

निर्धारकांवरील सहाय्या आणि शेवटच्या व्याख्यानात विद्यार्थ्यांचे स्वागत आहे, जसे मी या व्याख्यानात आधी म्हटल्याप्रमाणे मी रेखीय समीकरणांच्या प्रणालींच्या निराकरणाबद्दल बोलेल, तुम्हाला माहिती आहे की जर अंतर्निहित चलांमध्ये घातांक एक असेल तर समीकरण रेखीय असल्याचे म्हटले जाते उदाहरणार्थ  $x$  अधिक बाय हे  $c$  च्या बरोबरीचे आहे किंवा दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  हे पाच च्या बरोबरीचे आहे असे म्हणा येथे अंतर्निहित चल  $x$  आणि  $y$  आहेत आणि त्या सर्वांचे घातांक एक समान असल्याने ही रेखीय समीकरणे आहेत जेव्हा आपण रेखीय समीकरणांच्या प्रणालींबद्दल बोलतो तेव्हा आपण विचार करतो मल्टिपल व्हेरिएबल्ससह अनेक समीकरणे आणि आम्हाला व्हेरिएबल्सचे निराकरण करायचे आहे जसे की प्राप्त मूल्ये एकाच वेळी सर्व समीकरणे पूर्ण करतात या वर्गात आम्ही दोन व्हेरिएबल्स असलेली दोन समीकरणे किंवा तीन व्हेरिएबल्स असलेली तीन समीकरणे हाताळू.

आता समीकरण ही समीकरणांची एक प्रणाली मानू.

जसे की दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  बरोबर पाच आणि म्हणा  $x$  अधिक दोन  $y$  बरोबर तीन हे आपल्याला माहित आहे  $t$  by  $x$  एक बरोबर आहे आणि  $y$  बरोबर एक आहे दोन्ही समीकरणे एकाच वेळी पूर्ण करतात हे सर्व वेळेस असेच आहे की नाही उदाहरण विचारात घ्या दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  समान पाच आणि चार  $x$  अधिक सहा  $y$  पंधरा बरोबर समजा तुम्ही आहात अशी दोन समीकरणे दिल्यास हे स्पष्ट आहे की या दोन्ही समीकरणांचे समाधान करणारे कोणतेही  $x$  आणि  $y$  एकाच वेळी असू शकत नाहीत कारण मी या समीकरण 1 च्या डाव्या बाजूचा 2 ने गुणाकार केला तर आपल्याला  $4x$  अधिक  $6y$  मिळेल परंतु उजव्या बाजूला आपल्याला मिळेल 15

त्यामुळे दुसरीकडे समाधानी होऊ शकत नाही जर आपण  $2x$  अधिक  $3y$  बरोबर 5 आणि  $4x$  अधिक  $6y$  बरोबर 10 असे मानले तर आपल्याला वेगळ्या समस्येचा सामना करावा लागतो कारण या समीकरणाचा 2 ने गुणाकार केल्यास आपल्याला दुसरे समीकरण मिळते.

वरील समीकरणांच्या प्रणालीसाठी अनेक निराकरणे मिळू शकतात उदाहरणार्थ  $x$  समान आहे एक  $y$  बरोबर एक म्हणून दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  समान पाच चार  $x$  अधिक सहा  $y$  समान दहा दोन्ही समाधानी  $x$  समान वजा पाच  $y$  आहे पाच बरोबर म्हणून दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  समान वजा दहा अधिक पंधरा समान पाच चार  $x$  4 मध्ये वजा 5 अधिक 3 मध्ये अधिक 5 समान उणे 20 अधिक 30 समान  $10x + 2y$  समान 1 बाय 3 म्हणून दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  बरोबर चार अधिक एक बरोबर पाच आणि चार मध्ये दोन अधिक सहा मध्ये एक बरोबर तीन बरोबर आठ अधिक दोन बरोबर दहा म्हणून आपण पाहतो की आपण एक दोन तीन शोधू शकतो खरं तर आपण अशा समीकरण प्रणालीसाठी कोणतेही समाधान मर्यादित संख्येत मोजू शकतो

