طلباء کا خیرمقدم کرتے ہیں لہذا اس لیکچر میں ہم کچھ افعال کی حدود کا حساب لگانے کے لیے مشتقات کا اطلاق دیکھیں گے
تو مزید خاص طور پر ہم یہ سیکھیں گے کہ دو افعال کے تناسب کے طور پر لکھے گئے فنکشنز کی حد کو تلاش کرنے کے لیے لوپیٹل رولز کے نام
کے تناسب کے حساب c کے قریب آنے والے x سے کیا جانا جاتا ہے۔ ریاست ہم لوپیٹل قواعد سیکھیں گے لہذا اس کا استعمال فارم کی حد
c جہاں gx بذریعہ fx سے لگایا جاتا ہے
یا c توسیع شدہ حقیقی نمبر میں ہے اس سے ہمارا مطلب ہے کہ
تو ایک حقیقی نمبر ہے یا جمع یا مائنس انفینٹی
بھی c جس میں i کچھ وقفہ میں مسلسل مختلف قابل تفریق فعل ہیں gx اور fx تو آئیے پہلے ایک خاص کیس کو دیکھتے ہیں فرض کریں کہ
پر غیر صفر c پرائم g کے برابر ہے اور پھر دونوں صفر ہیں اور ہم فرض کرتے ہیں کہ g کے c f کا c ہوتا ہے یہ فرض کرتے ہیں کہ
ہے
c مائنس x سے زیادہ c کا g مائنس gx کے اوپر c مائنس x لکھ سکتے ہیں۔ gx بذریعہ fx تو ہم
کے برابر نہیں ہے c x سے تعلق رکھتا ہے اور x i تو یہ سب درست ہیں اگر
x از gc مائنس gx اور c مائنس کے تناسب سے fc x مائنس fx کے تناسب کے طور پر لکھا ہے gx کو fx تو اب ہم نے اس
کا مشتق c پر f کی حد کچھ بھی نہیں ہے لیکن c مائنس x از fc مائنس fx اب نوٹ کریں کہ ہم جو جانتے ہیں وہ یہ ہے کہ c مائنس
f c کے برابر ہے کیونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ c پرائم f پر جانے کو محدود کرتا ہے۔ یہ c مائنس x سے fc مائنس fx کو x اب
c مائنس x سے تقسیم gc مائنس gx کی c کے قریب آنے والی x پر مشتق کے برابر ہے اور c پر تفریق ہے یہ حد موجود ہے اور
c کو x ہے اسے غیر صفر بتایا گیا ہے اس لیے حد c پرائم g کے برابر ہے ہم یہ بھی فرض کر رہے ہیں کہ اس ڈینومینیٹر کی حد جو کہ
پرائم سی پر جی پرائم f یہ اس کے سوا کچھ نہیں ہے۔ c مائنس gc by x سے زیادہ gx مائنس c مائنس fc by x مائنس fx کے
کے gx پر جانا c کے fx x کے برابر نہیں ہے لہذا اس کی حد x کے لیے gx بذریعہ fx سی لیکن یہ تناسب کچھ نہیں ہے سوائے
g سے x پر جانے کی حد c کے x پرائم f کی حد x سے لیکن یہ نوٹ کریں کہ یہ g prime c کو تقسیم c پرائم f برابر ہے
کے برابر ہوتا c کے برابر x پرائم ایکس اور جی پرائم ایکس کو لگاتار فرض کیا جاتا ہے f پر جانا اس کی وجہ یہ ہے c کے prime x
g prime x کی حد کے برابر ہے تقسیم x تک جانے والی c کے x پرائم f کی حد x پر جانے والی c کے fx کی حد x ہے لہذا
تو یہ مندرجہ بالا قاعدہ مندرجہ بالا قاعدہ جو زیادہ عام معاملات کے لیے درست ہے اسے لوپیٹل قاعدہ کہا جاتا ہے لہذا یہ لوپٹل ایک فرانسیسی
خاموش ہے لہذا اب میں اس میں لوپیٹل قاعدہ بیان کروں گا۔ زیادہ عام صورت حال h ریاضی دان کا نام ہے اور اس کا تلفظ لوپیٹل ہے لہذا یہاں
کے برابر ہے جو کہ صفر یا جمع یا مائنس انفینٹی کے برابر ہے جو x پر جانے والی حد cgx کی حد x پر جانے والی cfx فرض کریں کہ
