  $ln\ h$  मध्ये  $fx$  नॉट प्लस आहे  $h$  मध्ये  $fx$  one मध्ये शेवटच्या एकासाठी आयताची उंची नियंत्रित केली जाईल  $xn$  वजा एक वरील फंक्शन मूल्यांद्वारे शासित केली जाईल

त्यामुळे  $h\ fx\ n$  वजा एक मध्ये म्हणून आपण  $ln$  लिहू शकतो  $fxk$  मध्ये  $h\ k$  ची बेरीज शून्य वरून जाते  $n$  वजा एक त्याचप्रकारे आपण  $un$  साठी  $un$  परिभाषित करू शकतो आपण अशा प्रकारे आयत तयार करतो कारण फंक्शन वाढत आहे  $un$  वरच्या बेरीज फंक्शन व्हॅल्यू मध्ये  $h$  म्हणून परिभाषित केल्या जातील  $x\ one$  वर कारण फंक्शन वाढत आहे

त्यामुळे या आयताची उंची नियंत्रित केली जाईल  $x\ one$  वर फंक्शन व्हॅल्यू म्हणून  $h$  मध्ये  $fx$  वन अधिक  $h$  मध्ये  $fx$  दोन मध्ये शेवटच्या साठी आपल्याला  $h$  मध्ये  $fxn$  मिळेल

त्यामुळे  $k$  चे बेरीज 1 वरून  $nfxk$  मध्ये  $h$  मध्ये जाते म्हणून आपण हे देखील लिहू शकतो म्हणून आपण ते पाहिले आहे  $ln$  म्हणजे समीकरण  $k\ 0$  ते  $n$  वजा 1  $fxk$  पासून  $h$  आणि  $un$  मध्ये जाते समीकरण  $k$  हे मागील चर्चेतून एक ते  $nfxk$  मध्ये  $h$  मध्ये जाते आपण पाहिले आहे की घटक

नेहमी ते वास्तविक क्षेत्रापेक्षा कमी असतात आणि  $u$  ns नेहमी वास्तविक क्षेत्रापेक्षा मोठे असतात आणि त्यांची मर्यादित मूल्ये तुम्हाला वास्तविक क्षेत्रफळ देतात म्हणून तुम्ही मर्यादा घेतल्यास  $\ln$  च्या म्हणजे जर तुम्ही  $k$  ची मर्यादा शून्य ते  $n$  वजा एक  $fxk$  ची  $h$  मध्ये घेतली तर हे तुम्हाला फंक्शनचे क्षेत्रफळ देते जे  $x$  च्या बरोबर  $ax$  च्या बरोबरीने  $b$  च्या बरोबर आहे जेणेकरून तुम्ही हे पाहू शकता की हे इंटिग्रल कसे संबंधित आहे या सूत्रातील बेरीज तुम्ही कमी बेरीज किंवा अप्पर बेरीज वापरून अविभाज्य मूल्यमापन करू शकता अविभाज्य मूल्य बदलणार नाही, म्हणून तुम्ही दिलेल्या वक्र क्षेत्राची गणना करण्यासाठी  $uns$  देखील वापरू शकता परंतु  $v$  आणि  $b$  मध्ये आहे.  $x$  axis आता आपण काही उदाहरणे सोडवू आणि हा सिद्धांत कसा कार्य करतो ते पाहू या

त्यामुळे  $y$  च्या बरोबरीचे शून्य  $y$  बरोबर एक अधिक  $x$  चौरस  $x$  बरोबरीचे शून्य आणि  $x$  च्या बरोबरीचे क्षेत्रफळ शोधा हा तोच वक्र आहे जो तुम्ही आधीच काढला आहे म्हणून मी मी ते पुन्हा स्पष्ट करणार नाही  $o$  आम्हाला हे क्षेत्र मिळाले आहे आता मध्यांतराला समान आकाराच्या  $n$  उप-अंतरालांमध्ये विभागले आहे म्हणजे हे तुमचे  $0$  आहे