म्हणून समीकरणांची प्रणाली दिल्यास आपल्याकडे तीन संभाव्य परिस्थिती असू शकतात एकतर आपल्याकडे एक उपाय असू शकतो किंवा आपल्याकडे अनेक उपाय असू शकतात किंवा आपल्याकडे कोणतेही समाधान असू शकत नाही हा प्रश्न आहे की ते कसे करायचे? दिलेल्या रेखीय समीकरणांच्या प्रणालीची परिस्थिती काय आहे हे आम्ही ठरवतो म्हणून आम्ही मॅट्रिक्स आणि मॅट्रिक्स व्युत्क्रम आधारित तंत्रे लागू करू या च्या समान  $b$  1  $a$  2 1 गुणिले  $x$  1 अधिक  $a$  2 2 वेळा  $x$  2 अधिक  $a$  2  $n$  गुणिले  $xn$  बरोबर  $b$  2 मला आवडते की 1 वेळा  $x$  1 अधिक  $an$  2 पट  $x$  2 अधिक  $ann$  गुणा  $xn$  समान  $bn$  किंवा मध्ये दुसरे शब्द आपण  $n$  अज्ञात मधील समीकरणे पहात आहोत म्हणजे  $x$  एक  $x$  दोन  $xn$  लक्षात ठेवा की आपण अशा समीकरणांची प्रणाली मॅट्रिक्स फॉर्ममध्ये दर्शवू शकतो अक्ष हे  $b$  च्या बरोबरीचे आहे जेथे  $a$   $n$  क्रॉस  $nx$  चा सदिश आहे किंवा एक मित्तीय आहे  $n$  पंक्तीचे मॅट्रिक्स आणि व्हेरिएबल्सचा एक स्तंभ आणि  $b$  ही उजवीकडील बाजू आहे पुन्हा  $n$  पंक्ती आणि एक स्तंभ किंवा एक एक ते एक ना दोन एक दोन नॅन 1 पर्यंत  $ann$  गुणा  $x$  1  $x$  2  $xn$  समान आहे  $b$  1  $b$  2  $bn$  पर्यंत अशा प्रकारे आपण मॅट्रिक्स फॉर्म केसमध्ये रेखीय समीकरणांची संपूर्ण प्रणाली दर्शवू शकतो,

एक समजा  $a$  गैर-एकवचनी असेल तर काय होईल हे आपल्याला माहित आहे की आपण एका व्युत्क्रमाची गणना करू शकतो हे आपण आपल्या शेवटच्या वेळी पाहिले आहे वर्ग म्हणून अक्ष मध्ये व्यस्त पूर्व गुणाकार करून व्यस्त  $b$  किंवा  $x$  आहे एका व्युत्क्रम  $b$  च्या बरोबर अशाप्रकारे जर  $a$  गैर-एकवचनी असेल तर आपल्याला रेखीय समीकरणांच्या प्रणालीसाठी अद्वितीय समाधान मिळते उदाहरण विचारात घ्या दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  समान आठ तीन  $x$  वजा  $y$  समान आहे म्हणून मॅट्रिक्स नोटेशनमध्ये दोन तीन तीन वजा एक  $xy$  ने गुणाकार केला म्हणजे आठ एक आता  $a$  चा निर्धारक कोणता हे मॅट्रिक्स समान आहे दोन तीन तीन वजा एक समान वजा दोन वजा नऊ समान वजा अकरा बरोबर शून्य नाही म्हणून व्यस्त अस्तित्वात आहे की गणना कशी करायची व्युत्क्रम हे आताच्या निर्धारकाने भागलेल्या भागाकाराच्या संलग्नकाच्या बरोबरीचे आहे हे आपल्याला माहित आहे मॅट्रिक्स 2 3 3 वजा 1 आहे म्हणून  $a$  चा संलग्न भाग समान आहे हे आपल्याला माहित आहे की आपण दोन कर्ण घटक बदलतो आणि कर्णाच्या दोनचे चिन्ह बदलतो घटक म्हणून व्युत्क्रम समान आहे वजा 1 वजा 3 वजा 3 2 वर वजा 11 अकरा बरोबर एक बाय अकरा तीन बाय अकरा तीन आणि वजा दोन बाय अकरा म्हणून  $a$  in श्लोक  $b$  समान आहे 1 बाय 11 3 बाय 11 3 बाय 11 मध्ये वजा 2 बाय 11 मध्ये  $b$  वेक्टरच्या उजव्या बाजूला 8 1 आहे 8 बाय 11 अधिक 3 बाय 11 आणि 24 बाय 11 वजा 2 बाय 11 1 2 च्या बरोबरीचे आहे अशा प्रकारे आपल्याला समीकरणांच्या प्रणालीसाठी एक अनोखा उपाय मिळेल आता मी आणखी एक समस्या सोडवतो असे समजा की 4 किलो कांद्याची किंमत 3 किलो गहू आणि 2 किलो तांदूळाची किंमत 2 ची किंमत 60 रुपये आहे.