تک جا رہی ہے یہ صفر بہ صفر یا لامحدود کی شکل ہے لامحدودیت c x حد gx بذریعہ fx کہ
l'hopital صفر بہ صفر یا جمع مائنس انفینٹی بذریعہ لامحدود پھر یہ ہم اس m تو اگر ہمارے پاس ان میں سے کسی ایک میں یہ حد ہے
تک جا رہی ہے یہ g prime x سے c کے x پرائم f x اصول کو لاگو کرتے ہیں اور دوسرا مفروضہ یہ بھی فرض کیا جاتا ہے کہ حد
موجود ہے
کے قریب پہنچتا ہے c x کے مشتقات کے تناسب سے جب g اور f تو فرض کریں کہ ہم کسی طرح جانتے ہیں کہ حد ان افعال
پر x کے برابر c کے لیے وقفہ میں غیر صفر ہے میں ممکنہ طور پر x تمام g prime x تو یہ حد موجود ہے اور ہمارے پاس ہے کہ
پر ہو c پرائم غیر صفر ہے سوائے g کے لئے x قبول کرتا ہوں لہذا ہم فرض کرتے ہیں کہ وہاں ہے کچھ وقفہ جس میں اس وقفہ میں تمام
کی حد کے سوا کچھ f prime x سے یہ موجود ہے اور یہ حد gx کے قریب آتا ہے c کے x fx سکتا ہے پھر نتیجہ یہ ہے کہ جب
g prime x نہیں ہے۔ بذریعہ
ہے infinity by infinity form یا fx by gx 0 x 0 تو یہاں یہ نوٹ کرنا ضروری ہے کہ اگر ہمارے پاس یہ
کے طور پر لکھ سکتے ہیں بشرطیکہ یہ حد دائیں ہاتھ کی طرف موجود ہے اگر ہمارے g prime x کی حد f prime x تو ہم اس حد کو
اصول کو لاگو نہیں کرسکتے ہیں لہذا آئیے کچھ مثالیں دیکھتے l'hopital بائی صفر کی شکل میں ہم اس ro پاس زی میں حد نہیں ہے۔
x x کے صفر پر جانا x کو سائن x ہیں پہلی مثال میں لیتا ہوں حد
کے قریب آتا ہے 0 بھی x کے قریب جاتا ہے اور x سائن 0 x تو یہاں اگر ہم دیکھیں کہ
کے صفر پر جاتا ہے dx کے dx کے dx کے sin x کی حد کو دیکھیں جو x تو یہ 0 بائی 0 کی شکل میں ہے اب اگر ہم
کا مشتق ایک ہے x ہے اور cosine x کے مشتق ہم جانتے ہیں کہ x کے صفر پر جانے کے برابر ہے اگر سائن x تو یہ حد
cos کی حد کچھ نہیں ہے بلکہ cos x صفر کے قریب پہنچنے پر x کی حد ایک کے برابر ہے اور cos x تو ہم یہ حاصل کرتے ہیں
کو ایک سے تقسیم کیا جاتا ہے zero
تو یہ ایک کے برابر ہے
تو کیا ہم نے یہاں حاصل کیا کہ مشتق کی حد یہ موجود ہے اور اگر آپ مشتق جی پرائم ایکس کو دیکھتے ہیں
یہ ایک x کے 0 تک جا رہی ہے۔ sin x کی لوپٹل اصول کی حد سے x کے لئے 1 کے برابر ہے لہذا یہ غیر صفر ہے لہذا x تو یہ تمام
x درحقیقت کوزائن x کے برابر ہے جس کا ہم نے براہ راست حساب لگایا ہے کہ یہاں ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہیں کہ سائن کا مشتق
ہے ہم اسے استعمال کرتے ہیں ہم نے اس حقیقت کو cos x کے مشتق کا حساب لگایا ہے x ہے اگر آپ کو یاد ہے جس طرح سے ہم نے سائن
کے برابر ہے لیکن فرض کریں کہ آپ اس حقیقت کو کسی اور طریقے سے جانتے ہیں x کی حد sin x استعمال کیا کہ
کے برابر ایک کی حد کا اندازہ بھی لگا سکتے ہیں دوسری مثال آئیے ہم sine x x x قاعدہ کا استعمال کرتے ہوئے l'hopital تو ہم اس
مربع سے تقسیم کیا جاتا ہے x کو x مائنس ایک مائنس x کے 0 سے e کو دیکھتے ہیں جو x حد
مربع 0 ہے ہندسہ 0 ہے ڈانومینیٹر بھی 0 ہے اور x ہے xgx مائنس ون مائنس e to the x ہے fx تو اگر میں دوبارہ دیکھتا ہوں۔ یہ
