डेरिवेटिव पर अगले व्याख्यान में आपका स्वागत है,
इसलिए पिछले व्याख्यान में हमने दो महत्वपूर्ण प्रमेयों पर चर्चा की, जो रोल प्रमेय और माध्य मान प्रमेय हैं, तो मुझे याद दिलाएं कि रोल प्रमेय क्या कहता है, तो मुझे रोल प्रमेय बताएं ताकि धारणा यह है कि f एक बंद अंतराल ab से r वास्तविक संख्याओं के सेट का एक फ़ंक्शन है ba फ़ंक्शन निम्नलिखित को संतुष्ट करता है कि f बंद अंतराल पर निरंतर है, दूसरी धारणा यह है कि
f खुले अंतराल ab पर अवकलनीय है और तीसरा धारणा यह है कि अंत बिंदु पर फलन का मान जो कि a का f है, b के f के बराबर है और फिर निष्कर्ष यह है कि खुले अंतराल ab में कम से कम एक c मौजूद है जैसे कि c पर व्युत्पन्न f प्राइम बराबर है तो चलिए इसे चित्र द्वारा समझते हैं हम x के f के बराबर फंक्शन y का ग्राफ खींचते हैं जो दिया गया है कि a और b पर मान फ़ंक्शन मान समान हैं
इसलिए यह f है बी के ए और एफ का और फिर यह दिया जाता है कि कार्य बंद अंतराल पर निरंतर है और खुले अंतराल में अलग-अलग है, तो हम दावा करते हैं कि व्युत्पन्न
इसलिए फ़ंक्शन इस तरह हो सकता है यदि आप देखते हैं कि यह है बिंदु जहां हमारे पास क्षैतिज स्पर्शरिखा है जिसका अर्थ है कि व्युत्पन्न शून्य है या यह ऐसा कुछ हो सकता है जो इस तरह नीचे जा सकता है और इस मामले में ऊपर जा सकता है यदि आप देखते हैं कि दो बिंदु हैं जहां व्युत्पन्न शून्य है
इसलिए दो से अधिक बिंदु हो सकते हैं ठीक है तो यह हो सकता है कि यह इस तरह से ऊपर और नीचे जाता है और फिर आप देखते हैं कि ये सभी बिंदु हैं जहां व्युत्पन्न शून्य है
इसलिए हम इस प्रमेय के प्रमाण की व्याख्या करने से पहले क्या करने की कोशिश कर रहे थे आइए हम यह देखने की कोशिश करें कि प्रमेय में धारणाएं हैं आवश्यक हैं
इसलिए पहला कहता है कि f को होना चाहिए f को बंद अंतराल पर निरंतर माना जाता है ab मान लीजिए f बंद अंतराल पर निरंतर नहीं है ab तो आपके पास हो सकता है कि फ़ंक्शन ठीक हो सकता है इस तरह क्रीजिंग और फिर मैं अंत बिंदु पर परिभाषित कर सकता हूं मान लीजिए कि यह ए है और यह बी है तो एआई इस मान को परिभाषित कर सकता है,
इसलिए यह फ़ंक्शन खुले अंतराल में कोई सी नहीं है जैसे कि एफ प्राइम सी 0 के बराबर है और
यहाँ फ़ंक्शन f abf पर अवकलनीय है, a का f है, b का f के बराबर है
, a को छोड़कर ab के सभी बिंदुओं पर निरंतर है, भले ही यह किसी एक अंतिम बिंदु पर निरंतर होने में विफल हो, फिर भी कोई c होने की आवश्यकता नहीं है जहां f प्राइम सी 0 के बराबर है।

