निर्धारकाच्या पाचव्या व्याख्यानात विद्यार्थ्यांचे स्वागत आहे जसे मी शेवटच्या व्याख्यानाच्या शेवटी म्हटलो होतो की या वर्गात मी मॅट्रिक्स व्युत्क्रमाबद्दल बोलणार आहे, परंतु मॅट्रिक्सच्या व्यस्ततेवर चर्चा करण्यापूर्वी मला निर्धारकांची एक समस्या सोडवू द्या.
a चे समान aa चौरस a घन उणे 1 a ते पॉवर ओमेगा a ते पॉवर 2 ओमेगा a ते पॉवर 3 ओमेगा वजा 1 आणि a ते पॉवर ओमेगा स्क्वेअर a ते पॉवर 2 ओमेगा स्क्वेअर a ते पॉवर 3 ओमेगा वर्ग उणे 1 जेथे ओमेगा हे एकतेचे घनमूळ आहे आणि आपल्याला माहित आहे की एक अधिक ओमेगा अधिक ओमेगा चौरस शून्याच्या बरोबरीचे आहे जर आपण मॅट्रिक्सकडे पाहिले तर आपल्याला दिसेल की तिसऱ्या स्तंभातील सर्व घटक प्रत्यक्षात
घन आणि वजा या दोन प्रमाणांचे बेरीज आहेत एक ते पॉवर थ्री ओमेगा आणि उणे 1 आणि अ ते पॉवर 3 ओमेगा स्क्वेअर वजा 1 आम्हाला माहित आहे की अशा परिस्थितीत आपण निर्धारक दोन निर्धारकांची बेरीज म्हणून लिहू शकतो आणि त्यासाठी आपण तेच करतो re a चा निर्धारक
aa स्क्वेअर a क्यूब a ची पॉवर ओमेगा a ची पॉवर 2 ओमेगा a ची पॉवर 3 ओमेगा आणि a ची पॉवर ओमेगा स्क्वेअर a ची पॉवर 2 ओमेगा स्क्वेअर a ची पॉवर 3 ओमेगा स्क्वेअर वजा निर्धारक aa स्क्वेअर 1 a ते पॉवर ओमेगा a ते पॉवर 2 ओमेगा आणि 1 a ते पॉवर ओमेगा स्क्वेअर अ ते पॉवर 2 ओमेगा स्क्वेअर आणि 1.
म्हणून मूळ मॅट्रिक्स ai चा निर्धारक असे लिहिले आहे या मॅट्रिक्सच्या निर्धारक आणि दुसऱ्या मॅट्रिक्समधील फरक आपण त्यांना 1 आणि a 2 म्हणू या.
आता 1 चा निर्धारक समान आहे जर आपण ते बघितले तर आपण पहिल्या रांगेतून एक सामान्य घेऊ शकतो आपण ओमेगा a घेऊ शकतो.
दुसऱ्या रांगेतून पॉवर ओमेगा कॉमन पर्यंत आणि तिसऱ्या रांगेतून पॉवर ओमेगा स्क्वेअर कॉमन पर्यंत a घेऊ शकतो
म्हणून जर आपण अटी काढल्या
तर पॉवर ओमेगा डॉट a ते पॉवर ओमेगा
स्क्वेअर निर्धारक मध्ये काय मिळेल.
आता आपण ao घेतल्यास पहिल्या रांगेतून मी पॉवर ओमेगासाठी a घेतल्यास दुसऱ्या रांगेतून ते 1 a ते पॉवर ओमेगा a ते पॉवर 2 ओमेगा आणि जर मी पॉवर ओमेगा स्क्वेअरमध्ये a घेतले तर तो एक aa चौरस होईल.
तिसरी पंक्ती 1 a ते पॉवर ओमेगा स्क्वेअर ते a ची पॉवर 2 ओमेगा स्क्वेअर ए च्या बरोबरीची पॉवर 1 अधिक ओमेगा अधिक ओमेगा स्क्वेअर 1 च्या निर्धारक मध्ये 1 स्क्वेअर 1 ए ते पॉवर ओमेगा अ ते पॉवर 2 ओमेगा आणि एक a ते पॉवर ओमेगा स्क्वेअर a ते पॉवर दोन ओमेगा स्क्वेअर हे प्रमाण शून्याच्या बरोबरीचे आहे म्हणून एकाचा निर्धारक एकाच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे a स्क्वेअर एक a ते पॉवर ओमेगा a ते पॉवर 2 ओमेगा 1 a ते पॉवर ओमेगा स्क्वेअर ए ते पॉवर 2 ओमेगा स्क्वेअर आता ए दोनचा निर्धारक
एए स्क्वेअर एक अ ते पॉवर ओमेगा ए ते पॉवर दोन ओमेगा एक ए ते पॉवर ओमेगा स्क्वेअर ए ते पॉवर दोन ओमेगा स्क्वेअर आणि एक
