مشتقات کے دوسرے لیکچر میں خوش آمدید

اس لیے آخری لیکچر میں ہم نے ایک نقطہ پر فنکشن کے تسلسل کے تصورات پر بحث کی تھی اور ساتھ ہی ہم نے اس بات پر بھی بات کی تھی کہ ایک نقطہ پر فنکشن کے مشتق سے ہمارا کیا مطلب ہے اور پھر ہم نے آج مشتقات کی کچھ خصوصیات دیکھی ہیں۔ سب سے پہلے تسلسل اور تفریق کے درمیان تعلق کو دیکھیں گے اور پھر ہم کچھ اور فنکشنز کے مشتق کا حساب لگائیں گے تو سب سے پہلے جس چیز پر میں بحث کرنے جا رہا x میں r پر غور کریں۔ f ہوں وہ یہ ہے کہ کیا تسلسل اور تفریق کے درمیان کوئی تعلق ہے تو سب سے پہلے ایک مثال دیکھتے ہیں تو فنکشن کے mod x مثبت کے لیے x کسی بھی fx برابر ہے تو آئیے ہم اس فنکشن کا گراف کھینچنے کی کوشش کریں تو x کا mod x کے لیے کے برابر x کے لئے x کے برابر ہے fx کے برابر ہے تو یہ بھی ہے۔ x منفی کے لیے یہ مائنس x کے برابر ہے اور x برابر ہے یہ صفر سے کم صحیح یہ اس فنکشن کی بہت آسان لیکن مفید نمائندگی ہے اور گراف اس طرح لگتا ہے x کے لئے x صفر سے زیادہ اور مائنس مسلسل ہے تو یہاں اس فنکشن کا گراف کھینچنا fx ہے اب بتائیں ہم پوچھیں کہ کیا فنکشن صفر کے برابر ہے fx کے موڈ کے برابر x لہذا یہ ہے تو حد f کا x آسان تھا اور اس گراف سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فنکشن صفر پر مسلسل ہے لیکن ہم حد کا حساب بھی لگا سکتے ہیں تو حد کی دائیں ہاتھ کی حد کا حساب لگاتے f کی x کا حساب لگانے کے لئے یہاں بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کی حد کا حساب لگانا مفید ہے لہذا اگر آپ ہے mod h کے برابر ہے h کے صفر جمع کرنے کی حد f کے h صفر پر جاتا ہے یہ کیا ہے؟ h کے طور پر h صفر جمع f ہیں تو صفر جمع پر جاتا ہے جو صفر کے برابر ہے اسی طرح بائیں h کی حد کے برابر ہے جیسا کہ h کو مثبت سمجھ رہے ہیں یہ s لیکن چونکہ ہم h کے صفر مائنس پر جا رہا ہے لیکن یہاں کیونکہ mod h کی حد کے برابر ہے h پر جانا یہ h کے 0 پلس f مائنس h 0 ہاتھ کی حد x صفر جا رہا ہے لہذا مائنس صفر ہے صفر کے برابر بھی ہے لہذا حد موجود ہے لہذا h کے برابر ہے لیکن h مائنس mod h صفر مائنس کی حد f کی x f لہذا 0 کا o ہے s موڈ 0 ہے جو 0 f کا 0 f صفر تک پہنچتی ہے یہ 0 کے برابر ہے بھی x کی حد جب f کی صفر کے برابر ہے fx پر لگاتار ہے اب تفریق کے بارے میں کیا ہے کہ x صفر کے برابر fx صفر کے قریب پہنچتا ہے لہذا x ہے کیونکہ پر جاتا ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ صفر کا 0 h جیسا کہ h کا 0 بذریعہ f مائنس h کی حد ہے جمع 0 f تو ہمیں یہ پوچھنا ہوگا کہ یہ حد f کے برابر ہے۔ مائنس f کے h غیر صفر لیں اور اس فرق کو دیکھیں یہ h کیا ہے اگر ہم کوئی h صفر کا f مائنس h کیا ہے جمع f mod h ملتا ہے اب ہم جانتے ہیں کہ h بذریعہ mod h سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہمیں h کا 0 کو 0 mod hf کا f اور h کا 0 بذریعہ کے برابر ہے تو h مائنس mod h منفی ہے تو h ہے مثبت اور اگر h مثبت ہے تو یہ ایک کے برابر ہے اگر h کے برابر ہے اگر h برابر ہے تو یہ مائنس h مثبت ہے اور اگر h مائنس ون دے گا تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ فرق کوزائن مستقل 1 کے برابر ہے اگر h بذریعہ h مائنس f مائنس h صفر کے برابر نہیں ہے جمع صفر کے f کے برابر ہے۔ منفی ہے لہذا بائیں ہاتھ کی حد اور دائیں ہاتھ کی حد دائیں ہاتھ کی حد 1 f منفی h کا جمع f صفر ہو جائے گی۔ صفر کے h سے تقسیم کیا گیا ہے لہذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اس وجہ سے یہ حد h کو x پر تفریق نہیں کیا جا سکتا ہے تو x صفر کے برابر f کا فعل x سے تقسیم کیا گیا یہ موجود نہیں ہے جس کا مطلب ہے کہ h صفر کو میں اس گراف پر واپس آتا ہوں اور آپ a کے برابر ہے x پر لاگو کیا جاتا ہے f کے x کا مطلب نہیں ہے a کا نتیجہ کیا ہے f کے برابر کو ہندسی طور پر یہ بھی بتاتا ہوں کہ آپ کس طرح یہ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ فنکشن اس پوائنٹ صفر پر قابل تفریق نہیں ہے لہذا ہم نے ہندسی تشریح دیکھی ہے کہ مشتق اگر یہ موجود ہے یہ اس وقت ٹینجنٹ لائن کی ڈھلوان کے برابر ہے اب اگر آپ اس فنکشن کے گراف کو دیکھیں تو کوئی منفی میں ہے تو ہمارے پاس x منفرد ٹینجنٹ لائن نہیں ہے کیونکہ کسی بھی مثبت چیز کے لیے آپ کو نظر آتا ہے کہ یہ ٹینجنٹ لائن ہے لیکن اگر یہ لائن ہے لہذا یہاں کوئی منفرد ٹینجنٹ لائن نہیں ہے اور درحقیقت آپ دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ سے مشتق اس لائن کی ڈھلوان کے سوا کچھ نہیں ہے جو 1 ہے اور بائیں ہاتھ سے مشتق اس لائن کی ڈھلوان ہے جو مائنس 1 ہے اور وہ برابر نہیں ہیں۔ لہذا فنکشن مختلف نہیں ہے۔ ریئٹی ایبل عام طور پر جب بھی آپ کے فنکشن کے گراف میں آپ کو کوئی کارنر پوائنٹ نظر آتا ہے تو اس مقام پر فنکشن میں فرق نہیں ہوگا لہذا تسلسل ہم نے کہا کہ گرافیکلی ہے اس کا مطلب ہے کہ آپ اپنا قلم اٹھائے بغیر فنکشن کا گراف کھینچ سکتے ہیں۔ اور تفریق کا مطلب یہ ہے کہ فنکشن کا کوئی گوشہ نہیں ہونا چاہیے حالانکہ پیچیدہ فنکشنز کے لیے ہم صرف اس تشریح کو استعمال نہیں کر سکتے

کسی مقام پر x کا f اس لیے ہمیں ریگریس ڈیفینیشن کو بھی جاننا ہو گا تو اب بات چیت کا کیا ہوگا تو کنورس سچ ہے لہذا تھیوریم یہ ہے کہ اگر کے اور ثبوت بہت آسان ہے آپ کو صرف اس بات a کے برابر x کا مسلسل ہونا ضروری ہے f کا x کے برابر پھر x a متفرق ہوتا ہے کی حد کے برابر f کی h ہے۔ جو کہ ایک جمع a پرائم f کے برابر ہے ہمارے پاس a کے برابر x f کا x کو نوٹ کرنا ہوگا کیونکہ کی حد کو دیکھنے کی ضرورت f کی f سے یہ اس وقت موجود ہے فنکشن کے تسلسل کو جانچنے کے لیے ہمیں h کی تقسیم f ہے مائنس کا a کی حد کے برابر ہونے کے لئے f کی x ہمیں a برابر x کے قریب پہنچتا ہے تاکہ تسلسل کو چیک کیا جا سکے ۔ x a ہے کیونکہ h کی حد کے طور پر بھی لکھ سکتے ہیں جہاں f کی h کے قریب آتا ہے نوٹ کریں کہ اس حد کو ہم جمع a اب x درکار ہے جہاں f کے برابر جمع x تک پہنچتا ہے جو کہ برابر ہے تو یہ ڈال کر h پھر x a کے برابر ڈال کر اگر h کو جمع x صفر کے دائیں طرف آتا ہے کے قریب آتا ہے 0 کے قریب پہنچتا ہے۔ تو ہمیں یہ دیکھنا ہوگا کہ آیا h a x ہے اور پھر جیسے ہی a مائنس x h کے برابر ہے جو کہ h کے برابر ہے اگر آپ دیکھتے ہیں کہ یہ f کے a تک پہنچتا ہے 0 موجود ہے یا نہیں اور کیا یہ اب h کے طور پر ہے۔ f کی یہ حد h جمع h کا جمع a لکھنے کی حد کے برابر ہے h کے برابر f کے a کے 0 کے قریب پہنچنا f کی حد hh وہی چیز ہے جس طرح ایک جمع ہے لہذا ہمارے f کا a کے قریب پہنچتی ہے 0 جو کہ h کی حد f کے اس مستقل فعل a کا یہ 0 حق کے برابر ہے کیونکہ f a مائنس h کے اسے f a مائنس h کے جمع f کے لیے صفر h پاس یہ ہے اب یہ مشتق کی تعریف میں فرق کوانٹینٹ کا عدد ہے۔ تو لیکن کسی بھی سے h حق کے طور پر لکھا جا سکتا ہے میں نے صرف اسے ضرب دیا اسے حاصل کرنے کے لیے h کی تقسیم a کے f مائنس h ضرب تقسیم کیا گیا اور جو ہم جانتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ حد موجود ہے

