चौथ्या व्याख्यानासाठी विद्यार्थ्यांचे स्वागत आहे शेवटच्या लेक्चरमध्ये आम्ही तीन क्रॉस थ्री मॅट्रिक्सच्या कॉम्प्युटिंग निर्धारकांच्या अनेक समस्या सोडवल्या आहेत परंतु तेथे विकसित केलेल्या तंत्रांचा विस्तार
n क्रॉस एन स्क्वेअर मॅट्रिक्ससाठी देखील आजच्या व्याख्यानात केला जाऊ शकतो.
निरनिराळ्या कोनातून निर्धारकांकडे पाहू या प्रथम त्रिकोणाच्या क्षेत्रांवरून पाहू या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ x 1 y 1 x 2 y 2 आणि x 3 y 3 बिंदूंनी दिलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ x 1 मध्ये y 2 वजा y 3 अधिक आहे x 2 मध्ये y 3 वजा y 1 अधिक x3 मध्ये y1 वजा y2 मध्ये हे आपण आमच्या समन्वय भूमिती प्रश्नामध्ये पाहिले आहे की आपण त्यास निर्णायक दृष्टीकोनातून कसे पाहू शकतो खालील मॅट्रिक्स एक एक एक x एक y एक x दोन y दोन आणि x विचारात घ्या तीन y तीन म्हणून आपण काय केले आपण तीन बिंदू घेतले आहेत परंतु अर्थातच आपण पहिला स्तंभ म्हणून अतिरिक्त स्तंभ 1 1 1 घेतला आहे म्हणून या मॅट्रिक्सचा निर्धारक काय आहे जर आपण त्याला नंतर निर्धारक म्हणतो a चा मिनंट 1 मध्ये x 2 y 3 वजा x 3 y 2 वजा 1 मध्ये x 1 y 3 वजा x 3 y 1 अधिक 1 मध्ये x एक y दोन वजा x दोन y एक हा x 2 y 3 च्या बरोबरीचा आहे वजा x 3 y 2 वजा x 1 y 3 अधिक x 3 y 1 अधिक x 1 y 2 वजा x 2 yy समान आहे जर मी आता या दोन संज्ञांमधून x एक समान घेतले तर मला x एक मध्ये y 2 वजा y 3 अधिक i मिळेल या दोन संज्ञांमधून x 2 सामाईक घ्या आणि जर मी उर्वरित दोन संज्ञांमधून x तीन सामाईक घेतले तर आपल्याला हे मिळेल म्हणून आपण त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्राशी तुलना केल्यास आपल्याला ते क्षेत्रफळ 1 च्या निर्धारकाच्या अर्ध्या बरोबर मिळते.
x 1 y 1 1 x 2 y 2 1 x 3 y 3 किंवा ते x 1 y 1 1 x 2 y 2 1 x 3 y 3 च्या अर्ध्या सारखे आहे काही पुस्तकांमध्ये तुम्हाला ते मिळेल जसे मी केले आहे.
हे पण जर आपण काळजीपूर्वक पाहिले तर आपल्याला दिसेल की ही दोन व्हॅल्यू प्रत्यक्षात सारखीच आहेत कारण येथे जर आपण पहिला कॉलम दुसऱ्या कॉलमसह स्वॅप केला तर आपल्याला माहित आहे की 1 1 1 येथे येईल x 1 x 2 x 2 येथे येईल.
त्यानंतर जर आपण दुसरा आणि तिसरा स्तंभ स्वॅप केला तर मला येथे y एक y दोन y तीन मिळेल आणि येथे एक एक मिळेल आणि आपल्याला माहित आहे की जर आपण पंक्ती दोन ओळींची अदलाबदल केली किंवा दोन स्तंभांची अदलाबदल केली तर निर्धारकाला नकारात्मक बाजू मिळते कारण आपण हे दोनदा करावे लागेल अखेरीस समान चिन्हासह निर्धारक प्राप्त होईल जर निर्धारक ऋण बाहेर आला तर आपण स्पष्ट असलेल्या क्षेत्रासाठी परिपूर्ण मूल्य घेतो कारण मॅट्रिक्सचे क्षेत्रफळ ऋण असू शकत नाही जर निर्धारक शून्य क्षेत्रफळ असेल तर काय होईल जर बिंदू समरेख असतील तर त्रिकोण शून्य असेल
म्हणून समरेखता तपासण्यासाठी आपण
वरील प्रकारे निर्धारक वापरू शकतो उदाहरण दाखवा की a समान स्वल्पविराम b अधिक cb समान b स्वल्पविराम c अधिक a आणि c समान स्वल्पविराम a अधिक b समरेषीय आहेत म्हणून आपण
एक ab अधिक c एक b c अधिक a एक ca अधिक b चा निर्धारक मोजू आता c 3 is equal to c 3 अधिक c 2 हा निर्धारक 1 a च्या बरोबरीचा आहे.

