طلباء کو چوتھے لیکچر میں ڈیٹرمیننٹس میں خوش آمدید کہتے ہیں پچھلے لیکچر میں ہم نے تین کراس تھری میٹرکس کے کمپیوٹنگ ڈٹرمیننٹس پر
کراس این مربع میٹرکس کے حل کے لیے بھی بڑھایا جا سکتا ہے آج کے لیکچر میں ہم n کئی مسائل حل کیے ہیں لیکن وہاں تیار کردہ تکنیکوں کو
x 1 y 1 x 2 مختلف زاویوں سے تعین کنندگان کو دیکھیں آئیے پہلے مثلث کے علاقوں سے دیکھیں ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کا رقبہ پوائنٹس
یہ ہم y2 مائنس y1 میں x3 جمع y 1 مائنس y 3 میں x 2 جمع y 3 مائنس y 2 میں x 1 نصف ہے x 3 y 3 اور y 2
نے اپنے کوآرڈینیٹ جیومیٹری کے سوال میں دیکھا ہے کہ ہم اسے تعین کرنے والے نقطہ نظر سے کیسے دیکھ سکتے ہیں درج ذیل میٹرکس پر
تین یا تین x دو اور y دو x ایک y ایک x غور کریں ایک ایک ایک
تو ہم نے کیا کیا ہم نے تین پوائنٹس لیے ہیں لیکن یقیناً ہم نے پہلے کالم کے طور پر ایک اضافی کالم 1 1 1 لیا ہے
x 3 مائنس in x 2 y 3 برابر ہے minant 1 کا a کہتے ہیں a then deter تو اس میٹرکس کا تعین کنندہ کیا ہے اگر ہم اسے
x کے برابر ہے مائنس x 2 y 3 ایک یہ y دو x دو مائنس x one y جمع 1 ان x 3 y 1 مائنس in x 1 y 3 مائنس y 2 1
x کے برابر ہے اگر میں اب ان دو اصطلاحات میں سے x 2 yy مائنس x 1 y 2 پلس x 3 y 1 جمع x 1 y 3 مائنس 3 y 2
ایک مشترک لیتا ہوں
کو مشترک سمجھیں اور اگر میں باقی دو اصطلاحوں x 2 میں ملتا ہے ان دو اصطلاحات سے i جمع y 3 مائنس y 2 ون کو x تو مجھے
تین مشترک لیتا ہوں x میں سے
تو ہمیں یہ ملتا ہے لہذا اگر ہم مثلث کے رقبہ کے فارمولے سے موازنہ کریں
x 1 y 1 1 x 2 y 2 یا یہ x 1 y 1 1 x 2 y 2 1 x 3 y 3 تو ہمیں یہ رقبہ 1 کے تعین کنندہ کے نصف کے برابر ملتا ہے۔
کے نصف کے برابر ہے کچھ کتابوں میں آپ کو یہ اس طرح مل سکتا ہے جیسے میں نے کیا ہے۔ لیکن اگر ہم غور سے دیکھیں 1 x 3 y 3
تو ہم دیکھیں گے کہ یہ دونوں قدریں دراصل ایک جیسی ہیں کیونکہ یہاں اگر ہم پہلے کالم کو دوسرے کالم کے ساتھ تبدیل کرتے ہیں
یہاں آئے گا۔ پھر اس کے بعد اگر ہم دوسرے اور تیسرے کالم کو تبدیل کرتے ہیں x 1 x 2 x 2 تو ہم جانتے ہیں کہ 1 1 1 یہاں آئے گا
ملے گا اور یہاں ایک ایک یہاں اور ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم قطار کو دو قطاروں میں تبدیل کرتے ہیں y one y two y three تو مجھے یہاں
یا دو کالموں کو تبدیل کرتے ہیں
تو تعین کنندہ کو منفی پہلو ملتا ہے کیونکہ ہم اسے دو بار کرنا پڑے گا آخر کار ہمیں اسی نشان کے ساتھ ڈیٹرمیننٹ ملے گا اگر ڈیٹرمیننٹ منفی نکلتا
ہے