تک جاتا ہے۔ حد کے h سے f کے مائنس h جمع a کے f کو صفر h کی حد 0 پر جاتی ہے تو یہ 0 کے برابر ہے اور حد h اس لیے تک جاتی ہے اگر دونوں فنکشنز f مائنس h کے جمع a f کی حد ہے جو 0 h لیے پروڈکٹ کے اصول کے مطابق بھی موجود ہے ہمارے پاس مسلسل ہے fx جو کہ 0 کے برابر ہے لہذا f prime a کی حد موجود ہے تو پراڈکٹ کی حد حد کی پیداوار ہے لہذا یہ 0 گنا کے برابر ہے۔ کے تو ہم نے جو دیکھا ہے وہ یہ ہے کہ کسی نقطہ پر کسی فنکشن کی تفریق اس مقام پر فنکشن کے تسلسل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ a برابر x تسلسل کا مطلب فرق کی ضرورت نہیں ہے جسے ہم نے دیکھا ہے۔ جوابی مثال کے ذریعے تو آگے کچھ اور مشتقات کا حساب لگانے کے لیے آئیے کے dx سیکھتے ہیں کہ مشتقات کے لیے پروڈکٹ کا اصول کیا کہا جاتا ہے تو یہ کیا کہتا ہے کہ اگر میں دو فنکشن لے کر پروڈکٹ کو دیکھوں تو f prime فراہم کی گئی x times gx plus fx times g prime x کے برابر ہے . f prime یہ fx times gx کے dx لکھتے ہیں پھر ہمیں دیکھنا ہوگا کہ x کا u کے برابر gx اوقات fx موجود ہے ۔ ہم اس کو ثابت کریں گے تو آئیے g prime x اور x سے تقسیم کیا جائے تو آپ کو دیکھنا ہوگا کہ یہ کیا ہے؟ مجھے یہ لکھنے h کو x کے u مائنس h جمع x کے u غیر صفر h کسی بھی x ضرب x کا f مائنس h جمع x کا x گنا h جمع x کا f کی پیداوار ہے تو میں حاصل کرتا ہوں g اور f دو یہ یو کے برابر ہے جمع x کے f سے تقسیم اب ہم یہاں تھوڑا سا الجبری ہیرا پھیری کرتے ہیں۔ تو ہم اس کو جوڑتے اور گھٹاتے ہیں ہم اسے لکھتے ہیں h کا x کے جوڑتے h جمع x کے g کے x x کا اور پھر ہم اسی مقدار کو دوبارہ h جمع x کا g گنا x کا f مائنس h جمع x کے hg سے تقسیم کیا تو ہم اس طرح لکھتے ہیں اور پھر پہلی دو اصطلاحات اور آخری دو ٹرمز کو h کو fxgx ہیں اور پھر ہمارے پاس مائنس ہوتا ہے۔

ux مائنس h جمع x کا جی مشترک ہے تو ہمیں یو کا h جمع x گروپ کرتے ہیں اب اگر آپ پہلی دو اصطلاحات کو دیکھیں تو ہمارے پاس
اور پھر پلس اگلی دو h جمع x کے g x سے تقسیم کیا گیا اس بار h کو x کے f مائنس h کے برابر ہے f کے x یہ h سے ملا۔
سے اب اگر ہم h تقسیم g کا x مائنس h جمع g کا x گنا fx مشترک ہے اس لئے میں لکھوں گا fx اصطلاحات میں ہمارے پاس
سے h کو x کا f مائنس h پر جاتا ہے اور x کے f صفر کے h اب حد ہے کیونکہ k دیکھتے ہیں۔ دائیں طرف کی دو اصطلاحات پر
کی اس h پر فرق ہے دوسری اصطلاح کے بارے میں کیا ہے f x کے برابر ہے کیونکہ x پرائم f تقسیم کیا جاتا ہے یہ ہم جانتے ہیں کہ
پر مسلسل ہے g x کے برابر ہے ایسا کیوں ہے کیونکہ g کے x یہ صرف h کے علاوہ x کے 0 تک جا رہی ہے g پروڈکٹ کی حد میں
g x کے دائیں پر تفریق کرنے کے لئے دیا گیا ہے لہذا نوٹ کریں کہ ہم استعمال کر رہے ہیں تھیوریم کہ ہم نے ثابت کیا کہ اگر x کیونکہ اسے
پر مسلسل ہے یہ حد فنکشن x کے قریب جاتا ہے اور چونکہ یہ h x جمع h 0 x پر متفرق ہے تو یہ بھی مسلسل ہے تو اس کی حد کیونکہ