a अधिक b अधिक c 1 ba अधिक b अधिक c 1 ca अधिक b अधिक c
1 1 1 abc 1 1 1 च्या निर्धारकामध्ये a अधिक b अधिक c समान आहे जे 0 आहे कारण हे दोन स्तंभ समान आहेत म्हणून आपण पाहू शकतो की हे तीन बिंदू समरेषीय आहेत जसे या तीन बिंदूने तयार केलेला त्रिकोण क्षेत्रफळ शून्याच्या बरोबरीचे आहे दुसरे उदाहरण जर स्वल्पविराम 0 0 स्वल्पविराम b आणि 1 स्वल्पविराम 1 हे बिंदू समरेषीय असतील तर दर्शवा a प्लस b हे ab च्या समान आहेत कारण ते समरेखीय आहेत
1 1 1 a 0 0 b 1 1 चा निर्धारक जाणून घ्या
r 1 च्या जागी r 1 वजा r दोन ने 0 च्या बरोबरीने r 1 वजा r दोन ने 0 a वजा b 1 0 b 1 1 1 आता r 3 च्या जागी r 3 वजा करून निर्धारक मिळेल r 2 आमच्याकडे निर्धारक हे 0 a वजा b 1 0 b 0 1 एक वजा b सारखे आहे आता दुसऱ्या पंक्तीच्या पहिल्या स्तंभ घटकासह विस्तारित केल्याने आपल्याला निर्धारक मिळतात वजा 1 ते घात 1 अधिक 2 ते 1 मध्ये 1 मध्ये 1 वजा b वजा 1 मध्ये वजा b समान आहे वजा 1 मध्ये a वजा ab अधिक b म्हणून समान शून्य सह ting आमच्याकडे एक उणे ab अधिक b समान आहे 0 किंवा a अधिक b समान आहे ab हे असे आहे जे आम्हाला दुसरे उदाहरण दर्शविण्यास सांगितले गेले आहे.
दोन स्वल्पविराम चार b समान दोन स्वल्पविराम वजा सहा हे आम्हाला समन्वय भूमितीच्या ज्ञानावरून कळते की रेषेचे समीकरण y वजा चार वर चार अधिक सहा आहे x अधिक 2 वर वजा 2 वजा 2 किंवा y वजा 4 वर 10 आहे समान x अधिक 2 वर वजा 4 किंवा 10 x अधिक 20 समान आहे वजा चार y अधिक सोळा किंवा दहा x अधिक चार y अधिक चार समान शून्य आहे ही परिस्थिती आम्हाला माहित आहे परंतु आता आम्ही निर्धारक वापरून करतो आणि आम्ही ते मिळवतो का ते पाहतो समान परिणाम म्हणून x स्वल्पविराम y हा उणे दोन स्वल्पविराम चार आणि दोन स्वल्पविराम वजा सहा जोडणाऱ्या रेषेवरील कोणताही बिंदू असू द्या म्हणून 1 वजा 2 4 1 2 वजा 6 एक xy हा शून्य किंवा शून्य वजा 4 10 1 2 वजा 6 चा निर्धारक आहे 1 xy हे det r one ला r वन वजा r दोन ने बदलून एर्मिनंट शून्य आहे किंवा 0 वजा 4 10 0 2 वजा x वजा 6 वजा y 1 xy बरोबर 0 आहे हे r 2 च्या जागी r 2 वजा r 3 ने केले आहे.
आता या मॅट्रिक्सचा निर्धारक काय आहे हा प्रत्यक्षात या 2 बाय 2 सब मॅट्रिक्सचा निर्धारक आहे किंवा वजा 4 ते वजा 6 वजा y वजा 10 ते 2 वजा x समान 0 किंवा 24 अधिक 4 y वजा 20 अधिक 10 x समान आहे 0 किंवा 10 x अधिक चार y अधिक चार हे शून्य बरोबर आहे म्हणून हे दोन दिलेल्या बिंदूंमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण आहे
वजा दोन स्वल्पविराम चार आणि दोन स्वल्पविराम वजा सहा आणि हाच परिणाम आहे जो आपल्याला लागू केल्यानंतर प्राप्त झाला आहे.
समन्वय भूमितीचे ज्ञान म्हणून अशा प्रकारे आपण दोन दिलेल्या बिंदूंमधून जाणाऱ्या रेषेच्या समीकरणाची गणना करू शकतो, जर

