पिछले व्याख्यान में निर्धारकों पर चौथे व्याख्यान में छात्रों का स्वागत करते हैं हमने तीन क्रॉस थ्री मैट्रिसेस के निर्धारकों की गणना पर कई समस्याओं को हल किया है, लेकिन वहां विकसित तकनीकों को एन क्रॉस एन स्क्वायर मैट्रिसेस के लिए भी हल करने के लिए बढ़ाया जा सकता है आज के व्याख्यान में हम निर्धारकों पर गौर करेंगे विभिन्न कोणों से आइए पहले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को देखें, हम जानते हैं कि त्रिभुज का क्षेत्रफल x 1 y 1 x 2 y 2 और x 3 y 3 गुणा x 1 गुणा y 2 घटा y 3 जमा x 2 गुणा द्वारा दिया गया है। y 3 घटा y 1 जमा x3 गुणा y1 घटा y2 यह हमने अपने निर्देशांक ज्यामिति प्रश्न में देखा है कि हम इसे एक निर्धारण परिप्रेक्ष्य से कैसे देख सकते हैं निम्नलिखित मैट्रिक्स पर विचार करें एक एक x एक y एक x दो y दो और x तीन y तीन तो हमने जो किया है हमने तीन अंक लिए हैं लेकिन निश्चित रूप से हमने पहले कॉलम के रूप में एक अतिरिक्त कॉलम 1 1 1 लिया है,

इसलिए इस मैट्रिक्स का निर्धारक क्या है यदि हम इसे कहते हैं तो एक का निर्धारक 1 गुणा x के बराबर है 2 y 3 घटा x 3 y 2 घटा 1 गुणा x 1 y 3 minu s x 3 y 1 जमा 1 गुणा x एक y दो घटा x दो y एक यह बराबर है x 2 y 3 घटा x 3 y 2 घटा x 1 y 3 जमा x 3 y 1 जमा x 1 y 2 घटा x 2 yy है इसके बराबर अगर मैं अब इन दो शब्दों में से x एक सामान्य लेता हूं तो मुझे x एक गुणा y 2 घटा y 3 प्लस मैं इन दो पदों से सामान्य होने के लिए x 2 लेता हूं और यदि मैं शेष दो पदों में से x तीन सामान्य लेता हूं तो हमें यह मिलता है

इसलिए यदि हम त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र से तुलना करते हैं तो हम पाते हैं कि क्षेत्रफल 1 x 1 y 1 1 x 2 y 2 1 x 3 y 3 के सारणिक के आधे के बराबर है या यह x 1 y 1 के आधे के बराबर है 1 x 2 y 2 1 x 3 y 3 कुछ किताबों में से एक आपको ऐसा मिल सकता है जैसे मैंने इसे इस तरह किया है लेकिन अगर हम ध्यान से देखें तो हम देखेंगे कि ये दोनों मान वास्तव में समान हैं क्योंकि यहां यदि हम पहले कॉलम को स्वैप करते हैं दूसरे कॉलम के साथ हम जानते हैं कि 1 1 1 यहां आएगा x 1 x 2 x 2 यहां आएगा फिर उसके बाद अगर हम दूसरे और तीसरे कॉलम को स्वैप करते हैं तो मुझे यहां y एक y दो y तीन और एक यहां एक और हम यह जान लें कि यदि हम पंक्ति की दो पंक्तियों को आपस में बदल दें तो o r दो स्तंभों का आदान-प्रदान करते हैं, तो निर्धारक को एक नकारात्मक पक्ष मिलता है क्योंकि हमें इसे दो बार करना होता है, अंततः हमें एक ही चिन्ह के साथ सारणिक मिलेगा यदि निर्धारक ऋणात्मक निकलता है तो हम उस क्षेत्र के लिए निरपेक्ष मान लेते हैं जो स्पष्ट है क्योंकि एक मैट्रिक्स का क्षेत्र ऋणात्मक नहीं हो सकता यदि सारणिक है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा यदि बिंदु संरेखीय हैं

इसलिए संरेखता का परीक्षण करने के लिए हम उपरोक्त तरीके से सारणिक का उपयोग कर सकते हैं उदाहरण दिखाएँ कि a एक अल्पविराम के बराबर है b जमा c b के बराबर है बी कॉमा सी प्लस ए और सी सी के बराबर है कॉमा ए प्लस बी कॉललाइनर हैं

इसलिए हम एक एबी प्लस सी एक बीसी प्लस ए वन सीए प्लस बी के सारणिक की गणना करेंगे अब सी 3 सी 3 प्लस सी 2 के बराबर है । सारणिक 1 एए प्लस बी प्लस सी 1 बीए प्लस बी प्लस सी 1 सीए प्लस बी प्लस सी के बराबर है जो 1 1 1 एबीसी 1 1 1 के सारणिक में है जो कि 0 है क्योंकि ये दो कॉलम समान हैं