आता आपण मॅट्रिक्स a 1 आणि मॅट्रिक्स a 2 तपासले तर प्रथम स्तंभ तीन बरोबर अदलाबदल करून आपण एका मधून दोन मिळवू शकतो म्हणून हा एक एक येथे जातो आणि हा स्तंभ पहिला स्तंभ म्हणून येतो त्यानंतर जर आपण या दोघांची अदलाबदल केली तर आपल्याला हे मॅट्रिक्स मिळते आणि स्तंभ एकची अदलाबदल केली जाते.
स्तंभ दोन आपल्याला माहित आहे की जर आपण दोन स्तंभ किंवा दोन ओळींची अदलाबदल केली तर निर्धारक निरपेक्ष मूल्यामध्ये समान राहतो परंतु त्याचे चिन्ह बदलते म्हणून प्रत्येक अदलाबदलीमध्ये अधिक ते वजा चिन्हाचा बदल होतो कारण आपल्याला एका वरून दोन मिळतात 2 चे दोन अदलाबदल निर्धारक 1 च्या वजा 1 चौरस निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहेत किंवा दोनचे निर्धारक एकाच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहेत म्हणून a चा निर्धारक एकच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे वजा दोनचा निर्धारक
शून्य कोणत्याही मॅट्रिक्सच्या समान आहे ज्याचा निर्धारक 0 आहे त्याला एकवचन मॅट्रिक्स म्हणतात त्याचप्रमाणे
शून्य निर्धारक असलेल्या
मॅट्रिक्सला एकवचनी आणि नॉन-सिनची संकल्पना नॉन-एकवचनी मॅट्रिक्स म्हणतात.
गुलर मॅट्रिक्स मॅट्रिक्सच्या व्युत्क्रमाची गणना करण्यासाठी खूप महत्वाचे आहे
म्हणून जर एक नॉन-एकवचनी मॅट्रिक्स असेल तर आपल्याला आणखी एक नॉन-एकवचनी मॅट्रिक्स सापडेल
प्रत्यक्षात ते दोन्ही स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत कारण आपण त्यांच्या निर्धारकांबद्दल बोलत आहोत म्हणून जेव्हा आपण इतर मॅट्रिक्सबद्दल बोलत आहोत
b समान परिमाणाचा किंवा a च्या समान क्रमाचा की b ने गुणाकार केला b बरोबर गुणाकार केला a समान आहे
n च्या ओळख मॅट्रिक्स n जेथे a आणि b n क्रॉसिंग मॅट्रिक्स आहेत प्रश्न असा आहे की दिलेला व्यस्त ah कसा मिळवायचा n क्रॉस n मॅट्रिक्स a या व्याख्यानात आपण निर्धारकांच्या सहाय्याने व्युत्क्रमाची गणना करू या आपण a च्या निर्धारकाच्या सहाय्याने व्युत्क्रमाची गणना करू आणि a चा जोड जोडा तुम्हा सर्वांना a च्या संलग्नकाशी परिचित आहे कारण शेवटच्या व्याख्यानाची आम्ही सविस्तर चर्चा केली आहे, आम्हाला माहित आहे की a चा भाग a in च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे म्हणून a च्या बरोबर भागाकार a च्या निर्धारकाने id समान आहे अस्तित्व मॅट्रिक्स म्हणून आपण अनेकदा a च्या निर्धारकाचा एक मॅट्रिक्स जोडतो की a च्या गुणाकार आणि a च्या निर्धारकाच्या गुणाकार ओळखीच्या समान असतात आणि त्याचप्रमाणे a च्या निर्धारकाच्या बरोबरीने गुणाकार केलेल्या समान असतात तेव्हापासून a चा एकवचन नसलेला निर्धारक हा शून्य नसतो म्हणून भागाकाराच्या निर्धारकाने भागाकार करणे
अर्थपूर्ण आहे आणि म्हणून अशा प्रकारे आपण मॅट्रिक्स धारण करू शकतो, म्हणजे भागाकार द्वारे भागाकार अशा प्रमाणे ज्याला एकतर पूर्व गुणाकाराने गुणाकार केला जातो.
किंवा गुणाकारानंतर ते ओळख देते आता प्रश्न आहे की मॅट्रिक्सचे दोन व्युत्क्रम असू शकतात उत्तर नाही का शक्य असल्यास b आणि