कांदा 4 किलो गहू आणि 6 किलो तांदूळ 90 रुपये आहे आणि 6 किलो कांद्याची किंमत 2 किलो वजन आणि तीन किलो तांदूळ 70 रुपये आहे वैयक्तिक खर्च शोधा म्हणून आम्ही समीकरणाची प्रणाली चार तीन दोन असे दर्शवतो.

2 4 6 6 2 3  $xyz$  ने गुणिले म्हणजे साठ नव्वद सत्तर आहे जेथे  $x$  ही प्रति किलो कांद्याची किंमत  $y$  आहे  $y$  प्रति किलो गव्हाची किंमत आहे आणि  $z$  ही प्रति किलो किमतीची किंमत आहे  $xyz$  ची मूल्ये शोधणे आवश्यक आहे तिन्ही समीकरणे समाधानी आहेत म्हणून आपल्याला व्युत्क्रमाची गणना करणे आवश्यक आहे

आम्हांला आधीच माहित आहे की भागाकार  $a$  च्या निर्धारकाने भागाकार केला आहे म्हणून आम्ही  $aa$  चा समभाग मोजतो एक एक 4

च्या 3 वजा 6 मध्ये 2 बरोबर 0 a 1 2 बरोबर वजा 1 ते 2 मध्ये 3 वजा 6 बरोबर 30 a 1 3 बरोबर 2 बरोबर दोन वजा सहा बरोबर चार बरोबर उणे वीस एक दोन एक बरोबर वजा एक 3 3 वजा 2 2 बरोबर 5 व 2 2 समान ते 4 ते 3 वजा 6 ते 2 बरोबर 0 a 2 3 समान 1 ते 4 मध्ये 2 वजा 6 ते 3 बरोबर अधिक 10 अ 3 1 बरोबर तीन ते सहा वजा चार ते दोन बरोबर अधिक दहा ए तीन दोन म्हणजे वजा एक ते 8 ते 6 वजा 2 ते 2 म्हणजे उणे 20 आणि 3 3 म्हणजे चार वजा तीन ते दोन म्हणजे अधिक दहा म्हणजे एकदा आपण कोर्फेक्टर मिळवले की आपण लिहू शकतो a चा समभाग शून्य वजा पाच दहा 30 0 वजा 20 वजा 20 10 10 बरोबर आहे म्हणून व्युत्क्रम मोजण्यासाठी आम्ही a चा आताचा निर्धारक शोधणे आवश्यक आहे जर आपण पहिल्या पंक्तीसह विस्तार केला तर आपण त्यांच्या सहघटकांसह संज्ञाने गुणाकार केला तर आपल्याला 4 ते 0 अधिक 3 ते 30 अधिक 2 मध्ये वजा 20 हे 0 अधिक आहे 90 वजा 40 हे 50 च्या बरोबरीचे आहे जे गैर-शून्य आहे म्हणून 50 ने भागणे अर्धपूर्ण आहे म्हणून व्युत्क्रम समान 0 वजा 5 10 तीस शून्य वजा वीस वजा वीस दहा भाग पन्नास समान शून्य वजा एक दहाने एक बाय पाच तीन बाय पाच शून्य वजा दोन बाय पाच वजा दोन, पाच एक पाच आणि एक करून पाच म्हणून समीकरणांचे समाधान आपल्याला b वेक्टरसह व्युत्क्रमाने गुणाकार करून मिळू शकते जे आपल्याला 60 90 आणि 70 असे दिले आहे.