کے g مائنس h کے علاوہ g کے 0 x کی حد ہے جو h پر اسی طرح دوسری اصطلاح میں ہمارے پاس x کی قدر کے برابر ہونی چاہئے۔
کا x ہے لہذا اس حد کو f کا x سے آزاد ہے یہ h پرائم کے برابر ہے اور پہلی اصطلاح g کے x سے تقسیم کیا جائے تو یہ h کو x
h thi کو ux مائنس h پلس ux کی حد کے برابر ہے جو صفر h موجود ہے جو x پرائم u ہے لہذا ہمارے پاس یہ ہے کہ یہ حد f
f کی x ہے جمع یہاں پہلی اصطلاح صرف g کی x دوسری کی حد یہ x پرائم f پہلی حد کے برابر ہے یہاں s سے تقسیم کیا جاتا ہے۔
ہے تو یہ بہت اہم فارمولا ہے اور مجھے یہ فارمولہ اخذ کرنے دو مجھے ایک انتباہ کے طور پر لکھنے دو کہ g prime x ہے دوسری کی حد
f prime x times g prime x آپ کو یہ نہیں لکھنا چاہیے کہ یہ صرف اتنا ہے کہ مجھے d by dx of fx times gx
کے g prime x وہ ہے جو f prime x پھر x x مساوی gx مساوی fx لکھنے دیں یہ درست نہیں ہے مثال کے طور پر اگر آپ لیں
ہے d x مربع کا d x x کا d x fxgx مربع کے برابر ہے تو fx times gx x کا کیا ہوگا لیکن fx times dx برابر ہے لیکن
کے برابر نہیں ہے لہذا شروع میں بہت سے طلباء یہ g prime x اوقات f prime x کے برابر ہے یہ x جو ہم نے دیکھا ہے کہ 2
غلطی کرتے ہیں اور جب وہ افعال کی پیداوار دیکھتے ہیں اور پھر ایک مشتق کو محدود کرتے ہیں تو وہ مشتق کی مصنوع کے طور پر لکھتے ہیں۔
x cub بالکل غلط ہے لہذا اب اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم کچھ اور مشتقات حاصل کر سکتے ہیں لہذا مثال کے طور پر فرض کریں کہ آپ
مربع کا مشتق ہے اور x تلاش کریں تو ہم کیا جانتے ہیں کہ ہم جانتے ہیں کہ f prime x اور پھر e برابر چاہتے ہیں fx کہنے کے لئے
x کے برابر ہوگا۔ دوسرا فنکشن ہے d x مربع اوقات کے x x پرائم f کے برابر ہے لہذا x مربع اوقات x یہاں f مکعب x کا x x
مربع ملتا x مربع جمع x مربع ضرب 1 تو ہمیں دو x جمع x x جو کہ پہلے مشتق کے برابر ہے dx 2 کا d x x مربع بار x جمع
کوئی قدرتی نمبر ہے لہذا ایک n تک جہاں n سے dx کے dx کا حساب لگانا d مربع ہے تو آئیے مشتق کا حساب لگاتے ہیں۔ x ہے جو تین
طریقہ یہ ہوگا کہ اس مشتق کو حاصل کرنے کے لیے پروڈکٹ رول کو تیزی سے استعمال کریں یا آپ براہ راست حد کا حساب لگانے کی کوشش
کے لیے n کے x برابر ہے fx بھی کر سکتے ہیں تو آئیے دیکھتے ہیں تو ہمارے پاس
کے برابر ہے h جمع x سے تقسیم کیا گیا تو یہ x کو f مائنس h جمع x کے f غیر صفر کے لیے اگر میں دیکھتا ہوں کہ h اس لیے
n جمع n کو x ہم لکھ سکتے ہیں s جمع x کو n سے تقسیم اور اگر آپ نے بائنومیئل تھیوریم دیکھا ہے تو n سے x مائنس n طاقت
مربع اور اسی طرح h دو nus کے لئے منتخب کریں n mi کو x منتخب کریں دو n جمع h مائنس ایک بار n کو x منتخب کریں ایک
اس کے ساتھ منسوخ n کو x سے تقسیم کیا گیا ہے اب یہاں اگر آپ اس h کو n سے x اور پھر مائنس n سے h آخری اصطلاح تک
ایک کا انتخاب n اوقات کے برابر ہے h مشترک ہے تو ہم حاصل کرتے ہیں کہ یہ h کرتے ہیں اور اب آپ نوٹ کریں کہ ہر اصطلاح میں
کے علاوہ دیگر اصطلاحات جن میں h مائنس دو گنا n سے x کا انتخاب ہے دو n مائنس ون کے علاوہ ہمارے پاس n سے nx صرف
کو منسوخ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اس پہلی اصطلاح کے علاوہ ہر اصطلاح میں h سے تقسیم کیا گیا ہے اس h مائنس 1 کو n سے hh