इसलिए हमें बंद अंतराल में निरंतरता की आवश्यकता है, दूसरी धारणा है कि एफ खुले अंतराल पर एफ की अलग -अलग भिन्नता है , इसलिए मान लीजिए कि यह विफल हो जाता है तो हमारे पास फ़ंक्शन इस तरह हो सकता है
इसलिए मेरे पास यहां है और यदि आप इस फ़ंक्शन को फिर से देखते हैं तो कोई बिंदु नहीं है,
इसलिए यह फ़ंक्शन f निरंतर है abf पर अलग-अलग है, खुले अंतराल में एक बिंदु को छोड़कर ab और f का f बराबर b के बराबर है और आप देख सकते हैं कि यहां के लिए सभी बिंदु l और हम कहते हैं कि यह हमारी बात है कि इसके बाईं ओर किसी भी बिंदु के लिए
व्युत्पन्न निरंतर सकारात्मक है और इससे अधिक किसी भी बिंदु के लिए व्युत्पन्न ऋणात्मक है लेकिन ऐसा कोई बिंदु नहीं है जहां इस बिंदु पर व्युत्पन्न परिभाषित नहीं है
इसलिए वहां कोई सी ऐसा नहीं है कि एफ प्राइम सी शून्य के बराबर है और तीसरी शर्त एफ के बराबर एफ के बी के निश्चित रूप से हमें इसकी भी आवश्यकता है क्योंकि अगर मैंने सिर्फ यह फ़ंक्शन कहा है तो यहां आप देखते हैं कि फ़ंक्शन बंद पर निरंतर है अंतराल यह खुले अंतराल में भिन्न होता है और
इसलिए यदि मैं बंद अंतराल शून्य एक पर एक्स के बराबर एक्स के बराबर लिखता हूं
तो यह एफ शून्य पर निरंतर है एक एफ खुले अंतराल शून्य पर अलग है और यदि आप देखते हैं f अभाज्य x यह अंतराल शून्य एक में सभी x के लिए एक के बराबर है,
इसलिए कोई c नहीं है जहां rf prime c शून्य के बराबर है, लेकिन यहां हमारे पास शून्य का f एक के f के बराबर नहीं है,
इसलिए ये तीनों उदाहरण से पता चलता है कि तीनों रोल प्रमेय में विकल्प इस निष्कर्ष के लिए आवश्यक हैं कि एफ प्राइम सी खुले अंतराल में किसी बिंदु पर शून्य के बराबर है यदि उनमें से एक भी विफल हो जाता है तो निष्कर्ष सही नहीं होना चाहिए,
इसलिए अब मैं इस प्रमेय के बारे में कुछ विचार दूंगा सत्य है
इसलिए प्रमाण का विचार है
इसलिए यदि आप ध्यान दें कि यदि आप इस चित्र को देखते हैं तो आप देख सकते हैं कि ये बिंदु जहां व्युत्पन्न 0 के बराबर है, ये रोल प्रमेय की धारणा के तहत न्यूनतम या अधिकतम फ़ंक्शन के बिंदुओं से मेल खाते हैं।
यह दिखा सकता है कि ab में कम से कम एक बिंदु c है जहां x का f अपना न्यूनतम या अधिकतम मान प्राप्त करता है अब एक तथ्य यह है कि यदि f को बंद अंतराल पर एक सतत कार्य माना जाता है तो उसे अपना न्यूनतम और अधिकतम मान प्राप्त करना होगा तो चलो मैं इस तथ्य को लिखता हूं कि एक बंद अंतराल ab से r तक कोई भी निरंतर कार्य f परिबद्ध है और f निकट अंतराल ab पर अपना न्यूनतम और अधिकतम मान प्राप्त करता है जो कि बिंदु x शून्य y शून्य है बंद अंतराल ab में जैसे कि x का शून्य न्यूनतम मान है जिसका अर्थ है कि x शून्य का f, x के f के बराबर से कम है और y का f , बंद अंतराल से संबंधित सभी x के लिए अधिकतम मान है, ध्यान दें कि पिछला परिणाम खुले अंतराल ab पर निरंतर कार्यों के लिए सही नहीं है उदाहरण के लिए यदि आप कहते हैं कि खुले अंतराल पर fx बराबर tan x है , तो pi बटा दो से pi बटा दो निरंतर है लेकिन कोई न्यूनतम नहीं है कोई न्यूनतम मान नहीं है और न ही अधिकतम मान है ठीक यह फ़ंक्शन टैन एक्स आपने देखा होगा कि माइनस पीआई से दो से पीआई बटा टू