قاعدہ کو لاگو l'hopital کے مسلسل افعال ہیں اس لیے ہندسہ کی حد صفر ہے اور ڈینومینیٹر کی حد صفر ہے x عدد اور ڈینومینیٹر دونوں
کو دے گا یہ e سے تقسیم کرنے پر x مائنس ایک کو دو x کے عدد کے مشتق کے صفر پر جانے کے برابر ہے جو x کرنا یہ حد
سے e صفر کے قریب آتا ہے x مائنس ایک جیسے ہی x قواعد کا استعمال کرتے ہوئے ہے اگر ہم اب اس حد کو دیکھتے ہیں۔ l'hopital
ero ہوتا ہے۔ z صفر مائنس ون ہوتا ہے جو
قاعدہ کو لاگو کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں لہذا اگر ہم اب دوبارہ lopital تو یہ اب بھی صفر بہ صفر کی شکل میں ہے لہذا ہم دوبارہ
دیکھیں
کا مشتق دو ہے یہ ہے ایک بار denominator ہے x سے e کے مشتق کو ہمیں ملتا ہے کہ ہندسہ کا مشتق denominator تو عدد اور
سے صفر کو دو سے تقسیم کیا e ایک مسلسل فعل ہے لہذا یہ حد کچھ نہیں ہے مگر e to x کا استعمال کرتے ہوئے اب n orbital پھر
گیا ہے جو ایک کے دو سے برابر ہے
استعمال کرنا تھا۔ 'ہسپتال کا اصول دو بار حد کا اندازہ کرنے کے قابل ہو l تو اب تبصرہ کریں جیسا کہ ہم یہاں اس مثال میں دیکھتے ہیں یہاں ہمیں

سکتا ہے لہذا ہمیں حد کا حساب لگانے کے لیے کئی بار لوپیٹل اصول لاگو کرنے پڑیں گے، میں کچھ پیچیدگیوں کا ذکر کرتا ہوں جو ہو سکتی ہیں
مائنس x سے e سے x مائنس e to the پلس x کی لامحدودیت تک. e کی حد کا اندازہ کرنے کی کوشش کریں x فرض کریں کہ ہم
e سے مائنس x
تک صفر تک پہنچتا ہے x تک پہنچتا ہے یہ لامحدودیت اور مائنس x کو e لامحدودیت x تو یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے
تو ہم یہ حاصل کرتے ہیں کہ یہ لامحدودیت کی شکل ہے. لامحدود شکل سے لہذا ہم براہ راست لوپیٹل اصول استعمال کرنے کا لالچ میں آ سکتے
اصول استعمال کرتے ہیں l'hopital ہیں لہذا اگر ہم
کا مائنس e دیتا ہے x مشتق کو مائنس x کے e کو e کو x کے مشتق کی لامحدودیت پر جانے سے e کو x تو یہ حد کے برابر ہے
دیتا ہے اب اگر ہم انفینٹی پر دوبارہ دیکھتے ہیں x کو مائنس e پلس x کو e کو ڈیومینیٹر کے مشتق سے تقسیم کرنے سے x مائنس
تو بندسہ انفینٹی ڈینومینیٹر پر جاتا ہے بھی انفینٹی پر جاتا ہے
کے اصول l'hopital کی ترتیب میں لکھیں کہ ہم lh تو یہ اب بھی انفینٹی کی شکل میں لامحدود ہے یہاں میں کروں گا یہ بتانے کے لیے
کے اصول کو دوبارہ لاگو کرتا ہوں l'hopital کو لاگو کر رہے ہیں اس لیے اگر میں
تک x کو دے گا. مائنس e مائنس x سے e کو x کو مائنس e جمع x کو e مل جاتی ہے جو انفینٹی ڈیریویٹیو پر جاتا ہے x تو ہمیں حد
جو کہ اصل حد خود ہے
قاعدہ کو کئی بار لاگو کرنے سے بھی ہم اس حد کا حساب نہیں لگا پائیں گے لہذا ہم براہ راست لوپیٹل l'hopital تو یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ
y مثبت انفینٹی تک پہنچتا ہے a sx کے برابر y پھر x ڈالتے ہیں e رول کو لاگو کرکے حد کا حساب نہیں لگا سکیں گے تاہم اگر ہم