म्हणून xyz हे याच्या गुणाकाराच्या बरोबरीचे आहे आणि ते 0 वजा 9 अधिक 14 समान 5 36 वजा 28 समान 8 वजा 24 अधिक 18 बरोबर उणे 6 अधिक 14 समान 8 आहे.

कांदाची किंमत i s बरोबर पाच रुपये गव्हाची किंमत आठ रुपये आहे आणि तांदळाची किंमत आठ रुपये आहे पिंजरा, मला आणखी एक समस्या सोडवू द्या तीन संख्यांची बेरीज सहा आहे जर आपण दुसऱ्याला तिसऱ्या क्रमांकाचा गुणाकार केला आणि पहिल्याला जोडले तर आपल्याला सात मिळतील आणि जर आपण दुसरी आणि तिसरी संख्या जोडली आणि ती पहिल्या संख्येच्या 3 पट जोडली तर आपल्याला बारा मिळतील तीन संख्या सापडतील म्हणून वरील वर्णन आपल्याला तीन समीकरणे देते पहिले एक x अधिक y अधिक z आहे 6 x अधिक 2 z समान आहे 7 3 x अधिक y अधिक z बरोबर 12 किंवा 1 1 1 1 0 2 3 1 1 xyz ने गुणाकार केला तर 6 7 आणि 12 बरोबर आहे म्हणून आधी आपण प्रथम तपासतो की निर्धारक काय आहे a 1 ते 0 वजा 2 वजा 1 ते 1 वजा 6 अधिक 1 ते 1 वजा 0 समान वजा 2 अधिक 5 अधिक 1 बरोबर 4 बरोबर 0 नाही म्हणून आपण गणन करू शकतो व्युत्क्रम हे भागाकाराच्या समीप भागाप्रमाणे आहे.

म्हणून पूर्वीप्रमाणे आम्ही सहघटकांची गणना करतो कृपया तपासा की आम्हाला खालील मिळते a 1 1 समान वजा दोन एक एक दोन समान पाच एक तीन समान एक 2 1 समान 0 a 2 2 समान 2 आणि a 2 3 म्हणजे अधिक 2 a 3 1 बरोबर 2 a 3 2 बरोबर उणे 1 आणि a 3 3 बरोबर उणे 1 म्हणून पुन्हा मॅट्रिक्स फॉर्ममध्ये लिहिल्यास a चा समभाग वजा 2 5 मिळेल.

1 0 वजा 2 2 2 वजा 1 वजा एक म्हणून एक व्युत्क्रम समान आहे याला चार ने भागल्यास वजा दोन शून्य दोन पाच वजा दोन वजा एक एक दोन वजा एक म्हणून समीकरणांचे समाधान व्यस्त b समान आहे एक ते चार मध्ये वजा दोन शून्य दोन पाच वजा 2 वजा 1 1 2 वजा 1 गुणाकार 6 7 12 बरोबर 1 ने 4 मध्ये वजा 12 अधिक 24 30 वजा 14 वजा बारा सहा अधिक चौदा वजा बारा बरोबर एक बाय चार बारा मध्ये 4 8 हे 3 1 2 च्या बरोबरीचे आहे म्हणून 3 संख्या 3 1 आणि 2 आहेत.

