طلباء کو تعیین کرنے والوں کے چھٹے اور آخری لیکچر میں خوش آمدید کہتا ہوں جیسا کہ میں نے اس لیکچر میں پہلے کہا تھا کہ میں لکیری
مساوات کے نظام کے حل کے بارے میں بات کروں گا جس کے بارے میں آپ جانتے ہیں کہ ایک مساوات کو خطی کہا جاتا ہے اگر بنیادی متغیرات
y اور x پانچ کے برابر ہے یہاں بنیادی متغیرات y جمع تین x کے برابر ہے یا یوں کہیے کہ دو c جمع بذریعہ x کا ایکسپونٹ ایک ہو مثلاً
ہیں اور چونکہ ان سب کا ایکسپوننٹ ایک کے برابر ہے یہ لکیری مساوات ہیں جب ہم لکیری مساوات کے نظام کے بارے میں بات کرتے ہیں
تو ہم غور کرتے ہیں۔ متعدد متغیرات کے ساتھ متعدد مساواتیں اور ہم متغیرات کو حل کرنا چاہتے ہیں جیسے کہ حاصل کردہ قدریں تمام مساوا
توں کو ایک ساتھ پورا کرتی ہیں اس کلاس میں ہم یا
تو دو مساوا
توں کے ساتھ دو متغیرات کے ساتھ یا تین متغیر کے ساتھ تین مساوات کے ساتھ معاملہ کریں گے اب ایک مساوات کو مساوات کا ایک نظام سمجھیں
ایک کے برابر ہے اور x بذریعہ t برابر تین کے ہم جانتے ہیں y جمع دو x برابر ہے پانچ اور کہتے ہیں y جمع تین x گے۔ جیسے دو
ایک کے برابر ہے دونوں مساوا y
پندرہ کے برابر y جمع چھ x برابر پانچ اور چار y جمع تین x توں کو بیک وقت پورا کرتا ہے کیا ہر وقت ایسا ہوتا ہے مثال کے طور پر دو
ہے فرض کریں کہ آپ ہیں اس طرح کی دو مساوا
موجود نہیں ہو سکتا جو ان دونوں کو بیک وقت پورا کر سکے کیونکہ اگر میں y اور x توں کو دیکھتے ہوئے یہ بالکل واضح ہے کہ کوئی بھی
اس مساوات 1 کے بائیں ہاتھ کو 2 سے ضرب کرتا ہوں
x ملتا ہے لیکن دائیں ہاتھ پر ہمیں ملتا ہے۔ 15 اس لیے دوسری طرف مطمئن نہیں کیا جا سکتا اگر ہم سمجھتے ہیں کہ 2 y جمع 6 x تو ہمیں 4
برابر ہے 10 y جمع 6 x برابر ہے 5 اور 4 y جمع 3
تو ہمیں ایک مختلف مسئلہ درپیش ہے کیونکہ اس مساوات کو 2 سے ضرب کرنے سے ہمیں دوسری مساوات ملتی ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کے
x برابر ہے پانچ چار y جمع تین x برابر ہے ایک اس لیے دو y برابر ہے ایک x نظام کے متعدد حل حاصل کر سکتے ہیں مثال کے طور پر
برابر ہے y جمع تین x ہے پانچ کے برابر اس لیے دو y مائنس پانچ کے برابر ہے x برابر دس کے برابر ہیں دونوں مطمئن ہیں y جمع چھ
برابر ہے 1 y 2 x میں مائنس 5 جمع 3 جمع 5 کے برابر ہے مائنس 20 جمع 30 برابر 10 4 x مائنس دس جمع پندرہ کے برابر پانچ چار
برابر ہے چار جمع ایک برابر پانچ اور چار جمع چھ میں ایک بائے تین برابر آٹھ جمع دو دس کے برابر اس لیے ہم y جمع تین x سے 3 تک دو