یہ کچھ x سے مائنس e مائنس x سے e سے x سے مائنس e پلس x سے e لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے اور پھر حد ہو جاتی ہے
مربع مائنس ون لکھا جا y مربع جمع ایک بذریعہ y اور اسے y مائنس ایک بذریعہ y ایک ہو جائے گا x سے مائنس e جمع y نہیں بلکہ
مربع جمع 1 کی y تک محدود کریں x سے مائنس e مائنس x سے e x تک مائنس e پلس x کی لامحدودیت کو e کو x سکتا ہے لہٰذا
مربع y مربع مائنس 1 جس کا ہم حساب لگانا جانتے ہیں ہم سب سے زیادہ طاقت y کی حد کے علاوہ کچھ نہیں ہے y لامحدودیت پر جانے والی
مربع y مربع سے 1 منفی 1 بذریعہ y کی حد 1 جمع 1 کی لامحدودیت کے برابر ہے. y بندسہ اور ڈینومینیٹر سے تقسیم کر سکتے ہیں جو
کی y قاعدہ استعمال کر سکتے ہیں ہم l'hopital اور پھر یہ ایک جمع صفر ہو جاتا ہے ایک مائنس صفر ہو جاتا ہے لہذا حد ایک ہے یا ہم
مربع مائنس ایک یہ انفینٹی بذریعہ لامحدود شکل y مربع پلس کی حد لکھنے کے لیے لوپیٹل اصول استعمال کر سکتے ہیں ایک بذریعہ y انفینٹی
دوبارہ ملتا ہے اور ہم اس 2 کو yتقسیم کرنے سے 2 yکے طور پر لکھیں 2 y اسے عدد کے مشتق کی حد c ہم l'hopital ہے لہذا
سے منسوخ کر سکتے ہیں اور ہمیں یہ 1 کے برابر ملتا ہے. 2y
تو یہ مثال ظاہر کرتی ہے کہ ہمیں کچھ وقت کرنا ہے. لوپیٹل قاعدہ کو لاگو کرنے سے پہلے کچھ متبادل ہم ایک اور مثال کو دیکھ سکتے ہیں جہاں
سے تقسیم x جمع 1 کو مربع جڑ x اصول کا اطلاق کہیں بھی نہیں ملے گا لہذا فرض کریں کہ میں مربع جڑ l'hopital براہ راست
لکھتا ہوں x مائنس 1 سے مربع جڑ x کرکے مربع جڑ
قاعدہ استعمال کرتے ہیں l'hopital تو یہ دوبارہ انفینٹی بذریعہ لامحدود شکل ہے اور اگر ہم براہ راست
ہے مائنس نصف یہ مائنس x دیتا ہے اور ہمارے پاس x مربع جڑ 2 x کا لامحدود مشتق 1 x کے برابر ہوگا مربع جڑ x تو یہ لامحدود
انفینٹی میں جاتا x سے مائنس تین بائے دو اب چونکہ x جمع آدھا x سے مائنس تین بائے دو پھر ہمارے پاس ایک بذریعہ دو جڑ x نصف ہے
ہے یہاں کا بندسہ صفر پر جاتا ہے اور ڈینومینیٹر بھی دونوں اصطلاحات صفر پر جاتا ہے لہذا یہ صفر ہے صفر سے فارم اگر ہم دوبارہ لوپیٹل
قاعدہ لاگو کرتے ہیں
سے مائنس تین بائی دو اور پھر x سے مائنس نصف ہے لہذا ہمیں مائنس ایک چوتھائی x ملتی ہے یہ نصف x تو ہمیں انفینٹی پر جانے کی حد
سے مائنس تھری بائی ٹو ہو جائے گا یہ مائنس تھری بائی x سے مائنس پانچ بائی دو ہے. اس سے مائنس ایک چوتھائی x پلس یہ تین ضرب چار
چار ایکس سے مائنس فائیو بائی ٹو ہو جائے گا یہ پھر سے صفر بہ صفر ہو جائے گا لہذا لا لوپیٹل رولز کو لاگو کرنے سے یہ اظہار زیادہ سے
مائنس ون x سے مربع جڑ x جمع ایک کو مربع جڑ x کو انفینٹی میں جانے والے مربع جڑ x زیادہ پیچیدہ ہوتا جاتا ہے. پیچیدہ تاہم ہم صرف حد
مائنس ون لکھ سکتے ہیں اور پھر اسے x جمع ایک x لکھ سکتے ہیں کیونکہ ہم اس اظہار کو آسان بنا سکتے ہیں اور اسے x بذریعہ مربع جڑ
یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ حد یا