त्यामुळे  $x$  शून्य आहे  $0$   $xn$  आहे  $1$   $x$  हे  $x$   $1$  आहे  $xn$  उणे  $1$  आहे आणि असेच पुढे तुम्ही मध्यांतर  $0$  ला विभाजित करत आहात.  $1$  मध्ये  $n$  समतुल्य उप अंतराल म्हणून  $1$  वजा  $0$  बाय  $n$  तुम्हाला  $h$  देत असेल आणि या सूत्रानुसार  $xk$  म्हणजे  $x$  शून्य आहे अधिक  $khx$   $1$   $0$  अधिक  $h$   $1$  by  $n$  असेल

त्यामुळे तुम्हाला  $k$  मध्ये  $1$  by  $n$  मिळेल म्हणजे  $xk$  आहे तर  $xk$  म्हणजे  $k$  ने  $n$

त्यामुळे  $x$  एक एक  $nx$  दोन म्हणजे दोन  $n$  आणि  $x$   $n$  वजा एक  $n$  वजा एक  $n$  आणि  $xn$  एक आहे यासाठी  $\ln$  लिहूया म्हणजे  $\ln$   $h$  असेल जी प्रत्येक उपाची लांबी आहे मध्यांतर म्हणजे  $\ln$  मध्ये  $\ln$  हे या सर्व आयतांचे बेरीज आहे जे वक्र  $h$  च्या खाली  $fx$  नॉट आहे म्हणजे एक अधिक शून्य अधिक  $h$  मध्ये एक अधिक फंक्शन मूल्य  $x$  one वर

त्यामुळे एक अधिक एक चौरस बाय  $n$  चौरस अधिक शेवटचा आयत हा एक  $h$   $1$  प्लस मध्ये फंक्शन व्हॅल्यूची उंची  $xn$  वजा  $1$  वर आहे कारण फंक्शन वाढत आहे आणि आयत वक्र खाली आहे म्हणून आपल्याला हे मिळते म्हणून  $\ln$  मला ते  $h$  मध्ये पुन्हा लिहू द्या सर्वत्र सामान्य आहे म्हणून आपल्याला  $1$  अधिक हे  $n$  वेळा मिळते आणि नंतर आपल्याला  $1$  चौरस अधिक  $2$  चौरस अधिक  $n$  वजा एक चौरस बाय  $n$  चौरस मिळेल कारण आपण हे सिद्ध केले आहे की  $h$  एक  $n$  ने  $n$  आहे म्हणून मी  $h$  ला  $n$  ने एक ने बदलू शकतो येथे बेरीज  $n$  अधिक अर्धा प्रमाणे बेरीजचे मूल्य तुम्हाला चांगले माहीत आहे

तुम्ही एक चौरस अधिक दोन चौरस अधिक  $n$  वजा एक चौरस ही बेरीज लिहू शकता म्हणून हे  $1$  अधिक  $1$  बाय  $6$   $1$  वजा  $1$  बाय बरोबर आहे  $nn$  बाय  $n$   $2$  वजा  $1$  बाय  $n$  आहे  $\ln$  आता या  $\ln$  ची मर्यादा घ्या कारण  $n$  अनंताकडे झुकत आहे म्हणून आपल्याला  $1$  अधिक  $1$  बाय  $6$  मध्ये  $2$  मिळेल हे  $1$  अधिक  $1$  बाय  $3$  च्या बरोबरीचे आहे जे चार बाय तीन आहे जेणेकरून ते अविभाज्य असेल एक अधिक  $x$  चौरस शून्य ते एक म्हणजे आपण पाहू शकता

की बेरीजांच्या मर्यादेची ही प्रक्रिया दिलेल्या वक्र अंतर्गत क्षेत्रफळाची गणना करण्यासाठी कशी वापरली जाऊ शकते जी  $x$  अक्षाच्या वर  $x$  बरोबर  $n$  आणि  $x$  बरोबर  $b$  च्या दरम्यान आहे आणखी एक उदाहरण पाहू या जेणेकरून तुम्हाला अधिक सोयीस्कर वाटेल