دیکھتے ہیں کہ ہم ایک دو تین تلاش کر سکتے ہیں درحقیقت ہم اس طرح کے مساوات کے نظام کے کسی بھی حل کو محدود تعداد میں شمار کر سکتے
ہیں لہذا مساوات کے نظام کو دیکھتے ہوئے ہمارے پاس تین ممکنہ حالات ہو سکتے ہیں یا
تو ہمارے پاس ایک حل ہو سکتا ہے یا ہمارے پاس متعدد حل ہو سکتے ہیں یا ہمارے پاس کوئی حل نہیں ہو سکتا سوال یہ ہے کہ کیسے؟ ہم فیصلہ
کرتے ہیں کہ لکیری مساوات کے دیے گئے نظام کی کیا صورتحال ہے لہذا ہم میٹرکس اور میٹرکس الٹا پر مبنی تکنیکوں کا اطلاق کرتے ہیں جیسا
جمع 1 x گنا 1 2 a 1 b ہونے دیں۔ کے برابر xn گنا n دو جمع ایک 1 x ایک جمع ایک دو گنا x کہ مساوات کے نظام کو ایک ایک بار
xn بار ann جمع 2 x جمع ایک 2 گنا 1 x میں یہ پسند کرتا ہوں کہ ایک 1 گنا 2 b برابر ہے xn گنا n 2 a جمع 2 x گنا 2 2 a
نوٹ کریں کہ ہم مساوات x one x two xn نامعلوم میں مساوات میں دیکھ رہے ہیں یعنی n یا میں دوسرے الفاظ جنہیں ہم bn برابر ہے
ایک ویکٹر ہے یا ایک جہتی nx کراس n ہے a کے برابر ہے جہاں ax b کے ایسے نظام کی نمائندگی کر سکتے ہیں میٹرکس کی شکل میں
دو ایک na قطاریں اور ایک کالم یا ایک ایک سے ایک تک ایک n دائیں ہاتھ کی طرف دوبارہ b قطاروں کا میٹرکس اور متغیرات کا ایک کالم اور n
تک اس طرح ہم لکیری مساوات کے پورے نظام کو میٹرکس کی شکل b 1 b 2 bn کے برابر ہے x 1 x 2 xn تک دو نان 1 تک این این بار
غیر واحد ہے a میں پیش کر سکتے ہیں ایک فرض کریں کہ
تو کیا ہوگا ہم جانتے ہیں کہ ہم ایک معکوس کی گنتی کر سکتے ہیں جسے ہم نے اپنے آخری میں دیکھا ہے۔ کلاس اس لیے ایک الٹا کو محور میں
غیر واحد ہے a کے برابر اس طرح اگر b کے برابر ہوتا ہے۔ الٹا x is یا b پہلے سے ضرب کرنے سے الٹا
ایک y مائنس x برابر ہے آٹھ تین y جمع تین x تو ہمیں لکیری مساوات کے نظام کے لئے منفرد حل ملتا ہے مثال کے طور پر غور کریں کہ دو
کا تعین کرنے والا یہ میٹرکس برابر ہے دو a سے ضرب آٹھ کے برابر ہے اب xy کے برابر ہے لہذا میٹرکس اشارے میں دو تین تین منفی ایک
تین تین مائنس ایک کے برابر ہے مائنس دو مائنس نو برابر مائنس گیارہ صفر کے برابر نہیں ہے لہذا ایک الٹا موجود ہے ایک کی گنتی کیسے کی
کا ملحقہ برابر ہے ہم a جائے معکوس ہم جانتے ہیں کہ ایک معکوس ایک کے متصل کے متصل ہے ایک اب میٹرکس 2 3 3 مائنس 1 ہے لہذا