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ a वजा 2 स्वल्पविराम 4 b 2 स्वल्पविराम वजा 6 आणि c 5 स्वल्पविराम k 35 एकके असेल तर आपण दुसरे उदाहरण घेऊ.

किंवा 35 चौरस एकके va काय आहे k चा lue म्हणून आपल्याला माहित आहे की 1 1 1 उणे 2 4 2 वजा 6 5 k बरोबर 35 किंवा 1 वजा 2 4 1 2 वजा 6 चा अर्धा भाग म्हणजे निर्धारक वापरून आपण कल्पना मिळवू शकतो.

1 5 k बरोबर 70 किंवा 0 वजा 4 10 1 2 वजा 6 चा निर्धारक आणि एक पाच k बरोबर सत्तर आहे जसे मी आधी केले आहे rho एक समान r एक वजा rho दोन किंवा 0 वजा 4 10 1 दोनचा निर्धारक उणे सहा शून्य तीन k अधिक सहा म्हणजे सत्तर हे आपल्याला r 3 बरोबर r 3 वजा r 2 असे केल्याने मिळते आता आपण निर्धारक शोधण्याचा प्रयत्न करू कारण आपल्याकडे फक्त 2 1 आहे तो शून्य नसलेला वापर निर्धारक होणार आहे यामध्ये वजा 1 पट यात आणि हे यामध्ये किंवा वजा 1 मध्ये वजा 4 पट k अधिक 6 वजा 3 ते 10 बरोबर 70 किंवा वजा 1 ते वजा 4 k वजा 24 वजा 30 समान 70 किंवा 4 k अधिक 24 अधिक तीस सत्तरच्या बरोबरीचे आहे किंवा चार k म्हणजे सोळा च्या बरोबरीचे आहे

किंवा k बरोबर चार हे उत्तर आहे ठीक विद्यार्थी आता मी तुम्हाला वजा आणि सहघटक या संज्ञांशी परिचय करून देतो, जर तुम्हाला आठवत असेल की आम्ही मॅट्रिक्स a चा निर्धारक सिग्मा ओव्हर j प्रमाणे 1 ते na 1 j मध्ये वजा 1 ते घात 1 अधिक j मध्ये m 1 j मध्ये व्यक्त केला आहे जेथे m 1 j हा rho 1 आणि स्तंभ j हटवल्यानंतर a च्या सब मॅट्रिक्सचा निर्धारक आहे त्याच प्रकारे आपण a चा निर्धारक देखील लिहू शकतो सिग्मा वर जैज वजा 1 ते घात i अधिक j मध्ये mij मध्ये

rho y च्या बाजूने विस्तार करून त्याचप्रमाणे आपण कॉलमच्या बाजूने विस्तार करून देखील हे करू शकतो परंतु महत्त्वाचे म्हणजे aij हा शब्द वजा 1 ने गुणाकार केला जात आहे i plus j या मॅट्रिक्सच्या निर्धारकात जो आपण ith row आणि j स्तंभ या mij हटवून मिळवतो.

