

مشقات کے اگلے لیکچر میں خوش آمدید اس لیے پچھلے لیکچر میں ہم نے دو اہم تھیورمز سیکھے جو کہ رولز تھیوریم اور اوسط قدر تھیوریم ہیں  
 صفر  $n$  اور پھر ہم نے اوسط قدر تھیوریم کا ایک اطلاق یہ ثابت کرتے ہوئے دیکھا کہ اگر کوئی فنکشن میں فرق ہے کھلے وقفہ میں ایک کھلا وقفہ

تو فنکشن کو مستقل ہونا چاہیے آج ہم کچھ مزید ایپلی کیشنز دیکھیں گے جیسے کہ کیا ہوتا ہے اگر کسی وقفے میں مشتق سختی سے مثبت یا سختی سے منفی ہو

تک ایک قابل تفریق فعل  $r$  سے  $f$   $ab$  تو میں اسے بطور نظریہ لکھتا ہوں فرض کریں تھیوریم

کے لیے صفر سے زیادہ  $x$  میں تمام  $ab$  کھلے وقفہ  $f$   $prime$   $x$  تو پھر اگر مشتق پورے وقفے پر  $fx$  کے لیے منفی ہے۔ کھلا وقفہ پھر  $x$  تمام  $f$   $prime$   $x$  پر سختی سے بڑھ رہا ہے اور اگر  $ab$  کھلے وقفہ  $fx$  تو سختی سے کم ہو رہا ہے سختی سے بڑھ رہا ہے

تو مشتق مثبت ہے اور اگر یہ سختی سے کم ہو رہا ہے تو مشتق مثبت ہے اور اگر یہ سختی سے کم ہو رہا ہے تو مشتق منفی ہے یہاں ہم کہہ رہے ہیں کہ بات چیت بھی درست ہے لہذا ثبوت دوبارہ اوسط قدر تھیوریم کا استعمال کر رہا ہے لہذا فرض کریں کہ دو کرتے ہیں  $x$  ایک لیتے ہیں اور  $x$  ہم کوئی بھی

سے سختی سے کم ہے  $f$  دو کے  $f$   $x$  ایک کا  $x$  تو ہم یہ ظاہر کرنا ہوگا کہ

دو پر تفریق ہے لہذا اوسط قدر کے تھیوریم کے ذریعہ کچھ موجود  $x$  ایک  $x$  مسلسل ہے اور کھلے وقفہ  $f$  دو پر  $x$  ایک  $x$  تو پھر بند وقفہ پرائم کے برابر  $f$  پر  $c$  ایک یہ  $x$  دو مائنس  $x$  ایک  $x$  کا  $f$  دو مائنس  $x$  دو اس طرح کہ ہمارے پاس  $x$  ایک  $x$  کھلے وقفہ میں  $c$  ہے لیکن ہم نے فرض کیا ہے کہ مشتق پورے وقفہ پر سختی سے مثبت ہے۔

ایک مثبت  $x$  دو منفی  $x$  مثبت ہے کیونکہ یہاں  $fx$   $1$  مائنس  $2$   $x$  تو یہ ہم جانتے ہیں کہ سختی سے مثبت ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ  $ar$  ایک سے بڑا ہو دوسرا حصہ یکساں ہے۔  $x$  دو  $x$  سے بڑا ہے جب بھی  $f$  ایک کے  $f$   $x$  دو کا  $x$  ہے لہذا

تو آئیے اب ہم اسے کچھ عدم مساوات ثابت کرنے کے لیے استعمال کرنے کی کوشش کرتے ہیں کے لیے صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم یہ ثابت کرنا چاہتے  $x$  کے برابر سے کم ہوتا ہے تمام  $x$  کا سائن ہمیشہ  $x$  تو مسئلہ ثابت ہوتا ہے کہ ہونے کی اجازت  $\sin x$  مائنس  $x$  کو  $f$  کے  $x$  کے برابر ہے لہذا ہم  $x$  کی علامت ہمیشہ اس سے کم ہوتی ہے۔  $x$  ہیں کہ کسی بھی مثبت  $f$  کا  $x$  کے برابر سے کم ہے وہی بات ہے جو یہ کہنا ہے کہ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ  $x$  کا نشان  $x$  دے سکتے ہیں اور پھر یہ ثابت کرنا کہ برابر سے بڑا ہے صفر