مربع کے h یا h پر جاتا ہے کیونکہ باقی تمام اصطلاحات ہمیں 0 h مائنس 1 تک پہنچتا ہے کیونکہ n سے x گنا n شامل ہے لہذا یہ h
طور پر ملتی ہیں تو وہ صفر پر جاتی ہیں لہذا یہ ثابت ہوتا ہے
بعد میں ہم دیکھیں گے کہ یہ حقیقت n مائنس 1 ہر فطری نمبر کے لئے n کے x گنا n کے برابر ہے n n کا dx x بذریعہ d اس لیے
کے dx مربع کے x قدرتی نمبر نہیں ہے تو پہلی بات کہ اب اس سے آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ n میں درست ہے یہاں تک کہ اگر
سے تین مائنس ون جو x ہو تین گنا xd x dx کیوب کا دو x سے دو مائنس ون ہے تاکہ x کا حساب لگانا ہے تو یہ دو گنا d حساب سے
مکعب ہے اور x سے چار ہے لہذا آپ ایکسپوننٹ کو نیچے لائیں اور پھر ایکسپونٹ کو 1 سے کم کریں یہ dx 4 کے d x x مربع x تین
یہ بعد n اصل میں کسی بھی حقیقی نمبر کے لئے درست ہے n کا x اسی طرح اس کے مشتق کے لئے اوپر والے فارمولے پر تبصرہ کریں
لیتے f کا x کا حساب لگانے کی کوشش کریں تو اس کا مشتق حاصل کریں ہم n سے x میں ثابت ہو جائے گا لیکن آئیے کچھ منفی کے لئے
تو آئیے ہم اپنے پہلے اصول کو استعمال کرتے ہوئے کرتے ہیں جو کہ مشتق کی تعریف prime x کیا ہے f کے برابر ہے تو x x ہیں 1
x by h مائنس ایک x x plus h سے تقسیم کیا گیا تو یہ برابر ہے h کو x کے f مائنس h جمع x کے f ہے لہذا اگر ہم دیکھیں
ہے تو h جمع x مائنس x ملے گا اور پھر ہندسہ h جمع x ضرب x بار h سے تقسیم اور پھر اگر آپ اس کو آسان بناتے ہیں تو آپ کو
کو منسوخ کر سکتے ہیں اور یہ مائنس ون کے برابر h ملتا ہے اور پھر آپ اس h پلس hyhxx منسوخ ہو جاتا ہے اور ہمیں مائنس x یہاں
غیر صفر کے لیے درست ہے اور h یہ کسی بھی h جمع x اوقات x ہے۔
مربع کیونکہ یہاں پر x کے برابر ہے مائنس 1 بذریعہ h x x کا f مائنس h کے علاوہ x کے f صفر کے h اس لیے حد جس طرح
کے لئے درست ہے صفر کے برابر نہیں x مربع دیتا ہے یہ تمام x x بار x جمع 0 تک پہنچتا ہے اس لئے h x جمع x آپ دیکھیں گے کہ
اس لئے یہ فنکشن صفر پر بھی متعین نہیں ہے لہذا ہم نہیں کر سکتے صفر پر مشتق کے بارے میں بات کریں لیکن کسی بھی ایکس کے لئے جو
کے برابر نہیں ہے۔ نوٹ کریں کہ 0 x مربع کے لئے x x کے برابر مائنس d x dx 1 x x 1 صفر کے برابر نہیں ہے ہمیں ملتا ہے کہ
n کے nx کے برابر n کے dx کے d x میں یہ لکھ سکتا ہوں کہ یہ وہی ہے فارمولہ مجھے لکھنے دو یہ اس فارمولے سے متفق ہے
سے مائنس x سے مائنس ایک ہے یہاں n کو مائنس ون کے برابر دے گا dx کے d x کے برابر مائنس ون کے یہ n کے مائنس ایک کے
مربع رائٹ کے برابر ہے اور اگر آپ دوسرے منفی ایکسپونٹس x سے مائنس ٹو کے برابر ہے جو کہ مائنس ون بائے x ون مائنس ون جو مائنس
سے مائنس x کے dx بذریعہ d کے لیے چاہتے ہیں تو آپ پروڈکٹ رول استعمال کر سکتے ہیں۔ پروڈکٹ کے اصول کا استعمال کر سکتے ہیں
d by مائنس ٹو ایک جیسا ہے e تک th سے dx کے d x سے مائنس تھری وغیرہ تو مثال کے طور پر dx کے x بذریعہ d ٹو یا
کا x x مربع ہے یہ 1 x x اور اب آپ پروڈکٹ کا اصول استعمال کرتے ہیں یہ وہی چیز ہے جو مائنس dx of one by x x 1 x x 1
مربع یہ پروڈکٹ کے اصول کے x گنا دوسرے فنکشن کا مشتق مائنس 1 بذریعہ x ہے نیز پہلا فنکشن 1 بذریعہ x x مشتق ہے دوسرا فعل 1
مطابق ہے اور یہ مائنس 1 بذریعہ ایکس مکعب مائنس 1 بذریعہ ایکس مکعب دیتا ہے لہذا مائنس 2 بائی ایکس مکعب یقیناً یہ دوبارہ متفق ہے فارمولہ