تو ہم اس علاقے کی مطلق قدر لیتے ہیں جو ظاہر ہے کیونکہ میٹرکس کا رقبہ منفی نہیں ہو سکتا اگر ڈیٹرمیننٹ صفر کا رقبہ ہو
تو کیا ہوتا ہے مثلث صفر ہو جائے گا اگر پوائنٹس ہم آہنگ ہوں
برابر ایک کوما a تو ہم آہنگی کو جانچنے کے لیے ہم اوپر والے طریقے سے ڈیٹرمیننٹ کا استعمال کر سکتے ہیں مثال کے طور پر دکھاتے ہیں کہ
a جمع c one b c جمع ab ہیں لہذا ہم ایک b collinear جمع a کوما c برابر c اور a جمع c کوما b برابر cb جمع b
جمع c 1 ba جمع b جمع a کے برابر ہے a یہ تعین کنندہ 1 2 c جمع 3 c برابر 3 c کا تعین کریں گے اب b جمع one ca
کے تعین میں جو 0 ہے کیونکہ یہ دونوں کالم ایک 1 1 1 abc 1 1 c جمع b جمع a برابر ہے c جمع b جمع c 1 ca جمع b
جیسے ہیں لہذا ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تین پوائنٹس ہمہ گیر ہیں جیسا کہ اس تین پوائنٹ سے بننے والی مثلث کا رقبہ صفر کے برابر ہے دوسری
ہیں collinear اور 1 کوما 1 b مثال اگر پوائنٹس ایک کوما 0 0 کوما
1 r کو 1 r کے برابر ہے 0 1 1 b 0 0 a کے برابر ہے کیونکہ یہ ہم آہنگ ہیں۔ جانئے 1 1 ab b جمع a تو ظاہر کریں کہ
2 r مائنس سے بدل کر 3 r کو 3 r حاصل کرتے ہیں اب 1 1 b 1 0 b مائنس a دو سے بدل کر ہم ڈیٹرمیننٹ 0 r مائنس
کے برابر ہے اب دوسری قطار کے پہلے کالم کے عنصر کے ساتھ b minus one 1 0 b 1 0 مائنس a ہمارے پاس ڈیٹرمیننٹ 0
برابر ہے مائنس 1 b مائنس 1 مائنس b پھیلانے سے ہم ڈیٹرمیننٹ حاصل کرتے ہیں مائنس 1 کے برابر ہے پاور 1 جمع 2 میں 1 میں 1 مائنس
ab برابر ہے b جمع a برابر ہے 0 کے برابر ہے یا b جمع ab اتنا برابر صفر کے ساتھ ہمارے پاس ایک مائنس b پلس ab میں مائنس
کی مساوات کو تلاش کرنے کے لیے a کے یہ وہی ہے جو ہمیں ایک اور مثال دکھانے کے لیے کہا گیا ہے کہ لائن میں شامل ہونے والے پوائنٹس
طریقہ استعمال کریں دو کوما چار ہی برابر دو کوما مائنس سکس کے برابر ہے ہم کوآرڈینیٹ جیومیٹری کے determinant determinant
مائنس 4 پر 10 ہے y جمع 2 پر مائنس 2 مائنس 2 یا x مائنس فور ہے فور جمع چھ برابر y اپنے علم سے پتہ چلتا ہے کہ لائن کی مساوات
جمع چار صفر کے برابر ہے اس y جمع چار x جمع سولہ یا دس y جمع 20 برابر مائنس چار x جمع 2 کے برابر یا 10 x مائنس 4 پر
کا استعمال کرتے ہوئے کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ کیا ہمیں ملتا ہے determinant منظر نامے کی صورت ہم جانتے ہیں لیکن اب ہم اسے
ایک ہی نتیجہ
کو مائنس ٹو کوما فور اور دو کوما مائنس سکس میں جوڑنے والی لائن پر کوئی بھی نقطہ ہو، لہذا 1 مائنس 2 4 1 2 مائنس y کوما x تو چلیں