پرائم کیا ہے  $f$  کا  $x$  تو آئیے دیکھتے ہیں کہ

ہمیشہ  $1$  کے برابر ہوتا ہے  $\cos$  کا  $x$  ہے اور ہم جانتے ہیں کہ  $x$  کا کوزائن  $x$  برابر ہے ایک مائنس مشتق سائن  $x$  پرائم  $f$  تو پھر مشتق ہمیشہ ایک کے برابر ہوتی ہے اس لیے ہمارے پاس یہ ہے کہ مشتق صفر کے برابر ہے اس  $\cos$  کی  $x$  تو یہ برابر سے بڑا ہوتا ہے۔  $\theta$  چونکہ

کے برابر سے بڑا  $\theta$   $x$  پرائم  $f$  ایک بڑھتا ہوا فعل ہے اس لیے یاد رکھیں کہ پچھلے تھیوریم میں اگر ہم فرض کریں کہ مشتق  $f$  کا  $x$  لیے ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے جس کا مطلب ہے غیر کم ہونے  $ff$  کا  $x$  ہمیں ملے گا کہ  $unction$  بڑھانے کے بجائے  $f$  ہے پھر سختی سے

کے برابر ہے  $\theta$   $c$  پرائم  $f$  والا فنکشن کیونکہ ہمارے پاس یہ

سے بڑا ہے۔  $f$  کے  $f$   $x$   $1$  کا  $f$   $x$   $2$  تو ہمارے پاس

کے برابر ڈالتے ہیں  $f$  کو  $\theta$  کے  $\theta$  ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے اگر آپ  $f$  تو ہم کریں گے۔ استعمال کریں کہ ایکس کا یہ

برابر سے بڑا ہے۔  $\theta$  کے  $f$  کا  $x$  سے زیادہ کے لئے ہمارے پاس یہ ہونا چاہئے کہ  $x$  برابر  $\theta$  ہوتا ہے لہذا  $\theta$  کے برابر  $\sin \theta$  تو  $\theta$  مائنس  $x$  کے برابر سے بڑا ہے جو کہ سائن  $\theta$   $x$  مائنس ہے سائن  $x$  فنکشن میں اضافہ کر رہا ہے لیکن یہ  $\theta$  کے برابر ہے جو  $f$  تک چونکہ  $f$  کے لئے غیر منفی یقیناً یہ ایکس صفر سے کم کے لیے درست نہیں ہے اسی طرح ہم ایک اور عدم  $x$  کے لئے کم تمام  $x$  کے برابر ہے تمام

دو کے درمیان تمام ایکس کے لیے تین  $\pi$  مساوات کو ثابت کرتے ہیں جس میں ایکس کا ٹینجٹ شامل ہے تاکہ ایکس کھلے وقفے میں صفر سے ایکس سے کم ہو

کے برابر ہے اور ہمیں یہ ظاہر کرنا ہوگا کہ کھلے وقفے میں  $\theta$   $x$  مائنس  $x$  ٹین  $x$  کا لگاتے ہیں۔  $f$  تو ہم دوبارہ وہی کام کرتے ہیں جو ہم سختی سے ہے مثبت  $f$  کے  $\pi$   $x$   $2$  سے

تو ہم مشتق کا حساب لگاتے ہیں

$x$  مربع  $\secant$  کا  $1$  ہے اور  $x$  مائنس مشتق  $x$  مربع  $\secant$  کے مشتق کے برابر ہے مجھے دیتا ہے  $f$   $prime$   $x$   $\tan x$  کے لیے صفر صفر سے  $x$  یہ اس سے سختی سے بڑا ہے۔ کھلے وقفہ میں تمام  $\tan x$  ہے اور ہم جانتے ہیں کہ  $x$  مربع  $\tan$  مائنس  $1$  کے عددی ضرب میں  $\theta$  ہے  $\pi$  کا تین صرف  $x$  ٹو میں کیونکہ تین ہے  $\pi$  by