आयआयजी या घटकाशी संबंधित मायनर म्हणतात म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्सची व्याख्या सांगा जर आपण आयआयजी घटकाचा विचार केला जो th पंक्ती आणि

jth स्तंभाच्या स्थानावर आहे

तर संबंधित मायनर mij आहे n वजा 1 क्रॉस n वजा 1 मॅट्रिक्सचा निर्धारक

a ची th पंक्ती आणि jth स्तंभ हटवल्यानंतर प्राप्त होतो हे देखील आपण पाहिले आहे की a च्या निर्धारकाच्या अभिव्यक्तीच्या विस्तारामध्ये आपण aij ला वजा एक सह गुणाकार करतो i अधिक j मध्ये mij या संपूर्ण गोष्टीला cofactor टू aij म्हणतात उदाहरणार्थ मॅट्रिक्स a हे abcd च्या बरोबरीचे आहे

म्हणून a चा निर्धारक ad वजा bc च्या बरोबरीचा आहे म्हणून m 1 1 या साठी किरकोळ आहे a हा पहिला हटवल्यानंतर सब मॅट्रिक्सचा निर्धारक आहे.

पंक्ती आणि पहिला स्तंभ dm च्या समान आहे 1 2

पहिली पंक्ती हटवल्यानंतर सब मॅट्रिक्सच्या निर्धारकाच्या बरोबरी आहे आणि दुसरा स्तंभ cm दोन च्या बरोबरीचा आहे स्तंभ 1 हटवल्यानंतर सब मॅट्रिक्सच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे

आणि पंक्ती 2 समान आहे b आणि m 2 2 अशाच प्रकारे आपण a च्या बरोबरीने मिळवू शकतो पण cofactors कोणते आहेत cofactors a one is equal to minus one to power one अधिक m one one is e qual to da 1 2 समान आहे वजा 1 ते घात 1 अधिक 2 मध्ये m 1 2 बरोबर उणे ca 2 1 अशाच प्रकारे उणे b आणि a 2 2 समान असेल a म्हणजे सूक्ष्म फरक खाण कामगार आणि कोफॅक्टर यांच्यात मी तुम्हाला एक साधा प्रश्न विचारतो की a 1 1 a 1 2 a 1 3 a 2 1 a 2 दोन दोन तीन तीन एक तीन दोन तीन तीन खालीलपैकी जे देते aa दोन एक मध्ये m दोन एक अधिक a दोन दोन मध्ये m दोन दोन अधिक a दोन तीन मध्ये m दोन तीन या पर्यायाचा निर्धारक म्हणजे मी दुसऱ्या ओळीत त्याचा विस्तार करण्याचा प्रयत्न करीत आहे परंतु आम्हाला आढळले की चिन्हांची काळजी घेतली गेली नाही येथे आपण ई वजा एक ते पॉवर टू प्लस वन असायला हवे होते म्हणून येथे उणे असायला हवे होते येथे वजा असायला हवे होते म्हणून हा योग्य

पर्याय नाही ba 1 1 मध्ये m 1 1 वजा a 1 2 मध्ये m 2 1 अधिक a 1 3 मध्ये m 3 1 म्हणून आपण पाहू शकतो की त्याने येथे असलेल्या चिन्हाची काळजी घेतली आहे सकारात्मक व्हा कारण 1 अधिक 1 येथे ते सकारात्मक होणार आहे कारण 1 अधिक 3 हे अगदी वजा 1 च्या घात आहेत सम संख्या त्याला एक बनवते परंतु येथे ते एक आणि दोन आहे म्हणून वजा चिन्ह आहे परंतु येथे समस्या आहे a एक दोन हा कोफॅक्टर m दोन एक ने गुणाकार केला आहे जो m एक दोन असायला हवा होता म्हणून हा देखील चुकीचा पर्याय आहे ca 3 1 मध्ये a 3 1 वजा a 3 2 मध्ये 3 2 अधिक a 3 3 मध्ये तीन तीन ऐवजी येथे अल्पवयीन आम्ही cofactors वापरत आहोत