جانتے ہیں کہ ہم دو اخترن عناصر کو تبدیل کرتے ہیں اور اخترن کے دو کے نشان کو تبدیل کرتے ہیں عناصر اس لیے ایک معکوس برابر ہے مائنس
1 in a مائنس 3 مائنس 3 2 پر مائنس 11 گیارہ برابر ہے ایک ضرب گیارہ تین ضرب گیارہ اور مائنس دو بائی گیارہ اس لیے
11 x کے دائیں طرف جو کہ 8 1 ہے برابر 8 vector b 11 x minus 2 in 11 x 3 11 x 3 11 x برابر ہے 1 b آیت
کے برابر ہے اس طرح ہمیں مساوات کے نظام کا انوکھا حل ملتا ہے اب میں ایک اور 2 1 11 x مائنس 2 11 x اور 24 11 x جمع 3
مسئلہ حل کرتا ہوں فرض کریں کہ 4 کلو پیاز 3 کلو گندم اور 2 کلو چاول کی قیمت 60 روپے ہے 2 کی قیمت پیاز کا کلو 4 کلو گندم اور 6 کلو
چاول 90 روپے ہے اور 6 کلو پیاز کی قیمت 2 کلو وزن اور تین کلو چاول 70 روپے ہے انفرادی قیمت معلوم کریں
سے ضرب کیا جائے xyz تو ہم مساوات کے نظام کو چار تین دو کے طور پر پیش کرتے ہیں۔ 2 4 6 6 2 3 کو
xyz فی کلو قیمت کی قیمت ہے ہمیں z فی کلو گندم کی قیمت ہے اور y فی کلو پیاز کی قیمت ہے x تو ساٹھ ننانوے ستر کے برابر ہے جہاں
کی قدریں معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ اس طرح کہ تینوں مساواتیں مطمئن ہیں لہذا ہمیں ایک معکوس کی گنتی کرنے کی ضرورت ہے۔ ہم پہلے
کا ملحقہ شمار کرتے ہیں ایک 4 کے برابر 3 aa کے متعین کے ذریعہ تقسیم شدہ کے ملحقہ کے برابر ہے لہذا ہم a سے ہی جانتے ہیں کہ
برابر ہے مائنس 1 سے 2 میں 3 مائنس 6 انٹ 6 برابر 30 ایک 1 3 برابر 2 میں دو مائنس چھ میں چار 2 1 a مائنس 6 میں 2 کے برابر ہے 0
3 2 a برابر 4 میں 3 مائنس 6 میں 2 برابر 0 2 2 a برابر مائنس بیس ایک دو ایک برابر مائنس ون 3 میں 3 مائنس 2 میں 2 برابر مائنس 5
برابر تین میں چھ مائنس چار میں دو برابر جمع کے برابر دس ایک تین دو کے 1 3 a برابر مائنس 1 میں 4 میں 2 مائنس 6 میں 3 برابر جمع 10
برابر ہے مائنس ایک کے برابر 4 میں 6 مائنس 2 میں 2 مائنس 20 کے برابر اور ایک 3 3 برابر چار میں چار مائنس تین میں دو جمع دس کے برابر
ہے لہذا ایک بار جب ہم کوفیکٹرز حاصل کرلیں
کے اب تعین کرنے والے کا تعین کرنے والے کو تلاش کرنے کی a کا ملحقہ صفر مائنس پانچ دس 30 کے برابر ہے a تو ہم لکھ سکتے ہیں
ضرورت ہے اگر ہم پہلی قطار کے ساتھ پھیلتے ہیں
تو ہم نے اصطلاح کو ان کے کوفیکٹرز کے ساتھ ضرب کیا ہے لہذا ہمیں جو ملتا ہے وہ 4 سے 0 جمع 3 میں 30 جمع 2 میں مائنس 20 کے برابر
ہے 90 مائنس 40 50 کے برابر ہے جو کہ غیر صفر ہے لہٰذا 50 کی تقسیم معنی رکھتی ہے لہذا ایک معکوس 0 مائنس 5 10 کے برابر ہے