ہے مشتق کی x اصول استعمال کر سکتے ہیں اور یہ حد l'hopital سے تقسیم کر کے ایک ہے یا آپ یہاں x تو عدد اور ڈینومینیٹر کو
لامحدودیت پر جانے سے ایک ایک ہو جائے گا
تو یہ ایک کے برابر ہے
کو لاگو کرنے l'hopital یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ آپ کو لوپیٹل اصول کو آنکھ بند کرکے لاگو نہیں کرنا چاہیے بلکہ w تو یہ دو مثالیں
اصول دیگر غیر متعین شکلوں کے لیے استعمال کیا جا l'hopital سے پہلے کچھ آسانیاں کرنے کی کوشش کریں اب ہم دیکھیں گے کہ یہ
سے پاور انفینٹی 0 سے پاور 0 وغیرہ کسی طرح صفر سے صفر یا انفینٹی ah 1 سکتا ہے جیسے زیرو ٹائم انفینٹی یا انفینٹی مائنس انفینٹی
بذریعہ لامحدود شکلیں
تک جانے کی حد کیا ہے x کے مائنس e مربع اوقات x کی حد کیا ہے x تو مثال کے طور پر آئیے پہلے حساب لگائیں کہ
صفر پر جاتا ہے x سے مائنس e مربع لامحدود پر جاتا ہے x لامحدودیت پر جاتا ہے x تو یہاں اگر ہم دیکھیں جیسے
تو یہ لامحدود اوقات صفر کی شکل ہے جسے ہم نے دیکھا ہے ایک غیر متعین شکل ہے لیکن یہاں ہمارے پاس یہ دو افعال کی پیداوار ہے نہ کہ دو
قاعدہ کو لاگو کرنے کے قابل ہوسکے پہلے ہمیں اسے دو فنکشنز کے تناسب میں تبدیل کرنا ہوگا تاکہ ہم l'hopital کا تناسب فنکشنز تاکہ
سے تقسیم کیا جاتا ہے اب اگر ہم عدد دیکھیں یہ x سے e مربع کی لامحدودیت پر جاتا ہے x کی حد کے طور پر لکھ سکتے ہیں x اسے
انفینٹی ڈینومینیٹر پر جاتا ہے انفینٹی پر بھی جاتا ہے لہذا ہمیں انفینٹی بذریعہ لامحدود حاصل ہوتا ہے لہذا ہم لابسٹر کے اصول کو لاگو کرسکتے ہیں
سے e کو x مشتق ہوتا ہے x کا 2 e اسکوائر کے مشتق کی لامحدودیت پر جانے سے x کے طور پر حاصل ہوتا ہے x اور ہمیں یہ حد
کو 2 کی x اصول کو لاگو کرتے ہیں اور یہ حد l'hopital یہ اب بھی لامحدودیت کی شکل میں لامحدود ہے لہذا ہم ایک بار پھر x
انفینٹی پر جاتا ہے یہ عدد ہے 2 کا اعشاریہ لامحدود پر جاتا ہے x کو تقسیم کیا جاتا ہے اب x سے e لامحدودیت پر جاتا ہے
تک x سے مائنس e اوقات n کی لامحدودیت تک جاتی ہے x کی حد x تو یہ صفر کے برابر ہے اس لیے عام طور پر ہم دکھا سکتے ہیں کہ
میں تقسیم کیا x سے e کو n کے طور پر لکھتے ہیں. x اس کی وجہ یہ ہے کہ ہم اسے n یہ کسی بھی مثبت عدد کے لئے 0 کے برابر ہے
قاعدہ کا اطلاق کرتے رہتے ہیں لہذا جب آپ مشتق لیتے ہیں l'hopital جاتا ہے اور ہم
x ہوتا ہے لہذا جب ہم مشتق لیتے ہیں . x کا n حاصل کرتے رہتے ہیں جب کہ عدد e تک آپ x ہوتا ہے e ہمیشہ denominator تو
تک ایکسپوننٹ ایک سے کم کیا جاتا ہے n کو
اوقات لیتے ہیں n ہم مشتق i f تو
کی حد کو دیکھتے ہیں جو x ہے لہذا یہ حد صفر ہوگی دوسری مثال آئیے e پر x تو ہمیں بندسہ میں ایک مستقل ملتا ہے اور ڈینومینیٹر ابھی بھی

کا x اوقات قدرتی لاگ کے دائیں سے صفر پر جاتا ہے۔ x فنکشن
x کو صفر جمع کرنے کی حد لے رہے ہیں کیونکہ لاگ x کی تعریف کی گئی ہے ہم x تو یہاں ہم دائیں ہاتھ کی حد لے رہے ہیں کیونکہ یہاں لاگ