بڑا ہے صفر سے زیادہ اس لیے ایف ایکس کھلے وقفے پر  $x$  پرائم  $f$  ہمیشہ مثبت ہے لہذا  $\pi$   $x$   $2$   $\tan x$  تو کھلے وقفے میں  $\theta$  سے مائنس  $\theta$  ہے جو تمام  $f$   $\tan \theta$  سے بڑا ہونا چاہیے اور  $\theta$  کا  $f$  کے  $f$   $\theta$  کا  $x$  دو تک بڑھ رہا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ  $\pi$  صفر سے

کے لیے  $\theta$  ہے۔ بذریعہ  $2$ ۔ یعنی تین ایکس تمام ایکس کے لیے ایکس سے بڑا ہے اور صفر سے پی آئی دو کے لیے ہم ایک اور  $\pi$  اور  $\theta$  سے  $x$  کے برابر سے کم ہے۔  $y$  مائنس  $x$   $\text{mod}$  یہ سب کے لیے  $y$  مسئلہ کریں گے مسئلہ  $3$  یہ ثابت کرتا ہے کہ موڈ آف سائن ایکس مائنس سائن

$xy$  اصل نمبر

کی سائن کے برابر لیتا ہوں ہر جگہ مسلسل اور مختلف ہوتا  $x$  کو  $fx$  تو اس عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لیے ہم نوٹ کرتے ہیں کہ اگر میں سے  $x$  سے کم دینے گئے کھلے وقفہ  $x$   $y$  ہے لہذا ہم اوسط قدر تھیوریم کا اطلاق کر سکتے ہیں اوسط قدر کے تھیوریم کے ذریعہ کسی بھی

$\sin y$  جو کہ  $x$  مائنس  $y$  تقسیم  $f$  کا  $x$  مائنس کے برابر ہے۔  $f$   $y$  کا  $c$  پرائم  $f$  کا  $f$  موجود ہے اس طرح کہ  $c$  میں کچھ  $y$  کے برابر ہے لہذا  $f$   $\sin x$  کا  $x$  کے برابر ہے لیکن  $f$   $prime$   $x$  پر مشتق  $c$  سے تقسیم کیا گیا ہے  $x$  مائنس  $y$  کو  $\sin x$  مائنس سے تقسیم  $y$  مائنس  $x$  کے ماڈیولس موڈ کو  $\sin x$   $\text{minus}$   $\sin y$  ہے لہذا اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر میں  $\cos$  کا  $c$  پرائم ہمیشہ ایک کے  $\cosine$   $\theta$  مطلق قدر میں  $\text{mod}$  کے برابر ہے اور ہم جانتے ہیں کہ  $\text{mod}$   $\cos$   $c$  کے لئے  $c$  کرتا ہوں یہ کچھ

کے برابر نہیں ہے  $x$   $y$  ہے اگر  $y$  مائنس سائن  $\text{mod}$   $\sin x$  برابر ہوتا ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ کے برابر ہے  $x$   $y$  کے موڈ کے برابر سے کم ہے اور یقیناً اگر  $y$  مائنس  $x$  تو یہ

کے لئے درست ہے۔ رولز تھیوریم یا مین ویلیو تھیورم کا اطلاق کچھ اور  $xy$  تو بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کی طرف دونوں صفر ہیں لہذا یہ تمام اہم تھیوریم اس لیے اسے انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیوریم کے نام سے  $e$  دیکھنے سے پہلے مجھے ایک بار کرنے دو کنٹینرز کے فنکشنز کے بارے میں

لکھیں گے  $ivt$  جانا جاتا ہے ترتیب میں ہم کے درمیان رہنے  $f$  اور  $a$  کے  $f$  کو  $y$  تک ایک مسلسل فعل ہے اور  $r$  سے  $ab$  کچھ بند وقفہ  $f$  تو یہاں فرض یہ ہے کہ فرض کریں