b ایک بذریعہ پانچ تین ضرب پانچ صفر مائنس دو بذریعہ پانچ منفی دو پانچ ایک سے پانچ اور ایک سے پانچ لہذا مساوات کا حل ہم اس ایک الٹا کو
اس کے ساتھ اس کی پیداوار کے xyz ویکٹر سے ضرب کر کے حاصل کر سکتے ہیں جو ہمیں 60 90 اور 70 کے طور پر دیا گیا ہے۔ لہذا
i برابر ہے اور یہ نکلتا ہے 0 مائنس 9 جمع 14 برابر 5 36 مائنس 28 برابر 8 مائنس 24 جمع 18 برابر مائنس 6 جمع 14 برابر 8۔ پیاز کی قیمت
پانچ روپے کے برابر گیہوں کی قیمت آٹھ روپے کے برابر ہے اور چاول کی قیمت آٹھ روپے کے برابر ہے پنجرے ہیں ایک اور مسئلہ حل s

کرنے دیں تین نمبروں کا مجموعہ چھ ہوتا ہے اگر ہم دوسرے کو تیسرے نمبر سے ضرب کریں اور پہلے کا اضافہ کریں
تو ہمیں سات ملتے ہیں اور اگر ہم دوسرے اور تیسرے نمبر کو جوڑتے ہیں اور اسے پہلے نمبر کے 3 گنا میں شامل کرتے ہیں
z جمع 2 x برابر ہے 6 z جمع y جمع x تو ہمیں بارہ ملتے ہیں تین نمبر ملتے ہیں لہذا اوپر کی وضاحت ہمیں تین مساوات دیتی ہے پہلی ایک
کے برابر ہے 6 7 اور 12 اس xyz برابر ہے 12 کے برابر ہے یا 1 1 1 0 2 3 1 1 ضرب z جمع y جمع x برابر ہے 7 3
لیے پہلے جیسا کہ ہم پہلے چیک کرتے ہیں کہ اس کا تعین کنندہ کیا ہے ایک 1 میں 0 مائنس 2 مائنس 1 میں 1 مائنس 6 جمع 1 میں 1 مائنس 0
برابر ہے مائنس 2 کے برابر 5 جمع 1 برابر 4 کے برابر نہیں 0 کے اس لیے ہم حساب کر سکتے ہیں کہ ایک معکوس برابر ہے تقسیم کے ذریعہ
برابر مائنس دو ایک ایک دو 1 1 a تقسیم اس لیے پہلے کی طرح ہم کوفیکٹرز کی گنتی کرتے ہیں براہ کرم چیک کریں کہ ہمیں درج ذیل ملتا ہے
2 3 a برابر 2 1 3 a جمع 2 کے برابر ہے 3 2 a مائنس 2 کے برابر اور 2 2 a برابر پانچ ایک ایک تین برابر ایک 2 1 برابر 0
کا ملحقہ مائنس 2 5 کے برابر ہو a مائنس 1 کے برابر ہے لہذا اسے میٹرکس کی شکل میں لکھنے سے 3 3 a مائنس 1 کے برابر ہے اور
جائے گا۔ 1 0 مائنس 2 2 2 مائنس 1 مائنس ایک لہذا ایک معکوس اس کے برابر ہے اس کو چار سے تقسیم کرنے کے برابر ہے مائنس دو صفر دو
کے برابر ہے ایک سے چار میں مائنس دو صفر دو پانچ مائنس 2 مائنس 1 b پانچ مائنس دو مائنس ایک ایک دو مائنس ایک لہذا مساوات کا حل ایک الٹا
مائنس 1 ضرب 6 7 12 برابر 1 سے 4 میں مائنس 12 جمع 24 30 مائنس 14 مائنس بارہ چھ جمع چودہ مائنس بارہ برابر ایک ضرب چار 2 1
آپ نے ان اقدار کو مساوات میں ڈالا اور آپ نے دیکھا t بارہ 4 8 میں 3 1 2 کے برابر ہے لہذا 3 نمبر 3 1 اور 2 ہیں۔ میں تجویز کرتا ہوں