मी t सुचवितो टोपी तुम्ही ही मूल्ये समीकरणांमध्ये ठेवलीत आणि तुम्ही पाहाल की या तीन मूल्यांनी सर्व तीन समीकरणे समाधानी आहेत हे सोडवण्याचा आणखी एक मार्ग म्हणजे व्याकरणाचा नियम येथे आम्ही स्पष्टपणे व्युत्क्रमाची गणना करणार नाही, उलट भिन्न गणना करून समीकरणांची प्रणाली सोडवू.

निर्धारक आणि त्याच्या मदतीने आपण मूल्यांची गणना करू, जर दिलेली समीकरण प्रणाली ax च्या समान असेल तर कल्पना असेल जेथे a nnx आहे n क्रॉस एक b आहे n एक क्रॉस आहे की a गैर एकवचनी आहे आणि b समान नाही शून्य सदिश ते एक क्रॉस वन मॅट्रिक्स आहे जेथे सर्व मूल्ये शून्य आहेत म्हणून जर b शून्य सदिश नसेल आणि a एकवचनी नसेल तर तीन सोल्यूशन्स असतील तर तीन समीकरणांची सोल्यूशन्स खालीलप्रमाणे मोजली जाऊ शकतात मी तीन द्वारे स्पष्ट करू.

तीन म्हणजे d हा a च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे d one हा मॅट्रिक्स आहे a चा पहिला स्तंभ b सदिशाने बदलून d एक आहे b 1 b 2 च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे b 3 a 1 2 a 1 3 a 2 2 a 2 3 a तीन दोन a तीन तीन त्याचप्रमाणे d दोन मॅट्रिक्सचे निर्धारक असू द्या a one b 1 a 1 3 a 2 1 b 2 a 2 3 a 3 1 b 3 a 3 3 म्हणजे आपण मॅट्रिक्सचा दुसरा स्तंभ b वेक्टरने बदलला आहे आणि त्याचप्रमाणे 1 1 a 1 2 b 1 a 2 1 a 2 2 b 2 a 3 1 a 3 2 b 3 चे निर्धारक म्हणून d तीनची गणना केली आहे.

मग x बरोबर d 1 वर dy बरोबर d 2 वर d आणि z बरोबर d 3 वर di हे सिद्ध करत नाही आहे पण मी ते त्याच उदाहरणाने पडताळत आहे जे आपण आत्ताच केले आहे म्हणून पडताळणी a बरोबर आहे 1 1 1 0 2 3 1 1 xyz मध्ये 6 बारा समान आहे आम्हाला माहित आहे की उत्तर तीन एक दोन आहे म्हणून आम्ही व्याकरणाचा नियम वापरून सोडवतो आम्हाला माहित आहे की d समान आहे a चा निर्धारक चार d च्या बरोबरीचा एक आहे 6 1 1 7 0 2 12 1 1 बरोबर 6 ते 0 वजा 2 वजा 1 ते 7 वजा 24 अधिक 1 ते 7 समान वजा 12 वजा 7 अधिक 24 अधिक 7 बरोबर 12 म्हणून मूल्य पहिले व्हेरिएबल बारा वर चार म्हणजे तीन बरोबर आता d 2 हे 1 6 1 1 7 2 3 12 1 च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे आणि हे आपल्याला b सदिश 6 7 आणि 12 ने दुसऱ्या स्तंभाच्या जागी मिळते .

म्हणून त्याचा निर्धारक 1 ते 7 वजा 24 वजा 6 मध्ये 1 वजा 6 अधिक 1 ते 12 वजा 20 1 बरोबर वजा 17 अधिक 30 वजा 9 समान 4 म्हणून y चे मूल्य 4 बाय 4 समान एक समान d तीन हे 1 1 6 1 0 7 3 1 12 च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे आम्ही तिसरा स्तंभ v सदिशाने बदलला आहे 1 ते 0 वजा 7 वजा 1 ते 12 वजा 21 अधिक 6 ते 1 वजा 0 बरोबर वजा 7 अधिक 9 अधिक 6 बरोबर 8 आहे म्हणून z बरोबर 8 बाय 4 बरोबर 2 म्हणून आपण पाहतो की क्रॅमरच्या नियमाचा वापर करून आपण स्पष्टपणे एका व्युत्क्रमाची गणना

केली नाही तर आपण समीकरणांच्या प्रणाली

सोडवलेल्या सर्व समस्या सोडवू शकतो.