r صفر کے برابر ہے erminant اس ڈیٹ xy صفر یا صفر مائنس 4 10 1 2 مائنس 6 کے برابر ہے 1 xy کا تعین کرنے والا ایک 6
r 2 برابر ہے 0 یہ y 1 xy مائنس 6 مائنس x ٹو سے بدل کر یا 0 کا تعین کنندہ مائنس 4 10 0 2 مائنس r one minus r کو one
y سے بدل کر ہے۔ اب اس میٹرکس کا تعین کنندہ کیا ہے یہ دراصل ان 2 بائی 2 سب میٹرکس یا مائنس 4 کا مائنس 6 مائنس 3 r مائنس 2 r کو
جمع چار صفر کے y جمع چار x برابر ہے 0 یا 10 x مائنس 20 جمع 10 y مائنس 10 میں 2 مائنس ایکس کے برابر ہے 0 یا 24 جمع 4
برابر ہے لہذا یہ دو دیے گئے پوائنٹس مائنس ٹو کوما فور اور دو کوما مائنس سکس سے گزرنے والی لائن کی مساوات ہے اور یہ وہی نتیجہ ہے
جو ہمیں لاگو کرنے کے بعد ملا ہے۔ کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا علم اس طرح بھی ہم دو پوائنٹس سے گزرنے والی لائن کی مساوات کا حساب لگا سکتے
va یونٹس ہے۔ یا 35 مربع یونٹ k 35 کوما c 5 کوما مائنس 6 اور b 2 ہیں آئیے ایک اور مثال لیتے ہیں اگر مثلث کا رقبہ مائنس 2 کوما 4
کا لیو اس لیے ہم جانتے ہیں کہ ہم ڈیٹرمیننٹ کا استعمال کر کے خیال حاصل کر سکتے ہیں جو کہ دیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ نصف میں k کیا ہے۔
کے برابر ہے یا 0 مائنس 4 10 1 70 k برابر ہے 35 یا 1 مائنس 2 1 4 2 مائنس 6 کا تعین 1 5 k مائنس 2 4 2 مائنس 6 5 1 1 1
r one minus برابر rho one برابر ہے ستر کے جیسا کہ میں نے پہلے کیا ہے k مائنس 6 کا تعین کرنے والا ہے اور ایک پانچ 2
r 3 ٹو یا 0 مائنس 4 10 1 دو کا تعین مائنس سکس صفر تین ک جمع چھ برابر ستر کے برابر ہے یہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں rho
اب ہم تعین کرنے والے کو تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں کیونکہ ہمارے پاس صرف 2 1 ہے غیر صفر استعمال کا r 2 مائنس r 3 برابر
جمع 6 مائنس 3 میں 10 برابر ہے 70 یا مائنس 1 گنا مائنس k تعین کرنے والا ہے مائنس 1 گنا اس میں اور یہ اس میں یا مائنس 1 گنا مائنس 4 گنا
جمع 24 جمع تیس کے برابر ہے ستر کے برابر ہے یا چار کے برابر سولہ کے برابر ہے اب میں آپ k مائنس 24 مائنس 30 برابر 70 یا 4 k 4
پر j کا تعین کنندہ ظاہر کیا ہے جیسا کہ a کو مائنس اور کوفیکٹرز کی اصطلاحات سے متعارف کرواتا ہوں اگر آپ کو یاد ہو کہ ہم نے میٹرکس
کو حذف کرنے کے j اور کالم rho 1 j m 1 j ہے جہاں m 1 j میں j میں مائنس 1 سے طاقت 1 جمع na 1 j سگما 1 سے
بعد a کے ساتھ پھیلتے ہوئے rho y کے ذیلی میٹرکس کا تعین کنندہ ہے اسی طرح ہم a کا determinant is equal to sigma