के बीच टैन एक्स का ग्राफ इस तरह दिखता है जैसे कि एक्स माइनस पीआई टू टू में जाता है यह नकारात्मक अनंत तक जाता है क्योंकि एक्स दो से पीआई तक जाता है सकारात्मक अनंत के लिए
 इसलिए यह फ़ंक्शन भी सीमित नहीं है, लेकिन अगर हमारे पास बंद अंतराल पर निरंतर कार्य है तो इसे बाध्य किया जाना चाहिए और इसे न्यूनतम और अधिकतम मूल्य प्राप्त करना चाहिए एक और तथ्य यह है कि यदि एफ न्यूनतम या अधिकतम मूल्य प्राप्त करता है खुले अंतराल
में जो अंत बिंदुओं पर नहीं है, तो उस बिंदु पर व्युत्पन्न शून्य होना चाहिए यदि फ़ंक्शन है यदि फ़ंक्शन f उस बिंदु पर भिन्न है तो यहां हमारे पास एक फ़ंक्शन है f इसे बंद अंतराल ab से r पर परिभाषित किया गया है और मान लीजिए कि
खुले अंतराल में न्यूनतम या अधिकतम मान प्राप्त हो गया है, तो दो मामले हैं या तो f उस बिंदु पर भिन्न नहीं है या यदि यह अलग-अलग है तो व्युत्पन्न शून्य होना चाहिए
 इसलिए उदाहरण यहां यदि मैं इस फ़ंक्शन को 0 से 1 तक देखता हूं और यह आधा है अधिकतम मूल्य आधे के बराबर x पर प्राप्त होता है, लेकिन वे कार्य x के बराबर आधे पर भिन्न नहीं होते हैं, जबकि यदि मेरे पास भिन्न होने के लिए फ़ंक्शन के साथ है यदि हमारे पास ऐसा कुछ है तो यहां फिर से अधिकतम मान यहां आधा है यदि आप देखते हैं कि आधा का अभाज्य शून्य के बराबर है, तो हम इन तथ्यों का उपयोग रोल प्रमेय को साबित करने के लिए करेंगे,
 इसलिए सबसे पहले f को बंद अंतराल ab पर निरंतर माना जाता है।