کہ تینوں مساواتیں ان تینوں قدروں سے مطمئن ہیں اس کو حل کرنے کا ایک اور طریقہ ہے جسے گرامر کا اصول کہا جاتا ہے یہاں ہم واضح طور
پر معکوس کی گنتی نہیں کریں گے بلکہ ہم مساوات کے نظام کو مختلف کمپیوٹنگ کے ذریعے حل کریں گے۔ تعین کنندگان اور اس کی مدد سے ہم
n ہے b کراس ایک n ہے a nnx کے برابر ہے جہاں ax b اقدار کی گنتی کریں گے یہ خیال یہ ہے کہ اگر مساوات کا دیا ہوا نظام
برابر نہیں ہے صفر ویکٹر سے جو کہ ایک کراس ون میٹرکس ہے جہاں تمام قدریں زیرو ہیں لہذا b غیر واحد ہے اور a کراس ایک ایسا ہے کہ
غیر واحد ہے a صفر ویکٹر نہیں ہے اور b اگر
تو پھر تین حل
تو تین مساوات کے حل کو شمار کیا جا سکتا ہے جیسا کہ میں تین کے ساتھ وضاحت کرتا ہوں۔ تین
d اسی طرح 3 3 a 2 a 3 a 3 a 2 a 2 2 a 1 3 a 1 2 a 3 b کے تعین کنندہ کے برابر a let d برابر ہے let d تو
یعنی ہم نے میٹرکس کے دوسرے 3 3 a 3 b 1 2 a 2 3 a 3 1 b 2 1 a 1 3 a 2 1 b دو کو میٹرکس کا تعین کرنے دیں ایک ایک
کے تعین 3 b 2 a 3 1 a 2 2 b 2 a 2 1 a 1 2 b 1 a تین کو 1 1 d ویکٹر سے بدل دیا ہے اور اسی طرح b کالم کو
پر 3 d برابر ہے z اور d کے برابر ہے 2 پر d برابر ہے dy کے برابر ہے 1 پر d برابر ہے x کنندہ کے طور پر شمار کیا ہے۔ پھر
برابر ہے 1 کے 1 a میں اسے ثابت نہیں کر رہا ہوں لیکن میں اس کی تصدیق اسی مثال سے کر رہا ہوں جو ہم نے ابھی کی تھی لہذا تصدیق d
میں 6 بارہ کے برابر ہے ہم جانتے تھے کہ جواب تین ایک دو ہے لہذا ہم اسے گرائمر کے اصول کا استعمال کرتے xyz 1 1 3 2 0 1 1
کے برابر ہے ایک کے تعین کرنے والے کے برابر 6 1 1 7 d کا تعین کرنے والا چار a برابر ہے d ہوئے حل کرتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ
برابر ہے 6 کے برابر 0 مائنس 2 مائنس 1 میں 7 مائنس 24 جمع 1 7 مائنس 12 مائنس 7 جمع 24 جمع 7 برابر ہے 12 اس لیے 1 1 12 2 0
برابر ہے 1 6 1 7 2 3 12 1 کے عامل کے اور یہ ہم دوسرے 2 d اس کی قدر پہلا متغیر بارہ کے برابر ہے چار کے برابر ہے اب
ویکٹر 6 7 اور 12 سے بدل کر حاصل کرتے ہیں۔ لہذا اس کا تعین کنندہ 1 سے 7 مائنس 24 مائنس 6 میں 1 مائنس 6 جمع 1 میں 12 b کالم کو
تین 1 1 6 1 0 7 3 d کی قدر 4 ضرب 4 کے برابر ہے اسی طرح y مائنس 20 1 برابر مائنس 17 جمع 30 مائنس 9 برابر 4 اس لیے
ویکٹر سے بدل دیا ہے برابر 1 میں 0 مائنس 7 مائنس 1 میں 12 مائنس 21 جمع 6 میں 1 v کے تعین کے برابر ہے ہم نے تیسرے کالم کو 12 1