بے جو  $y$  ہے اور فرض کریں کہ کچھ  $f$  کا  $b$  یہ  $f$  کا میرا  $a$  تو ہمارے پاس جو ہے وہ ایک فنکشن لگاتار فنکشن ہے اور ہمارے پاس یہ ہے  $b$  دیں۔

کے درمیان ہے  $f$  کے  $b$  اور  $a$  کے  $f$  کے برابر ہے  $y$  کا  $f$  میں اس طرح کہ  $ab$  یہاں وقفہ  $x$  تو نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ کچھ موجود ہے۔  
 کے برابر ہے  $f$  کا  $x$  موجود ہے اس طرح کہ  $x$  میں کم از کم ایک  $ab$  تو  
 یا  $f$  کا یہ  $a$  تو یہاں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ  
 سے بڑا ہے  $f$  کے  $f$  کا  $a$  سے کم ہے یا  $f$  کے  $b$  تو  
 تو یا

لیتا ہوں  $y$  سے بڑا ہے اور پھر اگر میں یہاں کوئی  $f$  کا  $f$   $a$  تو ہمارے پاس یہ ہے یا ہمارے پاس ہو سکتا ہے  
 کے برابر ہے۔ نظریہ بدیہی طور پر واضح ہے اگر آپ دیکھتے ہیں کہ کیا ہمارے پاس کوئی  $x$   $y$  کا  $f$  ایسے ہیں کہ  $x$  تو پھر ہمارے پاس کچھ  
 مسلسل فعل ہے

کے درمیان تمام درمیانی قدریں لیتا ہے اگر ہمارے پاس ایک  $b$  کے  $f$  اور  $a$  کے  $f$  تو یہ اسے انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیوریم کہا جاتا ہے کیونکہ یہ  
 مسلسل فعل ہے لیکن ہم رسمی ثبوت کو چھوڑ دیں گے آپ کو یاد رکھنا چاہئے کہ تسلسل ضروری ہے نوٹ کریں کہ تسلسل کی ضرورت ہے  
 انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیوریم کیونکہ بصورت دیگر ہمارے پاس ہو سکتا ہے اگر ہم ایک منقطع فنکشن کی اجازت دیتے ہیں  
 ہے اور اگر  $ah$   $f$  کا  $f$  کے یہاں  $b$  اب اگر آپ دیکھتے ہیں کہ میرے پاس  $b$  یہ ہے  $a$  تو اب میں اس طرح کا فنکشن رکھ سکتا ہوں یہ میرا  
 یہاں  $y$  میں کوئی لیتا ہوں

کے برابر ہے کیونکہ یا  $f$   $y$  کا  $x$  نہیں ہے جس کے لئے  $x$  تو کوئی  
 پر ایک مسلسل فعل  $f$   $a$  یہاں اس درمیانی قدر کے تھیوریم کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ فرض کریں  $f$  کا  $x$  اس وقفہ میں کم ہے یا  $f$  کا  $x$  تو  
 متضاد علام  $f$  کا  $b$  اور  $f$  کا  $a$  اور فرض کریں کہ  $ab$  ہے۔ بند وقفہ  
 منفی ہے  $f$  کی پیداوار  $f$  کے ایک بار  $b$  توں سے ہے جو کہ  
 کا  $a$  اس طرح ہے کہ اگر میں کہوں کہ  $s$  برابر ہے۔ صفر تھی  $x$  کا  $f$  موجود ہے اس طرح کہ  $x$  میں کم از کم ایک  $ab$  تو کھلے وقفہ  
 مثبت ہے  $f$  کا  $b$  منفی ہے اور  $f$