میں لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم اسے کالم کے ساتھ بڑھا کر بھی کر سکتے ہیں لیکن mij کو j جمع i مائنس 1 سے پاور over jaij
ith row سے ضرب کیا جا رہا ہے میٹرکس کے تعین کنندہ میں جو ہم j پلس i کی اصطلاح کو مائنس 1 سے پاور aij اہم بات یہ ہے کہ

سے مطابقت رکھتا ہے اس لیے دیے گئے میٹرکس کی تعریف aij کالم کو حذف کر کے حاصل کرتے ہیں۔ مائنر کہا جاتا ہے جو عنصر j اور
کالم کی پوزیشن پر ہے jth اور ith row پر غور کریں جو aij کہتے ہیں کہ اگر ہم عنصر
مائنس 1 میٹرکس n مائنس 1 کراس n کالم کو حذف کرنے کے بعد حاصل کردہ jth اور th row کے a ہے minor mij تو متعلقہ
کے تعین کنندہ کے اظہار کی a کا تعین کرنے والا بھی ہم نے دیکھا ہے کہ
کہتے ہیں قطار اور cofactor اس پوری چیز کو mij میں ضرب دیتے ہیں۔ j اور i کو مائنس ون سے ضرب aij توسیع میں ہم
دو کے برابر cm کے برابر ہے 1 2 پہلی قطار کو حذف کرنے کے بعد ذیلی میٹرکس کے تعین کنندہ کے برابر ہے اور دوسرا کالم dm پہلا کالم
کو ہم 2 2 m اور b ہے ایک کالم 1 کو حذف کرنے کے بعد ذیلی میٹرکس کے تعین کنندہ کے برابر ہے اور قطار 2 برابر ہے اسی طرح سے
ایک ایک ہے m کے برابر ہے لیکن کوفیکٹرز کیا ہیں کوفیکٹرز ایک ایک ہے مائنس ون کے برابر ہے پاور ون جمع ایک میں a حاصل کر سکتے ہیں
a ملے گا اور b اسی طرح مائنس ca 2 1 کے برابر ہے مائنس m 1 2 مائنس 1 کے برابر ہے پاور 1 پلس 2 میں qual to da 1 2
کے برابر ہے 2 2 a
a 1 1 a 1 2 a 1 3 a 2 1 تو یہ ٹھیک فرق ہے۔ کان کنوں اور کوفیکٹرز کے درمیان میں آپ سے ایک سادہ سا سوال پوچھتا ہوں اگر
دو ایک میں ایم دو ایک جمع دو دو میں ایم دو دو جمع ایک دو aa دو دو تین تین ایک تین دو تین تین کے برابر ہے ایک آپشن کا تعین کرنے والا a 2
تین میں ایم ٹو تھری کہ میں اسے دوسری قطار میں پھیلانے کی کوشش کر رہا ہوں لیکن ہمیں معلوم ہوا کہ علامات کا خیال نہیں رکھا گیا ہے۔ یہاں
ہمیں ای مائنس ون سے پاور ٹو پلس ون ہونا چاہیے تھا اس لیے یہاں ایک مائنس ہونا چاہیے تھا یہاں مائنس ہونا چاہیے تھا اس لیے یہ صحیح آپشن
جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس نے اس m 3 1 میں a 1 3 جمع m 2 1 میں a 1 2 مائنس m 1 1 میں ba 1 1 نہیں ہے
نشان کا خیال رکھا ہے جو یہاں جا رہا ہے مثبت رہو کیونکہ 1 جمع 1 یہاں یہ مثبت ہو رہا ہے کیونکہ 1 جمع 3 یہ اتنے بھی مائنس 1 ہیں طاقت
ایک دو کو کوفیکٹر a کے لیے ایک یکساں نمبر اسے ایک بناتا ہے لیکن یہاں یہ ایک اور دو ہے اس لیے مائنس کا نشان ہے لیکن یہاں مسئلہ یہ ہے
ca 3 1 in a 3 1 minus a 3 2 in a ایک دو ہونا چاہئے تھا لہذا یہ بھی غلط آپشن ہے m دو ایک سے ضرب دیا جاتا ہے جسے m