cb चे दोन व्युत्क्रम असू द्या म्हणून
a गुणिले b बरोबर b गुणिले a समान आहे आणि एक गुणा c आहे c च्या समान गुणाकार a समान आहे म्हणून c समान ओळख मॅट्रिक्स c ने गुणाकार केला b च्या बरोबर c ने गुणाकार केला b च्या बरोबर c ने गुणाकार केला b च्या बरोबरीचा आहे b च्या बरोबरीची आहे गुणिले ओळख b च्या बरोबर आहे म्हणून आपल्याला c मिळते b सारखे आहे किंवा दुसऱ्या शब्दात a चे दोन व्युत्क्रम समान आहेत हे दर्शविते की आपल्याला
प्रत्येक नॉन-एकवचनी मॅट्रिक्सशी संबंधित एक अद्वितीय ओळख असू शकते पाहिले आहे की आपण त्या ओळख मॅट्रिक्सची गणना करू शकतो किंवा a शी संबंधित असलेल्या संलग्न मॅट्रिक्सची गणना करून आणि त्याला मनोरंजक परिणामाच्या निर्धारकाने भागून तो ओळख मॅट्रिक्स शोधू शकतो जेथे a आणि b दोन n क्रॉसिंग मॅट्रिक्स आहेत ab चा व्यस्त किती आहे आम्हाला माहित आहे की ab ने b ने गुणाकार केला आहे inverse a व्युत्क्रम abb च्या
बरोबरीचा आहे व्युत्क्रम बरोबर आहे aia
व्युत्क्रम बरोबर आहे aa व्युत्क्रम समान आहे ओळख आहे म्हणून आपण व्युत्क्रमाच्या विशिष्टतेवरून असे म्हणू शकतो की ab व्युत्क्रम हे b च्या व्युत्क्रमाने गुणाकार केला आहे .
व्युत्क्रम दुसरा परिणाम जर a आणि b नॉन-एकवचनी मॅट्रिक्स असतील तर ab चा गुणाकार मॅट्रिक्सचा संलग्नक हा b च्या संलग्नक बरोबर गुणाकार केला तर पुरावा consi च्या संलग्नता der ab गुणिले b ची संलग्नता a च्या संलग्नतेच्या बरोबर असते मॅट्रिक्स गुणाकाराच्या बरोबरीने a गुणाकार b च्या संलग्नता a च्या संलग्नतेने गुणाकार केला जातो आता आपल्याला माहित आहे की b च्या संलग्नतेमध्ये b च्या निर्धारकाच्या बरोबरीची ओळख आहे a च्या बरोबरीने b च्या निर्धारकाच्या गुणाकाराने गुणाकार केला a च्या संलग्नतेसह गुणाकार केला b च्या निर्धारकाच्या बरोबर a च्या संलग्नतेने गुणाकार केला b च्या निर्धारकाच्या बरोबर a च्या ओळखीमध्ये b च्या निर्धारकाच्या समान आहे कारण ab ची संलग्नता अशी आहे ab च्या adjoint ने ab चा गुणाकार केला तर ab च्या ओळखी मध्ये ab च्या निर्धारकाच्या समान आहे म्हणून a च्या निर्धारकाच्या बरोबर b च्या ओळखीच्या निर्धारकाच्या समान आहे म्हणून आम्हाला आढळले की ab च्या संलग्नक मध्ये eb बरोबर ab च्या संलग्न मध्ये a च्या संलग्न मध्ये ab समान आहे a चा निर्धारक ते b च्या निर्धारकाला ओळख म्हणून दोन्ही बाजूंना ab व्युत्क्रमाने गुणाकार केल्याने ab चा संलग्नक बरोबर आहे b चा a च्या शेजारी मी एक उदाहरण देतो की a चा व्युत्क्रम 1 वजा 1 वजा 1 2 0 2 वजा 3 3 वजा 2 चार आता a चा निर्धारक एक बरोबर दोन ते चार वजा 3 मध्ये वजा 2 असेल तर मी पहिल्या स्तंभाच्या बाजूने अधिक 3 मध्ये विस्तारित करतो वजा 1 मध्ये वजा 3 वजा 2 मध्ये 2 समान 8 वजा 6 अधिक 3 मध्ये 3 वजा 4 समान 2 वजा 3 समान वजा 1 म्हणून a गैर-एकवचनी आहे कारण हे आहे 0 च्या बरोबरीचे नाही म्हणून आपण प्रथम a च्या संलग्नकाची गणना करून आणि नंतर त्यास निर्धारकाने भागून वजा एक आता a म्हणजे एक वजा एक दोन शून्य दोन वजा तीन तीन वजा दोन चार म्हणून एक वजा करून एक व्यस्त मोजू शकतो.