म्हणून वजा चिन्हाची आधीच cofactor च्या आत काळजी घेतली आहे म्हणून हे वजा चुकीचे आहे

त्यामुळे हे देखील आम्हाला निर्धारक पर्याय d चे योग्य मूल्य देत नाही 1 3 मध्ये 1 3 अधिक a 2 3 मध्ये एक दोन तीन अधिक तीन तीन मध्ये तीन तीन असे पाहिले तर आपण समजू शकतो की आपण स्तंभ क्रमांक 3 च्या बाजूने विस्तारत आहोत आणि प्रत्येक संज्ञा योग्यरित्या संबंधित कोफॅक्टर्सने गुणाकार केली आहे म्हणून हे योग्य उत्तर आहे म्हणून उत्तर i s पर्याय d मी आता एक नवीन संकल्पना मांडतो ज्याला मॅट्रिक्सच्या व्याख्येचे संलग्नक म्हणतात चौरस मॅट्रिक्स a चे संलग्नक मॅट्रिक्स aij चे ट्रान्सपोज म्हणून परिभाषित केले जाते जेथे aij हा aij चा cofactor आहे

म्हणजे a 1 च्या बरोबरीचा असल्यास.

1 a 1 2 a एक तीन दोन एक दोन दोन दोन दोन तीन तीन

एक तीन दोन तीन तीन नंतर a चे संलग्न तीन क्रॉस सिद्धांत मॅट्रिक्स आहे जे एक एक एक एक दोन एक तीन आहे कारण आपण लिहित आहोत ट्रान्सपोज a 2 1 a 2 2 a 2 3 a 3 1 a 3 2 a तीन तीन उदाहरण जर a समान abcd असेल तर a एक समान da 1 2 बरोबर उणे ca 2 1 समान b उणे आणि a 2 2 हे a च्या बरोबरीचे आहे म्हणून a चे संलग्न मॅट्रिक्स d वजा