نابالغ ہم کوفیکٹرز استعمال کر رہے ہیں اس لیے کوفیکٹر کے اندر مائنس کے نشان کا پہلے a 3 3 in a three three کے علاوہ 3 2
ایک 1 3 میں d 3 1 ہی خیال رکھا جاتا ہے اس لیے یہ مائنس غلط ہے اس لیے یہ بھی ہمیں تعین کرنے والے آپشن کی صحیح قدر نہیں دیتا ہے
جمع ایک 2 3 میں ایک دو تین جمع ایک تین تین تین تین میں اگر ہم دیکھیں کہ ہم سمجھ سکتے ہیں کہ ہم کالم نمبر 3 کے ساتھ پھیل رہے ہیں اور ہر
میں اب ایک نیا d آپشن s i اصطلاح کو متعلقہ کوفیکٹرز سے مناسب طور پر ضرب دیا گیا ہے لہذا یہ صحیح جواب ہے لہذا جواب دیں
کے ٹرانسپوز کے طور aij کے ملحقہ کو میٹرکس a تصور متعارف کرواتا ہوں جسے میٹرکس کی تعریف کا ملحق کہا جاتا ہے مربع میٹرکس
ایک تین ایک دو ایک دو دو تین تین a 1 2 a کے برابر ہے۔ a 1 1 ہے جو کہ cofactor کا aij aij پر بیان کیا جاتا ہے جہاں
کا ملحق تھری کراس تھیوری میٹرکس ہے جو کہ ایک ایک ایک دو ایک تین ہے کیونکہ ہم لکھ رہے ہیں۔ جیسا کہ ٹرانسپوز a ایک تین دو تین تین پھر
a 2 1 a 2 2 2 3 a 3 1 a 3 2 a تین تین مثال اگر a abcd کے برابر ہے
d کا ملحق میٹرکس a کے برابر ہے لہذا a 2 2 a کے اور b برابر ہے مائنس ca 2 1 کے برابر ہے مائنس da 1 2 تو ایک ایک
ہے جو کہ اخترن عناصر کو ایک دوسرے سے تبدیل کیا جاتا ہے اور آف اخترن عناصر کے نشان کو تبدیل کیا جاتا ہے اس ba مائنس c مائنس
کے ملحقہ اوقات کی پیداوار کیا ہے۔ a طرح 2 کراس 2 میٹرکس کے لئے ہمیں ملحقہ ملتا ہے۔ آسانی سے اب
کے برابر ہے اور اگر میں اسے ba مائنس c مائنس d کا ملحقہ a کے برابر ہے اور abcd ہے a تو آئیے ہم یہ کرتے ہیں ہمارے پاس
ضرب کرتا ہوں
ہے اور مائنس سی بی پلس اشتہار cd مائنس cd پلس ab پلس ab مائنس bc مائنس ad تو ہمیں ایک دو کراس ٹو میٹرکس ملتا ہے جو کہ
کے تعین کنندہ کے برابر ہیں لہذا ہمارے 2 a کے 0 0 کے تعین کنندہ کے برابر ہے کہ یہ ایک اخترن میٹرکس ہے جس میں اخترن اندراجات a
جو کہ عام طور پر سائز دو کراس i ان میں a کے تعین کنندہ کے برابر ہے۔ a کا ملحقہ a کراس 2 میٹرکس کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ
ہے n کراس a n ٹو کا شناختی میٹرکس ہے اگر
مجھے n کراس کے شناختی میٹرکس میں n میں سائز a میں a کے متعین کے برابر ہے a کا ملحقہ a تو پھر ہم یہ بھی پاتے ہیں کہ
a 1 2 a 1 3 a 2 1 ہے p 1 1 کے ملحقہ کی پیداوار ہونے دیں جو a کو p تصدیق کرنے دو 3 کراس 3 میٹرکس کا نتیجہ اس لیے
کی قدر جیسا کہ p میں 1 1 1 1 2 3 1 2 2 2 1 3 3 1 3 2 3 3 کیا ہے 3 3 a 3 2 a 3 1 a 2 2 a 2 3