ते 4 ते 2 वजा वजा 3 ते वजा 2 बरोबर 8 वजा 6 बरोबर 2 a 1 2 बरोबरीचे कोफॅक्टर याच्या बरोबरीचे वजा 1 पूर्ण ते घात 1 अधिक 2 0 ते 4 वजा वजा 3 ते 3 आहे वजा 9 a 1 3 च्या बरोबरीचे शून्य ते वजा दोन वजा तीन मध्ये दोन समान उणे सहा एक दोन एक समान वजा 4 वजा 2 मध्ये वजा 2 बरोबर 0 a 2 2 बरोबर चार एक वजा तीन मध्ये दोन समान वजा दोन आणि एक दोन तीन समान वजा एक ते घात दोन अधिक तीन एकाने गुणाकार वजा दोन वजा वजा एक ते तीन समान वजा दोन अधिक तीन समान वजा एक तीन एक समान तीन वजा चार समान वजा एक एक तीन दोन समान उणे तीन वजा शून्य म्हणजे उणे तीन पण चिन्ह बदलेल म्हणून अधिक तीन आणि तीन तीन समान 2 वजा 0 बरोबर 2 म्हणून a च्या संयुक्त ठिकाणी आपल्याला त्या मॅट्रिक्सचे ट्रान्सपोज लिहून मिळते.
2 वजा 9 वजा 6 0 वजा 2 वजा 1 वजा 1 3 2 च्या बरोबरीने वजा 1 ने भाग केल्याने
वजा 2 0 1 9 2 वजा 3 आणि 6 होणार आहे.
1 वजा 2 तपासा की व्युत्क्रम एक गुणा समान आहे i श्री म्हणजे क्रम तीनची ओळख आहे आणि एक व्यस्त बिंदू a देखील i3 आहे हे मी तुमच्यासाठी व्यायाम म्हणून सोडत आहे आता प्रश्न असा आहे की व्युत्क्रमाचा निर्धारक काय आहे याचा अर्थ जर आपल्याकडे a चा निर्धारक असेल तर काय होणार आहे व्युत्क्रमाचा निर्धारक हे आपल्याला माहीत आहे की, एका व्युत्क्रमाचा निर्धारक समान आहे म्हणून एका व्युत्क्रमाचा निर्धारक हा i च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे कारण गुणाकाराचा निर्धारक निर्धारकाच्या गुणाकाराच्या समान आहे म्हणून a चा निर्धारक व्युत्क्रमाचा निर्धारक एकाच्या बरोबरीचा असतो किंवा व्युत्क्रमाचा निर्धारक एकाच्या निर्धारकाच्या बरोबर असतो म्हणून जर आपल्याला एखाद्याचा निर्धारक माहित असेल तर आपल्याला कळेल की त्याचा परस्परसंवादी उलटा उदाहरणाचा निर्धारक असेल की व्युत्क्रम काय आहे? a समान आहे 1 0 0 0 cos alpha sine alpha आणि zero sine alpha minus cos alpha आम्हाला या मॅट्रिक्सच्या व्युत्क्रमाची गणना करणे आवश्यक आहे आपण ते कसे करावे म्हणून आपण प्रथम cofact ची गणना करू
aa 1 1 च्या ors समान आहे cos alpha मध्ये वजा cos alpha वजा sine alpha in sine alpha is equal to minus cos स्क्वेअर अल्फा वजा sin स्क्वेअर अल्फा समान आहे वजा एक a 1 2 समान 0 पट वजा cos अल्फा वजा शून्य पट साइन अल्फा शून्य बरोबर 1 3 समान 0 गुणा साइन अल्फा वजा 0 गुणा कॉस अल्फा समान शून्य एक दोन एक समान शून्य गुणा वजा कॉस अल्फा वजा शून्य गुणा साइन अल्फा शून्य बरोबर दोन दोन समान उणे कॉस अल्फा वजा शून्य ते उणे कॉस अल्फा समान आहे त्याच प्रकारे दोन तीन समान वजा एक ते पॉवर 2 अधिक 3 ते 1 मध्ये साइन अल्फा
वजा 0 समान पाप अल्फा आणि तीन एक शून्य बरोबर आहेत सिन अल्फा वजा शून्य मध्ये कॉस अल्फा शून्य बरोबर तीन दोन समान वजा एक गुणा एक पाप अल्फा वजा शून्य बरोबर वजा पाप अल्फा आणि शेवटी तीन तीन समान साइन अल्फा शून्य बरोबर तीन तीन समान कॉस अल्फा मि मध्ये 1 पर्यंत us 0 कॉस अल्फा बरोबर आहे म्हणून a ची संलग्नता वजा 1 0 0 0 वजा कॉस अल्फा वजा पाप अल्फा शून्य वजा सायन अल्फा कॉस अल्फा म्हणून a च्या संलग्नता 1 0 0 0 कॉस अल्फा साइन अल्फा 0 साइन अल्फा वजा cos अल्फा गुणाकार वजा 1 0 0 0 वजा cos अल्फा वजा पाप अल्फा शून्य वजा पाप अल्फा cos अल्फा समान प्रथम पंक्ती प्रथम स्तंभ समान वजा एक पहिली पंक्ती दुसरा स्तंभ शून्य प्रथम पंक्ती तिसरा स्तंभ पुन्हा शून्य आहे दुसरी पंक्ती पहिला स्तंभ शून्याच्या समान आहे दुसरी