کا کیا ہوتا ہے ہم نے دیکھا ہے x کے 0 جمع کے قریب آتے ہی اس x کے لئے بیان کیا گیا ہے اگر ہم دیکھتے ہیں کہ x صرف صفر سے زیادہ
کہ لاگ ایکس کا کیا ہوتا ہے یہ منفی لامحدودیت تک پہنچتا ہے یاد رکھیں کہ لاگ ایکس کا گراف اس طرح ہے 1 لاگ ایکس پر 0 ہے اور ایکس 1 سے
منفی لامحدودیت کی طرف جاتا x log x کم کے لیے لاگ ایکس کی قدر منفی ہے اور جیسے جیسے آپ اس کی قدر کو گھٹاتے جارہے ہیں۔
رہتا ہے لہٰذا یہ حد صفر گنا مائنس انفینٹی کی شکل کی ہے ہمیں اسے صفر بہ صفر یا انفینٹی بذریعہ انفینٹی فارم میں تبدیل کرنا ہے
سے تقسیم کیا گیا۔ منفی پر اب یہ عدد ہے منفی انفینٹی x کو log x یہ برابر ہے ہم اسے لکھ سکتے ہیں۔ x log x تو آئیے لکھیں
ڈینومینیٹر جاتا ہے مثبت انفینٹی پر جاتا ہے
کے صفر جمع کرنے کے برابر x x log x اصول کے مطابق یہ حد l'hopital تو یہ انفینٹی شکل کے لحاظ سے منفی انفینٹی ہے لہذا
اصول استعمال کرتا ہوں l'hopital اور یہ اگر میں x کی حد کے برابر ہے لاگ ایکس کا صفر جمع ایک بذریعہ x log x ہے
مربع ہے اور اگر ہم اس x مائنس 1 x مشتق 1 بذریعہ x کے برابر ہے 1 بذریعہ x کے مشتق کے 0 جمع پر جانے کی حد log x تو یہ
1 x ہے جو مائنس x کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا یہ حد x مربع سے تقسیم کرنا مائنس x کو مائنس 1 سے x کو آسان بناتے ہیں x کو
کی حد صفر جمع کے قریب پہنچتے ہی برابر ہے۔ آئیے ہم مثال دیکھنے کی x لاگ x کے 0 پلس پر جائے گی جو 0 کے برابر ہے۔ اس طرح
کوشش کرتے ہیں کہ ہمارے پاس فارم انفینٹی مائنس انفینٹی کی حد کہاں ہے
x پر جاتا ہے ایک بذریعہ 0 x تاکہ sine x مائنس 1 بذریعہ x کو 0 میں سے 1 بذریعہ x تو آئیے ہم گنتی کرنے کی کوشش کریں حد
صفر کے قریب آتا ہے صفر کے قریب آتا ہے x جیسے ہی x جمع یا دائیں اور بائیں سے مائنس انفینٹی اور سائن
x کو x مائنس x مائنس انفینٹی فارم اب یہاں ہم کیا کر سکتے ہیں ہم کامن ڈینومینیٹر کو لے سکتے ہیں اور اسے سائن inity تو یہ انف ہے
sine x کے قریب آتا ہے 0 x سے تقسیم کر کے لکھ سکتے ہیں اگر ہم دیکھتے ہیں کہ
جیسے ہی 0 کے قریب آتا ہے 0 کے قریب بھی آتے ہیں x تو عدد 0 کے قریب آتا ہے اور
cos عدد کے مشتق کے 0 پر جانے سے x تو ہمیں 0 بائی 0 فارم ملتا ہے تاکہ ہم لوپیٹل رول کو لاگو کر سکیں اور اسے حد کے طور پر لکھیں
x مائنس 1 کو ڈیومینیٹر کے مشتق سے تقسیم کیا جاتا ہے جسے ہم پروڈکٹ رول استعمال کرتے ہیں اور اسے حاصل کرتے ہیں۔ sine x
plus x cos x پر جاتا ہے cos 0 minus 1 مائنس cos x 1 کے قریب آتا ہے 0 x اب کیا ہوتا ہے جب
denominator تو یہ 0 ہوتا ہے اور sine x میں x cos x اور ہوتا ہے
تو یہ بھی 0 کے قریب آتا ہے
اصول کو لاگو کرنے کی کوشش کریں اگر ہم دوبارہ مشتق لیں l'hopital کی شکل ملتی ہے آئیے ہم دوبارہ 0 by 0 تو ہمیں
x ہے اور cos x مشتق sine x کو ڈینومینیٹر کے مشتق سے تقسیم کیا جاتا ہے x کا مشتق حاصل ہوتا ہے مائنس سائن cos x تو ہمیں