त्यामुळे  $y$  सम दोन  $e$  ते पॉवर वजा  $xy$  बरोबर शून्य  $x$  बरोबरीचे शून्य आणि  $x$  equ मधील क्षेत्रफळ मोजा  $a$   $1$   $s$  ते एक तर हा तुमचा  $y$  अक्ष आहे हा तुमचा  $x$  अक्ष आहे आणि  $e$  पॉवर वजा  $x$  याप्रमाणे काढता येईल म्हणजे हे  $x$  बरोबर आहे  $0$  हे  $x$  बरोबर आहे  $1$  हे  $y$  आहे  $e$  पॉवर वजा  $x$  हे  $y$  समान आहे  $0$  ला. म्हणून पुन्हा मागील केस प्रमाणेच तुम्हाला  $x$  बरोबर  $0$  बरोबर मध्यांतर विभाजित करणे आवश्यक आहे परंतु आणि  $x$   $1$  मध्यांतर  $0$   $1$  च्या  $n$  उप अंतराल मध्ये विभाजित करणे आवश्यक आहे

त्यामुळे पुन्हा  $1$  वजा  $0$  बाय असेल आणि ती प्रत्येकाची लांबी असेल सब इंटरव्हल आणि  $x$   $1$   $xk$  असेल  $x$  शून्य अधिक  $kh$  येथे  $x$  शून्य आहे म्हणून  $xk$  शून्य अधिक  $k$  मध्ये एक  $n$  म्हणून  $x$  एक  $nx$  दोन आहे  $2$   $n$  आणि म्हणून येथे लक्षात ठेवा की आपण लिहिल्यास  $\ln$  तुम्हाला  $h$  वेळा फंक्शन व्हॅल्यू मिळेल पण येथे फंक्शन कमी होत असल्याने फंक्शन व्हॅल्यू  $x$  बरोबरीच्या शून्यावर असलेल्या फंक्शन व्हॅल्यूने शासित होणार नाही तर  $x$  one वर फंक्शन व्हॅल्यू नियंत्रित केली जाईल

त्यामुळे या आयताची उंची  $x$  one वर फंक्शन व्हॅल्यू कारण शेवटच्यासाठी फंक्शन त्याचप्रमाणे कमी होत आहे ते  $x$  च्या बरोबरीचे फंक्शनल फंक्शन व्हॅल्यू असेल तर  $\ln$  हे  $fx$  मध्ये  $h$  मध्ये एक अधिक आहे दुसऱ्या एका फंक्शन व्हॅल्यूवर फंक्शन व्हॅल्यू  $x$  दोन वर आयताच्या उंचीसाठी कमी बेरीज  $x$  दोन अधिक  $h$   $fxn$  मध्ये येथे तुमचे फंक्शन  $fx$   $0$  वजा  $x$  आहे

त्यामुळे तुम्हाला  $h$  मध्ये  $\ln$  मिळेल  $e$  ची पॉवर वजा एक बाय  $n$  म्हणून  $h$  सामान्य आहे म्हणून आपण ते दोन बाय  $n$  अधिक  $e$  ला पॉवर मायनस वन वर लिहू शकतो म्हणून आपल्याला  $\ln$  गुणा  $e$  ला पॉवर वजा एक बाय  $n$  अधिक  $e$  ला वजा दोन बाय मिळाले.  $n$  plus  $e$  ला पॉवर मायनस वन वर तुम्ही आणखी एक टर्म लिहू शकता या आधी तुम्हाला  $n$  वजा एक बाय  $n$  मिळेल

त्यामुळे ही एक भौमितिक प्रगती आहे आणि तुम्ही हे मिळवलेल्या सोप्या सूत्राद्वारे त्याची बेरीज लिहू शकता जे मला बदलू द्या.  $1$  ने  $n$  ने  $h$  आणि  $e$  ने गुणाकार करा  $h$  च्या घात