बंद अंतराल ab में मौजूद बिंदु x शून्य y शून्य जैसे कि f न्यूनतम x शून्य पर है और यह y शून्य पर अधिकतम प्राप्त करता है यह ab में सभी x के लिए सच है, ऐसा
 इसलिए है क्योंकि बंद अंतराल पर किसी भी निरंतर कार्य को न्यूनतम प्राप्त करना चाहिए और उस अंतराल पर अधिकतम मूल्य तो अब दो मामले हैं एक एक्स शून्य और वाई शून्य अंत बिंदु ए और बी हैं
 इसलिए इस मामले में लेकिन चूंकि एफ का एफ बी के एफ के बराबर है,
 इसलिए हमें यह होना चाहिए कि एक्स का एफ स्थिर है ab दायीं ओर क्योंकि इनमें से एक f का न्यूनतम मान और साथ ही अधिकतम मान है
 इसलिए x का f ab में सभी x के लिए इस मान के बराबर होना चाहिए और यदि x का f स्थिर है तो हम जानते हैं कि स्थिर फ़ंक्शन का व्युत्पन्न है 0 इसका मतलब
है कि खुले अंतराल ab में सभी x के लिए f अभाज्य x 0 के बराबर है,
 इसलिए हम ab में किसी भी c को चुन सकते हैं ताकि f अभाज्य c शून्य के बराबर हो,
 इसलिए इस मामले में हमारे पास a और f का एक स्थिर कार्य है।
    b के बराबर हैं और ये न्यूनतम और साथ ही अधिकतम मान हैं तो इस मामले में एफ प्राइम खुले अंतराल के मामले में सभी बिंदुओं पर शून्य है, दो में से कम से कम एक एक्स शून्य या वाई शून्य खुले अंतराल में है, इस मामले में हमारे पास यह है कि या तो न्यूनतम अगर यह एक्स शून्य है खुला अंतराल या तो न्यूनतम या अधिकतम मान fx खुले अंतराल अंतराल ab में प्राप्त होता है
और हमने इस तथ्य को बताया है कि यदि f खुले अंतराल में अपना न्यूनतम या अधिकतम मान प्राप्त करता है और यदि फ़ंक्शन वहां अवकलनीय है तो यह होना चाहिए शून्य तो f प्राइम
उस बिंदु पर शून्य होना चाहिए क्योंकि f को खुले अंतराल ab पर अलग-अलग माना जाता है,
इसलिए यह रोल प्रमेय को साबित करता है ठीक है मुझे बताएं कि खुले अंतराल में अधिकतम या न्यूनतम के बिंदु पर f प्राइम शून्य क्यों होना चाहिए
तो हमारे पास क्या है मान लीजिए कि हमारे पास यह बिंदु है जहां हमारे पास फ़ंक्शन का अधिकतम मूल्य है और
 इसलिए मान लीजिए कि सी का एफ एक्स के एफ के बराबर है , सभी एक्स के लिए एबी में जहां सी में है खुला अंतराल ab यह भी मान लें कि f, x के बराबर c पर अवकलनीय है, यदि यह अवकलनीय नहीं है तो हमारे पास हो सकता है कि अधिकतम वहाँ प्राप्त हो और f अभाज्य c मौजूद न हो,
 इसलिए यहाँ हम मान रहे हैं कि यह यहाँ अवकलनीय है तो हम चाहते हैं यह कहने के लिए कि ऐसा दावा है कि सी का एफ प्राइम शून्य के बराबर होना चाहिए मान लीजिए कि या तो एफ प्राइम सी शून्य से बड़ा है या सी का एफ प्राइम शून्य से कम है, अगर एफ प्राइम सी शून्य से बड़ा है तो क्या होता है अगर एफ प्राइम सी शून्य से बड़ा है तो c के xf के f की यह सीमा c के h घटा f की h से विभाजित यह f अभाज्य c के बराबर है जिसे हम मान रहे हैं कि अब शून्य से अधिक है यदि यह शून्य से अधिक है तो यदि यह सीमा अधिक है शून्य से तो छोटे h के लिए c का यह f जमा h घटा f c बटा h यह शून्य से अधिक होना चाहिए क्योंकि यदि यह h के सभी छोटे n के लिए शून्य के बराबर से कम था
तो सीमा में यह इससे कम होना चाहिए शून्य के बराबर
 इसलिए हमारे पास यह है इसका तात्पर्य है कि f का सी प्लस एच
सभी छोटे के लिए सी के एफ से बड़ा है क्योंकि सी के विरोधाभासी अधिकतम मूल्य सही है
 इसलिए 0 से अधिक व्युत्पन्न का अर्थ यह होगा कि यह फ़ंक्शन मान होना चाहिए मान x के लिए सी के मान से अधिक होना चाहिए।
 सी से इसी तरह यदि व्युत्पन्न 0 से कम है तो इसका मतलब है कि इस बिंदु पर कार्य
इस तरह नीचे जाना चाहिए, इसी तरह हमें एक विरोधाभास मिलता है यदि एफ प्राइम सी शून्य से कम है
 इसलिए सी का एफ प्राइम शून्य के बराबर होना चाहिए
 इसलिए यह रोल प्रमेय को साबित करता है जहां हम एक तथ्य का उपयोग करते हैं कि बंद अंतराल पर कोई भी निरंतर कार्य उस पर अधिकतम और न्यूनतम मान प्राप्त करना चाहिए, इसे साबित किए बिना हम मानते हैं कि लेकिन हमने इसका उपयोग करके रोल प्रमेय