cos x جمع cos x مائنس sine x دے گا۔ اب اگر ہم x کو صفر کے برابر رکھیں
cos x کے بطور 2 x ہے یہ میں اسے مائنس سائن cos zero جمع cos zero تو گناہ صفر صفر ہے لیکن ڈینومینیٹر میں ہمارے پاس
x sin x مائنس کے طور پر لکھتا ہوں اور اب ہمیں ملتا ہے کہ یہ 0 کے برابر ہے تقسیم دو سے
قاعدہ کا استعمال کرتے ہوئے اسے l'hopital تو یہ صفر کے برابر ہے لہذا ہم اس حد کو صفر کے برابر حساب کرنے کے قابل ہیں دو بار
تک x کے pi 2 کے مائنس 1 بار ٹین کے x کی حد کو دیکھ سکتے ہیں جو 1 جمع x صفر بہ صفر میں تبدیل کرنے کے بعد اب اسی طرح ہم
ہوتا ہے pi by 2 x مائنس 1 یہ 0 پر جاتا ہے اور پھر ہمارے پاس 10 x دائیں طرف سے 1 کے قریب پہنچتا ہے x جائے گا۔ جیسے ہی
پر جاتے ہیں اور دائیں سے یہ منفی لامحدودیت کی طرف جاتا ہے pi 2 یہ انفینٹی پازیٹو انفینٹی پر جاتا ہے جیسا کہ آپ بائیں سے tan x تو
دائیں سے 1 تک پہنچتا ہے x لہذا یہاں ہم حد لے رہے ہیں جیسے ہی
کے قریب پہنچتا ہے لہذا یہ 0 گنا مائنس انفینٹی کے برابر ہے تاکہ لوپیٹل اصول استعمال کرنے کے قابل ہو pi 2 دائیں سے pi by 2 x تو
ہمیں اسے تبدیل کرنا چاہئے۔ صفر بہ صفر یا لامحدود بذریعہ لامحدود شکل
کے cot of pi ایک بذریعہ ٹین ایک کوٹینجینٹ کے ذریعہ ہے لہذا ہم اسے s منٹ کے طور پر لکھنے کی کوشش کریں x تو آئیے اسے
اصول کا اطلاق کرتے ہیں l'hopital اب ہمیں صفر بہ صفر کی شکل ملتی ہے لہذا اگر ہم x طور پر لکھ سکتے ہیں دو
pi مربع cosecant مائنس کے مشتق کے ایک جمع پر جانے کی حد کے برابر ہے۔ ایک دیتا ہے کوٹینجینٹ کا ایک مشتق ہے x کو x تو یہ
2 pi 2 کا x pi by 2 گنا مشتق x کا مائنس ہے
x سے بذریعہ pi 2 گنا سائن مربع pi کو مائنس 2 کے 1 جمع پر جا کر x تو ہم یہ حاصل کرتے ہیں اور یہ اس کے سوا کچھ نہیں ہے
پر جاتا ہے pi 2 سے x pi by two پر جاتا ہے مثبت طرف 1 x ہے اور اب جیسا کہ cosecant sine کیونکہ 1 بذریعہ
ایک pi by two sine pi by two sine مربع by pi گنا تو یہ برابر ہے مائنس دو
ایک اور قسم کی حد ہے فرض کریں کہ ہمارے پاس 0 بائی 0 فارم ہے pi تو یہ مائنس ٹو کے برابر ہے بذریعہ
دائیں سے صفر کے قریب آتا ہے x پر لکھتے ہیں جیسے ہی x کی حد کو پاور x تو فرض کریں کہ ہم
لیں log کے برابر کرنے دیں پھر اگر ہم x کو fx ہے do تو یہ صفر بہ صفر ہے اب یہاں ہم کیا کریں گے
x کی حد x log x گنا قدرتی لاگ کے برابر ہے اب ہم کیا کریں گے معلوم ہے کہ ہم نے دیکھا ہے کہ x کے x کا قدرتی لاگ fx تو
اصول کا استعمال کرتے ہوئے یہ حد l'hopital لکھ کر اور پھر log x x 1 x x صفر جمع ہوتی ہے یہ 0 کے برابر ہے ہم نے اسے
کی حد کیا ہے لہذا fx کے لاگ کے زیرو پلس پر جانا صفر کے برابر ہے جو ہمیں تلاش کرنا ہے وہ یہ ہے کہ fx x ہے لہذا اس کی حد 0
پاور limit x کے علاوہ کچھ نہیں ہے۔ x کے صفر جمع کرنے کی حد Fx کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا e کے fx پاور لاگ fx اب