पंक्ती दुसरा स्तंभ उणे cos चौरस अल्फा उणे पाप चौरस अल्फा आणि दुसरी पंक्ती तिसरा स्तंभ उणे cos alpha sin alpha अधिक cos alpha sin alpha तिसरी पंक्ती पहिला स्तंभ शून्य तिसरी पंक्ती दुसरी आहे स्तंभ वजा cos alpha sine alpha अधिक cos alpha sine alpha आणि तिसरी पंक्ती तिसरा स्तंभ उणे साइन स्क्वेअर अल्फा वजा cos स्क्वेअर अल्फा च्या बरोबरीचा आहे म्हणून a च्या संलग्न मध्ये a समान आहे वजा 1 0 0 0 वजा 1 0 0 0 वजा 1 म्हणजे वजा 1 गुणिले क्रम 3 ची ओळख 3 क्रम 3 च्या ओळखीमध्ये a च्या निर्धारकाच्या समान आहे म्हणून आपण a चा व्यस्त भागाकार a च्या निर्धारकाने भागाकार करू शकतो.

वजा एक शून्य 0 0 वजा कॉस अल्फा वजा पाप अल्फा 0 वजा पाप अल्फा कॉस अल्फा मध्ये संपूर्ण भागिले वजा 1 समान आहे 1 0 0 0 कॉस अल्फा साइन अल्फा आणि 0 साइन अल्फा वजा कॉस अल्फा म्हणून हे उलट आहे दिलेले मॅट्रिक्स मला तुम्ही हे सत्यापित करावे असे वाटते की a इनव्हर्स इनव्हर्स इनव्हर्स टू ए आयडेंटिटी मॅट्रिक्सच्या समान आहे , मी आणखी एक उदाहरण देतो की मॅट्रिक्स एक दोन 2 2 1 2 2 2 1 हे समीकरण चौरस वजा 4 चे समाधान करते.