ہے مائنس 1 ٹھیک ہے اب یہ دیکھ کر ہم ایک اور فارمولہ اخذ کر سکتے ہیں جو ہم نے پروڈکٹ کے لئے کیا تھا x گنا n سے n کا x ڈیریویٹو
ہم دو فنکشنز کے کوزائن کے فارمولے کو اخذ کرنے کی بھی وضاحت کر سکتے ہیں تو آئیے اس کا حساب لگانے کی کوشش کریں اس کا کہنا ہے
x کے برابر ایک x کے let g کے برابر اور تو پھر ہم پوچھتے ہیں کہ a کے برابر x متفرق تفریق ہے f کا x کہ فرض کریں کہ
کے مشتق کا حساب لگایا ہے آئیے یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ آیا ہم ایف x کے برابر ہے بالکل اسی طرح جیسے ہم نے ایک بذریعہ f کے

ایکس کے ذریعہ ایک کے مشتق کا حساب لگا سکتا ہے لہذا اگر آپ دیکھیں تو میں لکھوں گا کہ مشتق کیا ہے جو ہمیں اس سے حاصل ہوگا ای ثبوت
مائنس h کے ایک سے ایک جمع f سے تقسیم کیا گیا ہے یہ برابر ہے h کو دیکھتا ہوں جو کہ g کے مائنس g کے h تو اگر میں ایک جمع
کے af کے f سے تقسیم کیا جاتا ہے h کو h جمع a کے برابر ہے f کے مائنس f کے اور یہ h کے ایک سے تقسیم f ایک کے
a سے اس کو نکالنے دیں اور پھر h کی تقسیم f کے مائنس h جمع a کے f کے منفی f کے اور یہ وہی چیز ہے جیسے h ایک جمع
h جمع f کی یہ حد f اب دیکھتے ہیں کہ کیا اب حد موجود ہے جو ہم جانتے ہیں وہ یہ ہے کہ h کے 1 سے ضرب جمع f کے گنا f کے
h پلس a کا f ہے تو یہ f ضرب x کا 1 h کے قریب آتی ہے اور یہاں میرے پاس جمع a پرائم f یہ h کی طرف سے f مائنس
f کو ایک مربع کے a پرائم f کے برابر ہے مائنس a پرائم g تک پہنچتا ہے لہذا ہمیں جو ملتا ہے وہ یہ ہے کہ اس کی حد f کے a یہ
کے a لکھ رہا ہوں اور ہم یہ پوچھ رہے ہیں کہ کیا یہ ایکس کے برابر ہے fx کے برابر 1 x کا g سے تقسیم کیا گیا ہے یقیناً یہاں جب میں
g prime a کے برابر نہیں ہے تو 0 f کا a کی وضاحت ضروری ہے تو ہمارے پاس وہ ہونا ضروری ہے اور a کے برابر ہے لہذا g
قاعدہ تو یہ کہتا ہے ient سے تقسیم اور پھر ہم مزید عمومی اقتباس حاصل کر سکتے ہیں۔ f کے برابر ہے ایک مربع کے a پرائم f مائنس
fx کا ماخوذ cosine d کے برابر نہیں ہے تو 0 g کا a ہیں جو دونوں کسی مقام پر مختلف ہیں اور gx اور fx کہ اگر میرے پاس
مربع x کے x کو x پرائم g کے اوقات f مائنس x کے x کے سوا کچھ نہیں ہے۔ f prime x یہ مشتق gx بذریعہ dx کے
لکھ کر کرسکتے ہیں لیکن یہاں نوٹ کریں کہ ہم نے ah سے تقسیم کیا گیا ہے اور ثبوت یہ ہے کہ آپ فرق کوزائن کی حد کے طور پر صرف
پروڈکٹ کا اصول اخذ کیا ہے اور اخذ کیا ہے۔ فنکشن کے باضابطہ کا
اس لیے ہم اسے استعمال کر سکتے ہیں
اور پھر پروڈکٹ کے اصول کے gx گنا ایک بذریعہ fx لکھ سکتے ہیں بطور پراڈکٹ dx by gx fx by gxi کے d by fx اس لیے
gx کے برابر ہے۔ میں اسے یہاں لکھتا ہوں تو یہ پہلے فنکشن کا مشتق ہے ایک سے dx بذریعہ d بار f prime x لحاظ سے پہلا یہ
یہ پروڈکٹ کے اصول کے مطابق ہے اور پھر ہم جانتے ہیں کہ مشتق کیا ہے gx ایک کا dx کا d گنا دوسرے فنکشن کا مشتق x کا f پلس
کو مائنس جی e مشتق کا گنا ہے fx کے علاوہ دوسرا جمع g کے x کے برابر ہے x پرائم f تو یہ gx ایک کے بذریعہ dx بذریعہ d
گنا جی x پرائم f مربع کا عام ڈینومینیٹر جی لیتے ہیں تو ہمیں x کے مربع کے دائیں طرف اور پھر اگر آپ x سے تقسیم کیا جاتا ہے x پرائم
رائٹ ملتا ہے تو آئیے پروڈکٹ کے اصول کا خلاصہ کریں اور اقتباس کا اصول تو پروڈکٹ کا اصول بعض x گنا جی پرائم fx مائنس x کا