کے صفر کے x پاور کی حد x کے برابر ہے e کے 0 پلس پر جا رہا ہے اور چونکہ ایکسپونینشل ایک مسلسل فنکشن ہے یہ e میں fx لاگ
کے برابر ہے اور اب ہم f کی حد حد کے f کی x مسلسل فنکشن کے لئے مسلسل ہے x سے e پلس پر جا رہا ہے لاگ ایف ایکس کے لئے
پہلے ہی اندازہ کر چکے ہیں کہ یہ حد صفر ہے
کے برابر ہے جو ایک کے برابر ہے e تو یہ صفر کے
کے تناسب کی حد موجود ہے ۔ f prime x اور g prime x تو یہ حد ایک کے برابر ہے اگلی میں آپ کو دکھاؤں گا۔ یہ فرض کیا گیا کہ
sary
میں جانا موجود نہیں ہے limit x cf prime x by g prime x تو مجھے یہ ایک تبصرہ کے طور پر لکھنے دیجئے کہ اگر
fx کی حد موجود نہیں ہے لہذا ہم نے جو کہا ہے وہ یہ ہے کہ اگر حد موجود ہے پھر حد fx by gx تو ہم یہ نتیجہ اخذ نہیں کر سکتے کہ
کی موجود نہیں ہے g prime x کی حد f prime x بھی موجود ہے اور وہ ایک جیسی ہیں لیکن یہاں تک کہ اگر gx بذریعہ
gx x اور sin x کے برابر لیں پلس x کو fx کی حد موجود نہیں ہے مثال کے طور پر fx by gx تو اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ
کی لامحدودیت پر جانے کی بھی حد x کی x پر جانا لامحدودیت کے برابر ہے جو infinity کی مثبت limit x fx کے برابر ہے پھر

کو دیکھیں f prime x ہے اب اگر ہم
دیکھیں g prime x کو f prime x کے برابر ہے لہذا اگر ہم cos xg prime x 1 کا کیا ہوگا؟ برابر 1 جمع f prime x تو
کے برابر ہے cos x تو یہ ایک جمع
جو موجود نہیں ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ cos x کی لامحدودیت پر جا رہی ہے پلس x 1 جس حد تک اس کے لامحدود ہونے کی حد x تو
x منفی ایک اور ایک کے درمیان گھومتا رہتا ہے لہذا کوئی حد نہیں ہے جیسے ہی cos x it کی حد موجود نہیں ہے cos x لامحدودیت پر
کی لامحدودیت پر جانے کے برابر ہے x یہ gx کی لامحدودیت پر جانے کے برابر ہے fx کی حد x لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے تاہم
کی لامحدودیت کی طرف جاتا x x x جمع سائن x 1 سے تقسیم کیا جا سکتا ہے جسے لکھا جا سکتا ہے۔ جیسا کہ حد x کو sin x اور
کے x منفی ایک اور ایک اعشاریہ x کا کیا ہوتا ہے ہم جانتے ہیں کہ سائن x لامحدودیت کے قریب پہنچنے پر سائن x x x x ہے اور اب
برابر ایک سے کم اور صفر sin sin x x x اس طرح صفر پر جاتا ہے اور موڑ میں x x x x درمیان لامحدود ہوتا ہے لہذا یہ سائن
لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے x یہ صفر ہو جاتا ہے کیونکہ x x کے برابر اور ایک
کی fx کی حد x یہ 0 کے برابر ہے اس لئے x x کی لامحدودیت تک sin x کے ذریعے x تو ہم نے دیکھا کہ سینڈوچ تھیوریم کی حد
قاعدہ استعمال کرنے l'hopital ایک جمع صفر کے برابر ہے جو ایک کے برابر ہے حالانکہ اگر ہم براہ راست gx لامحدودیت پر جاتی ہے
کی کوشش کرتے ہیں
لیکن اس کا مطلب یہ نہیں کہ یہ اصل حد موجود ist جو سابق نہیں ہے۔ g prime x کی طرف سے f prime x تو ہمیں حد ملتی ہے
نہیں ہے اس لیے میں اس لیکچر کو روک دوں گا شکریہ