کے ایک میں ایک ایک صفر a برابر ہے p کا تعین کرنے والا ہے ہم اس بات کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں کہ a تین میں i میں نے کہا کہ یہ
ایک کو دیکھیں اگر ہم اس کو دیکھو یہ ایک ہے ایک میں ایک ایک میں ایک دو میں ایک دو میں ایک دو p صفر صفر صفر صفر صفر صفر آئیے
میں ایک دو میں ایک دو میں ایک دو اور ایک تین میں ایک تین میں پی 1 1 برابر ہے 1 1 میں 1 1 جمع 1 2 میں 1 2 جمع اے 1 3
کی پہلی قطار کے ساتھ پھیلتے ہیں a میں 1 3 جو ہم جانتے ہیں کہ جب ہم
کا تعین کنندہ دکھایا جا سکتا ہے ۔ ہمیں یہ ظاہر a تین تین کا تعین کرنے والا ہے p دو دو اور p تو یہ تعین کنندہ کا اظہار ہے لہذا یہ اسی طرح
ایک دو سے تصدیق کرتا ہوں p کرنے کی ضرورت ہے کہ آف اخترن عناصر صفر ہیں میں
ایک دو کیا ہے ایک 1 کے برابر ہے 2 1 جمع 1 2 میں 2 2 جمع 1 3 میں 2 3 برابر ہے 1 1 سے مائنس 1 سے طاقت 2 p ایک دو p تو
کو مائنس 1 میں 2 1 a جمع 1 2 a کیونکہ یہ ہمیں ملحقہ سے ملتا ہے۔ 3 3 a سے 3 a 1 3 جمع 1 کا تعین کرنے والا 1 2
جمع 1 3 3 a اور 1 3 3 a پاور 2 جمع 2 میں کیونکہ ہم 2 2 کے مساوی جوائنٹ جوائنٹ کمپیوٹنگ کر رہے ہیں اور اس لیے 1 1
ہونے جا رہا 2 3 1 a 2 1 2 a میں مائنس 1 سے پاور 2 جمع 3 کیونکہ ہم اسے 2 3 کے لیے کر رہے ہیں اور اس لیے یہ 1 1 3
مائنس 1 3 3 1 1 a جمع 1 1 3 3 2 جمع 1 2 3 3 a 1 2 a ہو رہا ہے۔ 1 1 a ہے اب آئیے اس کو بڑھاتے ہیں یہ مائنس
اب ہم ان اصطلاحات کو دیکھتے ہیں جو ہمیں پتہ چلتا ہے کہ 2 1 a 3 1 a جمع 1 3 2 3 1 a مائنس 1 3 3 1 3 a 2
اس لیے وہ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں یہ ایک ہے 3 3 a 1 1 a 1 2 a اور یہ جمع ہے 3 3 a سے 1 a 1 1 a مائنس
ایک ایک تین دو اس لیے وہ ایک دوسرے کو منسوخ بھی کرتے ہیں یہ مائنس ایک دو ایک تین تین a اور یہ مائنس ہے 1 3 2 3 a 1 1
تین ایک کے برابر ہے جمع ایک دو ایک تین ایک تین ایک اس لیے یہ بھی اس کے ساتھ منسوخ ہو جاتا ہے اس لیے یہ پوری چیز صفر کے برابر ہے۔
اس لیے میں نے پی ون ٹو کے لیے اس کی تصدیق کی ہے میں تجویز کرتا ہوں کہ آپ دیگر ترچھے عناصر پر کام کرکے اور ان کی قدروں کی گنتی
کا تعین کرنے والا برابر ہے۔ ایک میں تین ٹھیک a کے جوائنٹ میں a کرکے اپنے آپ کو قائل کریں جو ہم دیکھیں گے کہ صفر نکلے گا اس لیے
طلباء میں آج یہاں رکتا ہوں اگلی کلاس میں میں میٹرکس کے الٹا کے بارے میں بات کروں گا اور پھر میں اس کی کچھ خصوصیات دکھاؤں گا اور یہ
کہ ہم اسے سسٹم لکیری مساوات کو حل کرنے میں کیسے استعمال کرسکتے ہیں ٹھیک ہے طلباء آپ کا شکریہ آپ کا