تو یہ کیا کہتا ہے کہ اگر میرے پاس ایک مسلسل فنکشن ہے  
 ہے اور یہ واضح طور پر انٹرمیڈیٹ  $\theta$  کا  $f$  نقطہ ہے جہاں  $x$  تو اسے کم از کم ایک بار اس ایکس محور کو عبور کرنا چاہئے لہذا یہ یہاں  
 کے درمیان ہوتا ہے لہذا چونکہ درمیانی قدر والے تھیوریم کے ذریعہ  $f$  کے  $b$  اور  $a$  کے  $f$  ویلیو تھیوریم کی پیروی کرتا ہے کیونکہ صفر  
 یا  $a$   $x$  صفر کے برابر ہے یقیناً یہ  $f$  کا  $x$  اس طرح موجود ہے کہ  $x$  میں  $ab$  کے درمیان ہوتا ہے  $f$  کے  $b$  اور  $a$  کے  $f$  صفر  
 بھی ہو سکتے ہیں  $x$  ہے اور آپ کے پاس ایک سے زیادہ  $x$  صفر ہے لہذا کم از کم ایک  $f$  کا  $b$  اور  $f$  کا  $a$  نہیں ہو سکتا کیونکہ  
 تو یہ فنکشن اس طرح ہو سکتا ہے

تو یہ انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیوریم پھر بہت اہم ہے لہذا انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیورم کی کچھ ایپلی کیشنز اس لیے پہلے مجھے اسے دوبارہ ایک تھیوریم کے  
 طور پر لکھنے دیں

$x$  ہے۔ ایک صفر جمع ایک  $p$  کا  $x$  تو یہ تھیوری کہتا ہے کہ طاق ڈگری کے ہر کثیر الثانی میں کم از کم ایک صفر ہونا ضروری ہے جو کہ اگر  
 صفر کے برابر نہیں ہے  $an$  طاق ہے اور  $n$  میں جہاں  $n$  کے برابر ہے۔  $anx$  جمع  
 کے برابر  $px$  صفر کے ریمارک کے برابر ہے مثال کے طور پر اگر میں  $p$  کا  $c$  حقیقی اعداد موجود ہیں جیسے کہ  $c$  تو وہاں کم از کم ایک  
 کے برابر ایک سے بڑا ہوتا  $x$  مربع جمع ایک ہمیشہ تمام حقیقی  $x$  مربع جمع  $1$  اس میں کوئی حقیقی صفر نہیں ہے ہم جانتے ہیں کہ  $x$  لیتا ہوں  
 میں صفر نہیں ہو سکتا لیکن طاق ڈگری کثیر الثانی کے لیے ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ کم از کم ایک صفر ہے تھیوریم کا ثبوت اس  $r$  ہے لہذا اس کا  
 کی بلند ترین  $n$  کی حد کو  $x$  ایک طاق عدد ہے اگر ہم  $n$  تک کیونکہ  $anx$  تک  $x$  ایک  $x$  صفر کے برابر ہے ایک  $px$  لیے ہمارے پاس ہے  
 اصطلاح پر دیکھیں

منفی لامحدودیت کے قریب پہنچتی ہے اس سے ہمیں  $x$  مثبت میں جاتا ہے۔ لامحدودیت یہ مثبت لامحدودیت کے برابر ہے اور جو حد  $x$  تو یہ  
 ہو  $n$  طاق ہے اگر  $n$  منفی لامحدودیت ملے گی یہ اس لئے ہے کہ  
 تو یہ دونوں مثبت لامحدود ہوں گے لہذا اگر ہم اس کثیر الثانی کو دیکھیں

اگر ایک مثبت ہے  $a$  پر مثبت اس کا انحصار اس نشانی پر ہوگا  $x$  اور کسی دوسرے  $x$  کچھ منفی ہونا ضروری ہے  $p$  کا  $x$  تو  
 منفی لامحدودیت پر جاتا ہے اس کا  $x$  انفیٹٹی اور منفی انفیٹٹی میں جاتا ہے جیسا کہ  $x$  مثبت لامحدودیت تک پہنچ جائے گا کیونکہ  $p$  کا  $x$  تو  
 لیتے ہیں۔ کافی بڑا ہے  $x$  مطلب ہے کہ اگر آپ

بڑا منفی نمبر ہے  $x$  مثبت ہونا ضروری ہے اور اگر  $p$  کا  $x$  تو  
 منفی ہونا چاہئے اور اگر ایک منفی ہے  $p$  کا  $x$  تو