c वजा ba आहे म्हणजे कर्ण घटक अदलाबदल केले जातात आणि बंद कर्ण घटकांचे चिन्ह बदलले जाते अशा प्रकारे 2 क्रॉस 2 मॅट्रिक्ससाठी आपल्याला
संलग्नक मिळते सहज आता a च्या समीप गुणाकार किती आहे
तर आपण ते करू या आपल्याजवळ a आहे abcd च्या बरोबरीचे आणि a चे संलग्नक d उणे c वजा ba च्या बरोबरीचे आहे आणि जर मी याचा गुणाकार केला तर आपल्याला दोन क्रॉस टू मॅट्रिक्स मिळेल जे ad वजा bc वजा ab अधिक ab अधिक cd वजा cd आहे आणि वजा cb अधिक जाहिरात हे a च्या 0 0 निर्धारकाच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे म्हणजे ते a च्या निर्धारकाच्या समान कर्ण प्रविष्ट्यांसह एक कर्ण मॅट्रिक्स आहे म्हणून आपल्या 2 क्रॉस 2 मॅट्रिक्ससाठी आपण पाहतो की a च्या समायोजकाच्या निर्धारकाच्या समान आहे a into i जे साधारणपणे दोन क्रॉस दोन आकाराचे आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे जर a n क्रॉस n असेल तर आपल्याला a चे संलग्नक a च्या निर्धारकाच्या बरोबर a मध्ये a मध्ये n क्रॉसच्या आयडेंटिटी मॅट्रिक्सच्या समान आहे
n मला सत्यापित करू द्या 3 क्रॉस 3 मॅट्रिक्सचा परिणाम म्हणून p हा a च्या संलग्नकातील a चे गुणाकार असू द्या जो p आहे तो 1 1 a 1 2 a 1 3 a 2 1 a 2 2 a 2 3 a 3 1 a 3 2 a आहे.
 3 3 मध्ये 1 1 a 1 2 1 3 a 2 1 a 2 2 2 3 a 3 1 a 3 2 a 3 3 काय आहे मी म्हटल्याप्रमाणे p चे मूल्य i थ्री मध्ये a चा निर्धारक असणार आहे, आम्ही हे सत्यापित करू इच्छितो की p एक मध्ये एक च्या निर्धारकाच्या समान आहे एक शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य आपण p एक एक पाहू तर हे पहा हे एक एक एक मध्ये एक एक एक दोन मध्ये एक दोन आणि एक तीन मध्ये एक तीन p 1 1 1 1 मध्ये 1 1 अधिक 1 2 मध्ये 1 2 अधिक a आहे 1 3 मध्ये 1 3 जे आपल्याला माहित आहे की जेव्हा आपण a च्या पहिल्या पंक्तीसह विस्तृत करतो तेव्हा निर्धारकाची अभिव्यक्ती असते म्हणून हे
समान p दोन दोन आणि p तीन तीनचे
निर्धारक असेल हे a चे निर्धारक असल्याचे दर्शविले जाऊ शकते.
 आपल्याला हे दाखवायचे आहे की ऑफ कर्ण घटक शून्य आहेत मी p एक दोन सह पडताळतो म्हणजे p एक दोन p एक दोन म्हणजे एक 1 मध्ये 2 1 अधिक 1 2 मध्ये 2 2 अधिक 1 3 मध्ये 2 समान आहे 3 हे 1 1 ते वजा 1 ते
1 2 a 1 3 a 3 ते 3 3 च्या घात 2 अधिक 1 निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे कारण हे आपल्याला च्या संलग्नकातून मिळते a 2 1 अधिक a 1 2 मध्ये वजा 1 ते घात 2 अधिक 2 मध्ये कारण आपण 2 2 शी संबंधित ऍड जॉइंटची गणना करत आहोत आणि म्हणून 1 1 1 3 3 1 आणि 3 3 अधिक 1 3 मध्ये निर्धारक वजा 1 ते घात 2 अधिक 3 कारण आपण ते 2 3 साठी करत आहोत आणि म्हणून ते 1 1 1 2 3 1 3 2 होणार आहे आता आपण त्याचा विस्तार करू या हे उणे 1 होणार आहे 1 a 1 2 a 3 3 अधिक a 1 1 a 1 3 a 3 2 अधिक a 1 2 a 1 1 a 3 3 वजा a 1 2 a 1 3 a 3 1 वजा 1 3 a 1 1 3 2 अधिक a 1 3 a 3 1 a 1 2 आता आपण अ 1 1 a 1 ते 1 a 3 3 वजा 1 2 a 1 1 a 3 3 असे आढळून आलेल्या अटींकडे पाहू या आणि हे अधिक आहे 1 2 a 1 1 a 3 3
 त्यामुळे ते एकमेकांना रद्द करतात .
   1 1 a 1 3 a 3 2 आणि हे वजा एक 1 3 एक एक एक तीन दोन म्हणून ते एकमेकांना रद्द देखील करतात हे वजा एक दोन एक एक तीन तीन तीन एक समान आहे अधिक एक दोन एक तीन एक तीन एक म्हणून हे देखील यासह रद्द होते म्हणून ही संपूर्ण गोष्ट शून्य आहे म्हणून मी p एक दोन साठी हे सत्यापित केले आहे,
मी सुचवितो की तुम्ही इतर कर्ण घटकांवर कार्य करून आणि त्यांची मूल्ये मोजून स्वतःला पटवून द्या जे आपण पाहणार आहोत की ते शून्य होईल म्हणून a च्या संयुक्त मध्ये a च्या निर्धारकाच्या समान आहे a टू i तीन ठीक आहे विद्यार्थी मी आज पुढच्या वर्गात इथे थांबतो मी मॅट्रिक्सच्या व्युत्क्रमाबद्दल बोलेन आणि नंतर मी त्याचे काही गुणधर्म दाखवेन आणि आम्ही ते सिस्टम रेखीय समीकरणे सोडवण्यासाठी कसे वापरू शकतो हे दाखवेन ठीक आहे विद्यार्थी धन्यवाद तुमचे