برابر 8 ضرب 4 برابر 2 اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ کریمر کے اصول کا z مائنس 0 برابر ہے مائنس 7 جمع 9 جمع 6 8 کے برابر ہے لہذا
استعمال کرتے ہوئے جہاں ہم نے واضح طور پر ایک الٹا شمار نہیں کیا ہم مساوات کے نظام کو حل کر سکتے ہیں وہ تمام مسائل جو ہم نے حل کیے
واحد ہے a ہے سوال یہ ہے کہ اگر e determinant non-zero کا a ہیں۔ ایک میٹرکس غیر واحد ہے اور اس لیے
کا تعین کرنے والا 0 ہے a تو پھر
کا ملحقہ ضرب 0 کے برابر ہے پھر ہمارے پاس b کا تعین کنندہ 0 کے برابر ہے اور a اگر a تو ہمیں مندرجہ ذیل کرنے کی ضرورت ہے
کا ملحقہ ضرب 0 کے برابر نہیں ہے b کا تعین 0 ہے اور a اگر b مساوات کے نظام کے لیے ایک سے زیادہ حل ہوں گے اور
برابر a برابر ہے 10۔ اب y جمع 6 x پانچ اور چار کے برابر ہے y جمع تین x تو کوئی حل نہیں ہوگا مثال کے طور پر غور کریں کہ دو
میں شمار کرتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ دو کراس دو b کے ملاحضہ کو a کا تعین کنندہ 0 کے برابر ہے لہٰذا ہم a ہے 2 3 4 6 اس لیے
میٹرکس کے لیے اس جوڑ کی گنتی کرنے کے لیے ہم اخترن عناصر کو تبدیل کرتے ہیں اور ہم اخترن عناصر کے نشان کو تبدیل کرتے ہیں لہذا اس
میٹرکس کا ملحقہ 6 مائنس 3 مائنس 4 2 ہے اور اگر ہم اسے 5 10 سے ضرب کریں
کا ملحقہ ضرب 0 ہے لہذا b کا تعین کنندہ 0 ہے اور ہمیں a تو ہمیں 30 مائنس 30 مائنس 20 جمع 20 ملتا ہے 0 0 کے برابر 0 کے برابر لہٰذا
y جمع چھ x برابر ہے پانچ اور چار y جمع تین x جیسا کہ ہم نے دیکھا کہ لامحدود حل ہیں لیکن فرض کریں کہ ہمارے پاس نئی مثال ہے دو
کا ب ویکٹر کے ساتھ ملحق 6 مائنس 3 مائنس 4 2 کو 5 سے ضرب اور 15 30 a کا تعین کنندہ 0 کے برابر ہے اور a برابر ہے اس لیے
مائنس 45 کے برابر ہے اور مائنس 20 جمع تیس مائنس پندرہ دس کے برابر ہے۔ صفر ویکٹر نہیں ہے دو کراس ون سائز کا صفر میٹرکس نہیں ہے
کا تعین صفر ہے لیکن ب سے ضرب کا ملحقہ غیر صفر ہے اس لیے مساوات کے اس نظام یا اس کا a اس لیے جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے کہ
کوئی حل نہیں ہے۔ مساوات کا دیا ہوا نظام متضاد ہے ٹھیک ہے طلباء اس کے ساتھ میں تعین کرنے والوں پر لیکچرز کی اپنی سیریز کا اختتام کرتا
ہوں مجھے امید ہے کہ آپ کو وہ لیکچرز اور مثالیں ملیں گی جو میں نے بہت سے دوسرے مسائل کو حل کرنے میں کارآمد کی ہیں آپ کا شکریہ
آپ ch