को साबित कर दिया और फिर इस तथ्य का उपयोग करके कि व्युत्पन्न होना चाहिए शून्य यदि खुले अंतराल में न्यूनतम या अधिकतम मान प्राप्त हो जाता है, तो आगे हम सिद्ध करेंगे कि माध्य मान प्रमेय क्या कहलाता है,

इसलिए माध्य मान प्रमेय यहाँ रोल प्रमेय का एक सामान्यीकरण है, जैसा कि हम मान लें कि f को एक बंद अंतराल ab से rb तक परिभाषित किया जाता है

जैसे कि पहला fx बंद अंतराल ab पर निरंतर है और दूसरा fx खुले अंतराल ab पर अवकलनीय है,

इसलिए ये दोनों स्थितियां रोल प्रमेय में पहली दो शर्तों के समान हैं ।

रोल प्रमेय हमारे पास तीसरी शर्त थी कि अंत बिंदुओं पर फ़ंक्शन का मान बराबर f के बराबर f के बराबर होता है माध्य मान प्रमेय में हम यह नहीं मानते हैं कि f के बराबर f का b तो निष्कर्ष है खुले अंतराल ab में कम से कम एक बिंदु c मौजूद है, जैसे कि c का f अभाज्य b के f के बराबर है, b से विभाजित f घटा है, तो ध्यान दें कि यह रोल प्रमेय का एक सामान्यीकरण है जैसे कि f के बराबर b का f तो यह माध्य मान प्रमेय mvt के रूप में लिखेगा, तो माध्य मान प्रमेय का अर्थ है कि c मौजूद है ab कहता है कि f अभाज्य c, b के f के बराबर f का a का f है तो यह 0 है यह 0 के बराबर है रोल प्रमेय है

इसलिए रोल प्रमेय का पालन करें माध्य मान प्रमेय से निकला है, लेकिन हम रोल प्रमेय का उपयोग करके माध्य मान प्रमेय को सिद्ध करेंगे,

इसलिए प्रमाण पहले मुझे यह समझाने दें कि यह प्रमेय क्या कहता है

इसलिए मान लीजिए कि हमारे पास यह बिंदु है a और द्वि का एक फ़ंक्शन है जो इस अंतराल ab पर निरंतर है और यह है खुले अंतराल ab में अवकलनीय है और फिर देखते हैं कि a का f क्या है,

इसलिए यह बिंदु a का अल्पविराम है, यह b का अल्पविराम है अब यदि मैं इन दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा खींचता हूं तो इस रेखा का ढलान क्या है a के af और b के bf को मिलाने वाली छेदक रेखा का ढलान b का f घटा f है a का b घटा a से विभाजित है तो माध्य मान प्रमेय क्या कहता है कि कुछ बिंदु c मौजूद है जहां यह ढलान है जहां व्युत्पन्न इसके बराबर है ढलान तो इसका मतलब है कि अगर आप इस तस्वीर में देखते हैं तो मेरे पास यह बिंदु सी है यदि आप इस बिंदु पर इस स्पर्शरेखा के ढलान को देखते हैं तो यह इस रेखा के समानांतर है जिसका अर्थ है कि ढलान इस ढलान के बराबर है fb घटा f बटा b माइनस ए इसी तरह इस तस्वीर में यहाँ एक और बिंदु है यहाँ फिर से ढलान वही है जैसा कि हमें यह दिखाने की आवश्यकता है कि ab में c मौजूद है जैसे कि c के c अल्पविराम पर स्पर्शरेखा रेखा का ढलान वही है जो मैं इस ढलान को m कहता हूं तो हम जो चाहते हैं वह यह है कि एफ प्राइम सी इस ढलान के बराबर है तो आइए देखें कि समीकरण क्या है

इसलिए बी के ए और बीएफ को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण आपने दिया होगा एक समन्वय ज्यामिति में सीखा होगा कि समीकरण दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, y घटा f द्वारा दी गई

है , b के f के बराबर है, b घटा f बटा b घटा x घटा है, तो आइए इस रेखा को x का l इस y के बराबर कहते हैं।