پرائم ہے اور uv جمع v پرائم ٹائمز u کا مشتق uv کا استعمال کرتے ہوئے بھی لکھیں گے اگر یہ دو فنکشن ہیں تو uv اوقات ہم اس اشارے
مربع u prime v minus uv prime divided by v مشتق اعظم کے برابر ہے u by v ہے i اقتباس کا قاعدہ یہ ہے کہ اگر
یہ پروڈکٹ کا اصول ہے اور یہ اقتباس کا قاعدہ ہے اور یہ اصول مشتقات کا حساب لگانے کے لیے بہت اہم ہیں تو ٹھیک ہے آئیے کچھ اور مشتقات
کے لئے بیان کیا x یہ صفر سے بڑے تمام x مربع جڑ fx equal to کا حساب لگاتے ہیں تو ایک میں کروں گا ایک اور مثال مشتق ہے کہ
کوئی x اگر f x x x مائنس h جمع x کا f پر شمار کرنا چاہتے ہیں لہذا x گیا ہے لہذا ہم اس فنکشن کے مشتق کو کسی بھی مثبت
مثبت ہے تو x سے تقسیم کیا جاتا ہے اور اگر h کا مربع جڑ x مائنس h کا مربع جڑ جمع x مثبت حقیقی نمبر ہے تو اسے ہم لکھ سکتے ہیں۔
بھی مثبت ہے لہذا ہم اس مربع جڑ کے بارے میں بات کر سکتے ہیں اور پھر ہم اس کی حد تلاش کرنا چاہتے ہیں کیونکہ h کے علاوہ hx چھوٹے
صفر پر جاتا ہے لہذا حد کا حساب لگاتے ہوئے ہم نے اس کی حد کا حساب لگایا ہے۔ ٹائپ کریں تو ایسا کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ آپ مربع h
سے ضرب اور تقسیم کریں اور پھر آپ کو عدد میں جو x جمع مربع جڑ h جمع x سے x کو مربع جڑ x جمع مربع جڑ h پلس x جڑ
میں منسوخ ہو x اور پھر عدد x جمع مربع جڑ h جمع x سے تقسیم کیا جائے گا۔ گنا مربع جڑ h کو x مائنس h جمع x ملے گا آپ کو
تک x جو ایک سے دو مربع جڑ x جمع مربع جڑ h جمع x کو منسوخ کر سکتے ہیں جو آپ کو ایک بذریعہ مربع جڑ h جاتا ہے اور پھر آپ
کے لئے ایک بائے دو x صفر سے زیادہ تمام dx بذریعہ d کا x صفر پر جاتا ہے۔ تو ہمیں جو ملا وہ یہ ہے کہ مربع جڑ h پہنچتا ہے جب
لکھتے x کے ساتھ متفق ہے کیونکہ اگر میں لکھتا ہوں اگر ہم مربع جڑ n سے x کے برابر ہے دوبارہ نوٹ کریں کہ یہ فارمولہ x مربع جڑ
جو کچھ بھی نہیں oot x کے برابر ہے r مربع 2 x جو 1 x مربع جڑ dx بذریعہ d کی طاقت ایک نصف پھر مشتق x ہیں۔ جیسا کہ
کے لئے پاور نصف مائنس ون کے برابر ہے تو یہ بھی فارمولے سے x گنا 2 x کے لئے پاور منفی نصف جو 1 x گنا 2 x ہے مگر 1
مائنس ون اگرچہ ہم نے یہ فارمولہ صرف مثبت عدد کے لیے اخذ کیا ہے لیکن n سے x گنا n کے برابر ہے n کے x کے d x متفق ہے
برابر نصف کے لیے متفق ہے اور بعد میں ہم دیکھیں n کے برابر مربع n کے برابر مائنس ون کے لیے متفق ہے اور n ہم نے دیکھا ہے کہ یہ
کی کچھ طاقتوں کے x ایک اور مثال کے لیے جو میں کروں گا وہ یہ ہے کہ اب تک ہم نے صرف n گے کہ یہ اس میں ہے حقیقت میں کسی بھی
مائنس h جمع x کے f کے مشتق کا حساب لگاتے ہیں لہذا اگر ہم دیکھیں کہ fx کے برابر sin x مشتقات کا حساب لگایا ہے لہذا آئیے
مائنس c سے تقسیم کرنے کے برابر ہے اور پھر آپ کو یاد ہوگا کہ h کو x مائنس گناہ h جمع x سے تقسیم کیا گیا ہے۔ یہ سائن x کو f
برابر ہے دو گنا کوسائن سی جمع sin d مائنس sin c کے برابر ہے ٹھیک ہے cos کے دو گنا d کا فارمولا کیا ہے یہ جمع d سائن آف
جمع x کے برابر ہوگا ہے دو d جمع cos c ڈی دو گنا سائن سی مائنس ڈی بائی دو تو ہمارے پاس سائن ایکس پلس ایچ مائنس گناہ ہے یہ دو
سے دو اور h دو سائن h
اور پھر ہمیں پوچھنا ہے کہ h سے دو تقسیم h دو سائن h جمع x دو cos یہ برابر ہے دو h بذریعہ fx مائنس h جمع fx اس لیے