त्यामुळे तुम्हाला गुणाकार आणि भागाकार मिळेल म्हणजे तुम्हाला  $e$  ची शक्ती  $h$  वजा  $1$  मिळेल आणि हे तुम्हाला  $e$  ची घात वजा  $1$  देईल तुम्हाला माहीत आहे की जेव्हा  $n$  अनंत  $s$  कडे झुकतो  $0$   $h$  ला  $0$   $n$  कडे झुकते या संबंधातून अनंताकडे झुकते तुम्ही पाहू शकता की  $s$   $0$  कडे झुकतो त्यामुळे  $\ln$  ची मर्यादा जशी  $n$  अनंताकडे झुकते ती मर्यादा सारखीच असेल  $\ln$  चा  $h$  हा शून्याकडे झुकतो आणि ही मर्यादा एक बाय  $e$  ची पॉवर वजा एक  $e$  ची पॉवर वजा एक असेल त्यामागील कारण म्हणजे  $h$  ची मर्यादा  $h$  ची  $e$  ची पॉवर  $h$  वजा  $1$  ही आहे कारण  $h$   $0$  कडे झुकते.  $1$  आहे म्हणून तुम्ही पाहू शकता की या पद्धतीद्वारे तुम्ही गणन करू शकता की तुम्ही  $0$  ते  $1$   $e$  मधील पॉवर वजा  $x$   $dx$  पर्यंत इंटिग्रलचे मूल्य मोजू शकता की  $1$  वजा  $u$  वजा  $1$  म्हणून अँटी-डेरिव्हेटिव्ह कसे वापरले जाऊ शकतात ते पाहू. निश्चित पूर्णांक सोडवा आत्तापर्यंत आपण बेरीजांची मर्यादा कशी वापरायची आणि वेगवेगळ्या अविभाज्यांचे मूल्य कसे शोधायचे ते पाहिले आहे, आपण निश्चित पूर्णांक शोधण्यासाठी अँटी-डेरिव्हेटिव्हज कसे वापरता येतील ते पाहू या

त्यामुळे आपण समस्या सोडवण्यास सुरुवात करण्यापूर्वी आपल्याला हे करावे लागेल. ठराविक संकल्पनांवर चर्चा करूया

त्यामुळे सकारात्मक आणि सतत असणारे फंक्शन घेऊ आणि ते काढू या हे  $a$  हे  $b$  आहे

त्यामुळे हे फंक्शन एरिया फंक्शनचे प्रतिनिधित्व करते आणि ते या छायांकित क्षेत्राचे प्रतिनिधित्व करत आहे आणि जर मी ठेवले तर हे एरिया फंक्शन म्हणून ओळखले जाते.  $b$   $x$  च्या जागी ते तुम्हाला  $li$  च्या वक्राखालील क्षेत्रफळ देईल  $es$  मधील  $x$  बरोबरी  $nx$  च्या बरोबरीने  $x$  अक्षाच्या वर  $b$  च्या बरोबरी आहे म्हणून या क्षेत्रफळाचा वापर करून आपण दोन महत्त्वाची प्रमेये सांगतो एक म्हणजे कॅल्क्युलसचे  $ah$  मूलभूत प्रमेय आणि दुसरे म्हणजे कॅल्क्युलस दोनचे मूलभूत प्रमेय म्हणून आपण कॅल्क्युलसच्या पहिल्या मूलभूत प्रमेयाची चर्चा करूया

त्यामुळे असे म्हटले आहे की जर तुमच्याकडे एखादे फंक्शन असेल जर  $fx$  जवळच्या अंतराल  $ab$  वर सतत असेल आणि क्षेत्र फंक्शनची व्याख्या  $a$  ते  $x$   $fxdx$  अशी केली असेल तर डॅश  $x$  हे इतर प्रमेय  $fx$  च्या बरोबरीचे असेल जे कॅल्क्युलसचे दुसरे मूलभूत प्रमेय म्हणून ओळखले जाते. निश्चित इंटिग्रल्सची गणना करणे आणि त्यात म्हटले आहे की  $fx$  हे  $ab$  क्लोज इंटरव्हल  $ab$  वर सतत फंक्शन असू द्या आणि कॅपिटल  $fx$  हे लहान  $fx$  चे अँटी डेरिव्हेटिव्ह आहे जे  $f$  डॅश  $x$   $fx$  च्या बरोबरीचे आहे तर  $a$  ते  $b$   $fxdx$  हे  $fx$   $x$  च्या बरोबरीचे आहे  $x$  च्या बरोबरीचे आहे जे आपण  $fb$  वजा  $fa$  असे लिहितो