जो कि बी के ए प्लस एफ का एफ माइनस एफ बटा बी माइनस ए गुणा एक्स माइनस ए है और एक्स के जी को एक्स के एफ के बराबर माइनस एल ऑफ एक्स के बराबर है, तो हमारे पास जी बंद अंतराल एबी पर निरंतर है क्योंकि f को निरंतर माना जाता है और x का यह l हर जगह निरंतर है और g खुले अंतराल ab aga पर अवकलनीय है क्योंकि f को अवकलनीय माना जाता है और l को हर जगह

अवकलनीय माना जाता है, a के ag का g, a के माइनस l के f के बराबर है, लेकिन l इस बिंदु af को a के bf के साथ जोड़ने वाली रेखा है,

इसलिए a का l यह a के f के बराबर है, यदि आप x को a के बराबर रखते हैं , तो x का l, a का l है, a का f के बराबर है, a का f का f है, जो कि a का f है और b का g बराबर है b का f घटा b का l क्या है b का l यह b का f के बराबर है b का l फिर से b के f के बराबर है

इसलिए यह भी 0 है

इसलिए a का g b के g के बराबर है तो अब हमारे पास a है x का फलन g जो बंद अंतराल पर निरंतर है और खुले अंतराल पर अवकलनीय है और a का g, b के g के बराबर है,

इसलिए हम रोल प्रमेय को लागू कर सकते हैं ताकि रोल प्रमेय द्वारा ab में कम से कम एक c मौजूद हो, जैसे कि g अभाज्य c का शून्य के बराबर है लेकिन x के xg का g क्या है, x का f घटा x का l है लेकिन x का g अभाज्य f अभाज्य x के बराबर है और x का अभाज्य है और x का अवकलज l अभाज्य और कुछ नहीं है इस रेखा का ढलान तो यह बराबर है f अभाज्य x घटा b का ढलान f घटा f a बटा b घटा a

इसलिए g अभाज्य c बराबर 0 का तात्पर्य है कि f अभाज्य c, b के f के बराबर f के बराबर है बी माइनस ए यह वही है जो हमें अब साबित करना था कि हम

इस रोल प्रमेय और माध्य मूल्य प्रमेय के कुछ अनुप्रयोगों को देखेंगे,

इसलिए एक कोरोलरी है मान लीजिए कि एफ से एबी से आर निरंतर है और मान लीजिए कि हम व्युत्पन्न एफ प्राइम एक्स यह मानते हैं खुले अंतराल में सभी x के लिए 0 के बराबर ab तो f स्थिर होना चाहिए फिर f स्थिर होना चाहिए मान लें कि x एक और x दो अंतराल में कोई भी दो अलग-अलग बिंदु हों ab हमें यह दिखाना होगा कि x का f होना चाहिए x दो के f के बराबर लेकिन हम जो जानते हैं वह यह है कि माध्य मान प्रमेय द्वारा खुले अंतराल x एक x दो में कुछ c मौजूद हैं जैसे कि f अभाज्य c , x के f के बराबर है दो घटा x का f x एक बटा x दो घटा x एक ऐसा

इसलिए है क्योंकि हम जानते हैं कि फलन बंद अंतराल x 1 x 2 और में निरंतर है यह इस खुले अंतराल में अवकलनीय है

इसलिए माध्य मान प्रमेय द्वारा कुछ c ऐसा है कि f अभाज्य c इस अनुपात के बराबर है लेकिन f अभाज्य x ab में सभी x के लिए 0 है

इसलिए f अभाज्य c 0 के बराबर है
इसलिए x का f दो x एक के f के बराबर होना चाहिए,
इसलिए यह माध्य मान प्रमेय का एक अनुप्रयोग है कि यदि फलन अवकलनीय है और एक खुले अंतराल पर व्युत्पन्न शून्य है तो फलन उस अंतराल में स्थिर होना चाहिए ताकि अगली कक्षा में हम माध्य मान प्रमेय के कुछ और अनुप्रयोग देखेंगे और फिर हम कुछ और समस्याएँ देखेंगे धन्यवाद