تو آپ کے پاس دوسرا راستہ ہے

پر صفر ہونا ضروری ہے لہذا یہ بہت  $x$  کا کسی وقت  $p$   $x$  تو پھر انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیوریم کے ذریعے کورلری سے انٹرمیڈیٹ ویلیو تھیوریم  
 $x$  اہم نتیجہ ہے کہ طاق ڈگری کے کسی بھی کثیر الثانی میں کم از کم ایک حقیقی  $\theta$  ہونا ضروری ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ اسے کسی وقت  
 ماننس  $1$  کے برابر  $\theta$  کا ہمارے پاس بالکل ایک حل ہے  $x$  سے  $5$  جمع  $4$   $x$  محور کو عبور کرنا چاہئے لہذا اب ہم ایک مسئلہ کو دیکھتے ہیں تاکہ  
 ایک طاق ڈگری ہے۔  $p$  کا  $x$  ماننس ایک ہے کیونکہ  $x$  سے پانچ جمع چار  $x$  یہ کثیر الجہتی  $p$  کا  $x$  تو سب سے پہلے اگر ہم دیکھیں کہ  
 برابر صفر کے پاس کم از کم ایک حل ہے جسے ہم جانتے ہیں کیونکہ یہ عجیب ڈگری ہے اس میں کم از کم ایک حل ہے جو ہم  $p$  کا  $x$  متعدد  
 دکھانا چاہتے ہیں وہ یہ ہے کہ بالکل ایک حل ہے جس کا مطلب ہے کہ ہمارے پاس اس کا کوئی دوسرا حل نہیں ہے لہذا فرض کریں کہ دو حل ہیں  
 دو سے کم  $x$  ایک  $x$

بھی صفر ہے لہذا رولز تھیوریم کے ذریعہ نوٹ کریں کہ چونکہ ہمارے پاس کثیر نام  $p$   $\theta$  کا  $x$  ایک صفر کے برابر ہے اور  $px$  تو ہمارے پاس  
 دو کے  $x$  ایک اور  $x$  پر یہ قدریں یکساں ہیں لہذا رولز تھیوریم کے مطابق  $1$   $x$   $2$   $x$  ہے یہ ہر جگہ مسلسل اور مختلف ہے اور اختتامی نقطہ  
 کو دیکھیں  $x$   $p$   $prime$  پرائم صفر کے برابر ہے لیکن اگر ہم  $p$  کا  $c$  موجود ہے اس طرح کہ  $c$  درمیان کچھ  
 سے چار ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے یہ ہمیشہ چار کے برابر ہوتا ہے اس  $x$  سے چار جمع چار ہے۔ اور ہم جانتے ہیں کہ  $x$  تو یہاں مشتق پانچ  
 کے برابر ہے۔ بالکل ایک حل  $\theta$   $px$  دو اس لئے  $x$  ایک  $x$  لئے ہمیں ایک تضاد ملتا ہے لہذا تضاد ہے کیونکہ ہم فرض کرتے ہیں کہ دو حل ہیں

ہے آپ یہ سوال پوچھ سکتے ہیں کہ حل کہاں ہے حل کیا ہے  
 تو نوٹ کریں کہ یہاں ہمارے پاس ڈگری پانچ کا کثیر الجہتی ہے لہذا اس کثیر الجہتی کی جڑیں تلاش کرنے کا کوئی عمومی طریقہ نہیں ہے لیکن ہم  
 کیا کر سکتے ہیں کہ ہم کر سکتے ہیں۔ کوشش کریں کہ ہم درمیانی قدر کا نظریہ استعمال کر کے تخمینہ حل تلاش کر سکتے ہیں جیسا کہ ہمارے  
 ماننس ون کے برابر ہے  $x$  پانچ جمع چار  $x$  برابر ہے  $p$  کا  $x$  پاس جو ہے وہ یہ ہے کہ ہمارے پاس  
 کو  $1$  کے برابر رکھتا ہوں  $px$  کے برابر رکھتا ہوں ماننس  $1$  کے برابر یہ منفی ہے اگر میں  $p$  کو  $\theta$   $x$  تو نوٹ کریں کہ اگر میں