سے دو سے تقسیم کیا گیا ہے اور اب یاد رکھیں h سے دو کو sine h کے برابر ہے دو گنا cos کی h جمع x کیا یہ حد موجود ہے؟ یہ
سے cos x plus h 2 اور پہلی اصطلاح h کی حد fx مائنس h جمع fx کے صفر پر جانے کی حد ایک ہے لہذا h کے گناہ h کہ
گنا ایک پر جاتا ہے یہ cos x یہ
صفر پر جاتی ہے یہ ایک کے برابر ہے h سے h کی حد h اس لیے ہے کیونکہ سائن
کے مشتق cos x کے برابر یہ دوبارہ ہے یہ آپ کے لیے کارآمد فارمولہ ہوگا تو پھر کوئی بھی cos x ملا ہے dx کا d x اس لیے ہمیں
کا cos کے x کی حد کے برابر ہوگا۔ h سے شمار کرتے ہیں تو یہ dx کے cos x کو d کا دوبارہ پوچھ سکتا ہے اگر آپ اس مشتق
کا فارمولا استعمال کرتے ہیں اور پھر آپ دکھا cos d مائنس cos c اور دوبارہ اگر آپ h سے cos of x x مائنس h صفر جمع
کے برابر ہے تو یہ میں چھوڑتا ہوں ایک مشق کے طور پر میں آپ کے لیے ایک مشق کے طور پر چھوڑ x سکتے ہیں کہ یہ حد مائنس آف سائن
ہے اور اب چونکہ ہم پروڈکٹ کا اصول اور کوئنٹ رول جانتے ہیں ہم دوسرے x کا مشتق مائنس سائن cos x رہا ہوں کہ یہ چیک کریں کہ
کچھ نہیں ہے مگر tan x کیا ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ d سے dx کے tan x ٹرگنومیٹرک افعال کے مشتقات کا حساب لگا سکتے ہیں لہذا
cos x minus کے مشتق کے برابر ہے sine x اور پھر ہم اقتباس کا اصول استعمال کرتے ہیں تو یہ sine x کے ذریعے cos x
مربع اور یہ اقتباس کے اصول کے مطابق ہے cos x سے تقسیم کیا جاتا ہے dinominator کو cos x کے مشتق sine x times
ہے اور میں نے آپ سے اس بات کی تصدیق cos x اوقات cos x ہے لہذا یہ cos x کا مشتق sin x اب ہم نے حساب لگایا ہے کہ
بھی x مربع cos مربع جسے ہم cos x ہے تقسیم sin x ہے لہذا یہ مائنس x کا مشتق مائنس سائن cos x کرنے کو کہا ہے کہ
جمع x مربع cos سے تقسیم کرتے ہیں لیکن آپ جانتے ہیں کہ x مربع cos کو x جمع سائن مربع x مربع cos لکھتے ہیں تو ہم عدد
x مربع secant کا مشتق ہے tan x تو ہمیں جو ملتا ہے وہ x تو یہ سیکنٹ کے برابر ہے۔ مربع x مربع cos ہے 1 x مربع sin

کو d گونومیٹرک فنکشنز کا بھی آپ حساب لگا سکتے ہیں کیونکہ یہ صرف ان فنکشنز کے ری سیپروکلز ہیں لہذا اگر میں tri اور اب دوسری کا reciprocal سے ایک ہے اور پھر ہم جانتے ہیں کہ cos x کچھ نہیں بلکہ secant x کے ذریعے لکھوں تو dx کے x سیکینٹ مربع سے تقسیم کیا گیا ہے صحیح یہ اقتباس کے اصول کے ذریعہ ہے یا ہماری cos x کو cos x مشتق مشتق کے منفی سے دیا جاتا ہے۔ ہے تقسیم sine x ہے لہذا ہم حاصل کرتے ہیں کہ یہ sin x کا مشتق مائنس cos x مشتق ہے اور پھر fx خاص چیز کے ذریعہ ایک لکھ سکتا ہوں جو by cos x بار ایک cos x کو sine x اور عام طور پر ہم اسے لکھتے ہیں۔ اس فارم میں اس طرح میں x مربع cos کے برابر ہے اسی dx secant x کا d x کے برابر ہے تو ہم اس فارمولے کو یاد رکھیں گے کیونکہ secant x دفعہ tan x کہ d by اور cot x کے مائنس کے برابر ہے cosecant x یہ d by dx of cosecant x طرح سے آپ تصدیق کرتے ہیں کہ کے برابر ہے تو یہ دونوں آپ کے لیے دوبارہ مشق کر رہے ہیں لہذا میں کروں گا x مربع cosecant یہ مائنس cot x ایک اور بائیں dx ہے۔ بہت سے افعال کے مشتق کا حساب لگانے کے لیے بہت v یہاں رکیں اگلی کلاس میں ہم مشتق کے لیے سلسلہ اصول سیکھیں گے جو کہ مفید ہے آپ کا شکریہ

Prutor@IITK