a वजा पाच गुणिले i तीन समान o बरोबर o जेथे o आहे 0 मॅट्रिक्स ऑफ ऑर्डर 3 क्रॉस 3 देखील वरील मॅट्रिक्सचा व्युत्क्रम शोधा कारण

a हे 1 2 2 2 1 2 2 2 1 a आहे चौरस म्हणजे a बरोबर a बरोबर 1 2 2 1 2 2 2 1 ने गुणाकार केला 1 2 2 2 1 2 2 2 1 बरोबर 9 8 ते 8 8 9 8 8 9 म्हणून s वर्ग वजा 4 a समान 9 8 8 8 9 8 8 8 9 वजा 4 गुणिले 1 2 2 2 1 2 2 2 1 बरोबर 5 0 0 0 5 0 0 0 5 हा क्रम 3 च्या ओळख मॅट्रिक्सच्या 5 पट आहे .

म्हणून चौरस वजा चार a बरोबर पाच i म्हणून चौरस वजा चार a वजा पाच i समान क्रम 3 क्रॉस 3 च्या 0 मॅट्रिक्सच्या बरोबरीने आहे म्हणून एक चौरस उणे 4 a बरोबर पाच i आधी एका व्युत्क्रमाने गुणाकार केल्यास चौरस वजा चार a म्हणजे i किंवा वजा 4 मध्ये उलटा पाच पट आयडेंटिटी मॅट्रिक्स हे व्युत्क्रमाच्या 5 पट

इतके असते म्हणून व्युत्क्रम वजा 4 पट ओळख मॅट्रिक्स भागिले 5 समान 1 2 2 2 1 2 2 2 1 वजा चार शून्य शून्य शून्य चार शून्य शून्य शून्य चार भाग पाच आहे वजा 3 ते 2 2 वजा 3 2 2 दोन वजा तीन भागिले पाच बरोबर वजा तीन बरोबर पाच दोन द्वारे पाच दोन दोन बाय पाच वजा तीन बाय पाच दोन बाय पाच दोन बाय पाच वजा तीन बाय दोन वजा तीन बाय पाच

त्यामुळे एकदा मॅट्रिक्सचे समीकरण असे दिले की , दिलेल्या मॅट्रिक्सच्या व्युत्क्रमाची आम्ही सहज गणना करू शकतो .

inverse is equal to inverse a is equal to identity मी हे व्याख्यान एका अवघड प्रश्नाने संपवतो जेव्हा a चा निर्धारक दिलेला असतो तेव्हा a च्या संलग्नकाचा निर्धारक काय असतो हे आम्हाला माहीत आहे a चा समायोजक बरोबर आहे a च्या समीपचा निर्धारक हा

क्रमाच्या ओळखीच्या निर्धारकाच्या समान आहे n जेथे a आहे n क्रॉस n n च्या

ओळखीच्या निर्धारकाच्या निर्धारकाच्या बरोबर आहे जेथे a n क्रॉस आहे n या मॅट्रिक्सच्या निर्धारकाच्या समान आहे n क्रॉसच्या क्रमाच्या a च्या निर्धारकाने गुणाकार केला जातो n n

संपूर्ण शक्तीच्या निर्धारकाच्या समान असतो n म्हणून a चा निर्धारक a च्या संलग्नतेच्या निर्धारकाच्या बरोबर असतो a च्या घात n म्हणून a च्या संलग्नीचा निर्धारक घात n वजा 1 च्या संपूर्ण निर्धारकाच्या समान आहे म्हणून a च्या संलग्नीचा

निर्धारक a च्या घात n वजा 1 पूर्ण घात n वजा बरोबर आहे 1 म्हणून

मॅट्रिक्स दिल्यास आपण

a च्या संलग्नाच्या व्यस्त निर्धारकाच्या निर्धारकाची गणना करू शकतो आणि ठीक मित्रांच्या संलग्नकाच्या समायोजकाच्या निर्धारकाची गणना करू शकतो, मी आज पुढील वर्गात येथे थांबतो मी विशेषत:

रेखीय प्रणाली सोडवताना निर्धारकांचे काही उपयोग दर्शवितो.

समीकरणे धन्यवाद