त्यामुळे हे प्रमेय निश्चित अविभाज्यांचे मूल्यमापन करण्यासाठी वापरले जाऊ शकते जर आपल्याला अँटी-डेरिव्हेटिव्हज माहित असतील तर आपण काही समस्या सोडवूया आणि भिन्न पूर्णांकांचे मूल्यमापन करण्यासाठी हे प्रमेय कसे वापरायचे ते पाहू या आधीच काही अविभाज्यांचे मूल्यमापन केले आहे आणि

आम्ही त्यांची मदत घेऊ म्हणून आम्ही पाहिले आहे की या अविभाज्यतेचे मूल्य जे वक्र एक अधिक  $x$  चौरस अंतर्गत क्षेत्र दर्शवते जे  $x$  समान शून्य आणि  $x$  वरील  $x$  अक्षाच्या बरोबरीचे आहे चार बाय तीन आणि जे आम्हाला बेरजेच्या मर्यादेच्या प्रक्रियेतून मिळाले आहे ते आता अँटी-डेरिव्हेटिव्हची पद्धत लागू करा आणि तुम्हाला समान मूल्य मिळत आहे की नाही ते पहा, म्हणून या प्रमेयानुसार या अविभाज्यतेचे मूल्य  $x$  वरून शून्यापासून  $f(x)$  होईल.  $x$  ला 1 ला जातो जेथे  $f(x) = 1$  अधिक  $x$  स्केअरचा अँटी डेरिव्हेटिव्ह आहे म्हणजे  $f(x) = 1$  अधिक  $x$  स्केअर आहे त्यामुळे आपण सहज शोधू शकतो की एक अधिक  $x$  स्केअरचे अँटी डेरिव्हेटिव्ह हे वन प्लस  $x$  स्केअरचे अँटी डेरिव्हेटिव्ह असेल.  $x$  अधिक  $x$  घन बाय तीन आहे

त्यामुळे इंटिग्रलचे मूल्य  $x$  अधिक  $x$  घन बाय 3  $x$  हे 0 ते 1 पर्यंत जाते प्रमेय लागू करून आपण पाहतो की आपल्याला 1 अधिक 1 बाय 3 वजा 0 मिळेल जे 4 बाय 3 च्या बरोबरीचे आहे आणि जे बेरजेच्या मर्यादेने मिळालेल्या मूल्याप्रमाणेच फाय चे दुसरे उदाहरण घेऊ  $x$  च्या बरोबरीचे क्षेत्रफळ 0 च्या बरोबरीचे आहे आणि  $x$  च्या बरोबरीचे वक्र खाली असलेल्या वक्राच्या 1 च्या बरोबरीचे आहे  $e$  पॉवर वजा  $x$  जे  $x$  अक्षाच्या वर आहे आणि आपण पाहिले आहे की ते 1 वजा  $e$  ते पॉवर वजा एक आहे आता जर तुम्ही दुसरा अर्ज केला तर कॅल्क्युलसचे मूलभूत प्रमेय म्हणजे हे आहे त्यामुळे हे समान असेल तुम्ही सहज पाहू शकता की  $d$  बाय  $dx$  याचा  $e^x$  वजा  $x$  आहे म्हणजे वजा  $e$  पॉवर वजा  $x$  हा  $e$  उणे  $x$  चे विरोधी व्युत्पन्न आहे

त्यामुळे प्रमेयाद्वारे तुम्ही ते लिहू शकता याप्रमाणे आणि जे एक वजा  $e$  ते पॉवर वजा एक बरोबर आहे आणि पुन्हा तुम्ही पाहू शकता की तुम्हाला बेरीजच्या मर्यादेपासून मिळालेले हे मूल्य आता पुढील वर्गात अँटी डेरिव्हेटिव्ह वापरून मिळालेल्या मूल्यासारखेच आहे. आम्ही निश्चित पूर्णांकांच्या गुणधर्माबद्दल अधिक जाणून घेणार आहोत आणि अधिक क्लिष्ट समस्या सोडवू धन्यवाद