मॅट्रिक्स नॉन-एकवचनी आहे आणि

त्यामुळे  $a$  चा  $e$  निर्धारक शून्य नसलेला प्रश्न आहे जर  $a$  एकवचनी असेल तर  $a$  चा निर्धारक 0 असेल तर काय होते म्हणून  $a$  चा निर्धारक 0 च्या बरोबरीचा असेल आणि

$b$  ने गुणाकार केलेला संलग्नक 0 च्या बरोबर असेल तर आपल्याला पुढील गोष्टी करणे आवश्यक आहे मग

समीकरणांच्या प्रणालीसाठी आपल्याकडे अनेक उपाय असतील आणि  $b$  जर  $a$  चा निर्धारक 0 असेल आणि  $b$  ने गुणाकार केलेला संलग्नक 0 च्या बरोबर नसेल तर तेथे कोणतेही उपाय नसतील उदाहरण दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  समान पाच आणि चार आहे.

$x$  अधिक 6  $y$  बरोबर 10 आहे.

आता  $a$  आहे 2 3 4 6 म्हणून  $a$  चा निर्धारक 0 च्या बरोबरीचा आहे म्हणून आपण

$a$  चा समभाग  $b$  मध्ये मोजतो आपल्याला माहित आहे की दोन क्रॉस दोन मॅट्रिक्ससाठी त्या जोडाची गणना करण्यासाठी आपण कर्ण घटकांची अदलाबदल करतो आणि आपण कर्ण घटकांचे चिन्ह बदलतो म्हणून या मॅट्रिक्सचा संलग्नक 6 वजा 3 वजा 4 2 आहे आणि जर आपण हा 5 10 ने गुणाकार केला तर आपल्याला

30 वजा 30 वजा 20 अधिक 20 हे 0 0 आहे.

0 च्या बरोबरीचे म्हणून  $a$  चा निर्धारक 0 आहे आणि आपल्याला  $b$  चा 0 ने गुणाकार केलेला संलग्नक सापडतो

म्हणून आपण पाहिल्याप्रमाणे अनेक निराकरणे आहेत परंतु समजा आपल्याकडे नवीन उदाहरण आहे दोन  $x$  अधिक तीन  $y$  समान पाच आणि चार  $x$  अधिक सहा  $y$  समान आहे पंधरा ते म्हणून  $a$  चा निर्धारक 0 च्या बरोबरीचा आहे आणि  $a$  चा  $b$  वेक्टरमध्ये जोडलेला भाग

6 वजा 3 वजा 4 2 ने 5 ने गुणाकार केला आहे आणि 15 बरोबर 30 वजा 45 आणि वजा 20 अधिक तीस बरोबर आहे पंधरा दहा हे शून्य सदिश नाही शून्य मॅट्रिक्स आकार दोन क्रॉस वन म्हणून आपण पाहिले आहे की  $a$  चा निर्धारक शून्य आहे परंतु  $b$  ने गुणाकार केलेला संलग्नक शून्य आहे म्हणून या समीकरण किंवा या प्रणालीला कोणतेही समाधान नाही समीकरणाची दिलेली प्रणाली विसंगत आहे ठीक आहे विद्यार्थ्यांनो मी माझ्या निर्धारकांवरील व्याख्यानांच्या मालिकेचा समारोप करतो, मला आशा आहे की तुम्हाला व्याख्याने आणि इतर अनेक समस्या सोडवण्यासाठी उपयुक्त असलेली उदाहरणे सापडतील, धन्यवाद.

ch आपण