इसलिए हम देख सकते हैं कि ये तीन बिंदु समरेख हैं जैसे कि त्रिभुज b . बनता है y यह तीन बिंदु क्षेत्र के रूप में शून्य के बराबर है एक और उदाहरण यदि अंक एक अल्पविराम 0 0 अल्पविराम बी और 1 अल्पविराम 1 संरेख हैं तो दिखाएं कि ए प्लस बी एबी के बराबर है क्योंकि ये संरेख हैं हम 1 1 1 ए 0 0 के निर्धारक को जानते हैं b 1 1 r 1 को r 1 घटाकर r दो से बदलने पर 0 के बराबर है , हमें सारणिक 0 a माइनस b 1 0 b 1 1 1 प्राप्त होता है, अब r 3 को r 3 घटाकर r 2 से बदलने पर हमारे पास सारणिक समान है 0 ए माइनस बी 1 0 बी 0 1 एक माइनस बी अब दूसरी पंक्ति के साथ विस्तार करने पर पहले कॉलम एलिमेंट से हमें सारणिक माइनस 1 के बराबर घात 1 प्लस 2 गुणा 1 गुणा ए गुणा 1 घटा बी माइनस 1 गुणा माइनस बी होता है माइनस 1 में माइनस एबी प्लस बी के बराबर है,

इसलिए शून्य के साथ बराबरी करने पर हमारे पास माइनस एबी प्लस बी बराबर 0 या ए प्लस बी बराबर एबी है। बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण a ऋणात्मक दो अल्पविराम चार b के बराबर है, दो अल्पविराम ऋण छह के बराबर है जिसे हम निर्देशांक ज्यामिति के अपने ज्ञान से जानते हैं समीकरण o f लाइन है y घटा चार बटा चार जमा छह बराबर x जमा 2 बटा माइनस 2 घटा 2 या y घटा 4 बटा 10 बराबर है x जमा 2 बटा माइनस 4 या 10 x जमा 20 बराबर माइनस चार y जमा सोलह है या दस x जमा चार y जमा चार शून्य के बराबर है, इस परिदृश्य के मामले में हम जानते हैं लेकिन अब हम इसे निर्धारक का उपयोग करते हैं और देखते हैं कि क्या हमें एक ही परिणाम मिलता है,

इसलिए x अल्पविराम को शून्य से दो अल्पविराम चार और दो को जोड़ने वाली रेखा पर कोई बिंदु होने दें कॉमा माइनस छह

इसलिए 1 माइनस 2 4 1 2 माइनस 6 एक xy बराबर शून्य या शून्य माइनस 4 10 1 2 माइनस 6 1 xy है । का 0 घटा 4 10 0 2 घटा x घटा 6 घटा y 1 xy बराबर 0 है यह r 2 को r 2 घटा r 3 से बदलने पर है। अब इस मैट्रिक्स का निर्धारक क्या है यह वास्तव में इन 2 बटा 2 का निर्धारक है सब मैट्रिक्स या माइनस 4 गुणा माइनस 6 घटा y घटा 10 गुणा 2 घटा x बराबर 0 या 24 जमा 4 y घटा 20 जमा 10 x बराबर 0 या 10 x जोड़ चार y जमा f हमारा शून्य के बराबर है

इसलिए यह दो दिए गए बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है शून्य से दो अल्पविराम चार और दो अल्पविराम शून्य से छह और यह वही परिणाम है जो हमें निर्देशांक ज्यामिति के अपने ज्ञान को लागू करने के बाद मिला है

इसलिए इस तरह से भी हम दो दिए गए बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा के समीकरण की गणना कर सकते हैं आइए हम एक और उदाहरण लेते हैं यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य से 2 अल्पविराम 4 बी 2 अल्पविराम घटा 6 और सी 5 अल्पविराम k 35 इकाई या 35 वर्ग इकाई है तो इसका मान क्या है k इसलिए हम जानते हैं कि हम निर्धारक का उपयोग करके यह विचार प्राप्त कर सकते हैं कि जो दिया गया है वह आधा है 1 1 1 घटा 2 4 2 घटा 6 5 k 35 के बराबर है या 1 घटा 2 4 1 2 घटा 6 1 5 है k 70 के बराबर है या 0 माइनस 4 10 1 2 माइनस 6 का निर्धारक है और एक पाँच k सत्तर के बराबर है जैसा कि मैंने पहले किया है एक आर एक माइनस rho दो के बराबर है या 0 माइनस 4 10 1 दो माइनस छह का निर्धारक है शून्य तीन k जमा छह सत्तर के बराबर है यह r 3 करने पर हमें मिलता है r 3 के बराबर है घटा r 2 अब हम f करने का प्रयास करते हैं ind निर्धारक चूंकि हमारे पास केवल 2 1 गैर-शून्य उपयोग निर्धारक है, इसका शून्य से 1 गुना इसमें और यह इस में या शून्य से 1 गुणा शून्य से 4 गुना के प्लस 6 घटा 3 गुणा 10 के बराबर 70 या माइनस होगा 1 गुणा माइनस 4 k माइनस 24 माइनस 30 70 के बराबर है या 4 k जमा 24 जमा तीस सत्तर के बराबर है या चार k सोलह के बराबर है या k चार के बराबर है इसका उत्तर है ठीक है छात्रों अब मैं आपको इससे परिचित कराता हूँ शब्द माइनस और कॉफ़ैक्टर्स यदि आपको याद है कि हमने मैट्रिक्स ए के निर्धारक को व्यक्त किया है, तो जे के ऊपर सिग्मा 1 के बराबर है 1 से 1 जे गुणा माइनस 1 से पावर 1 प्लस जे गुणा एम 1 जे जहां एम 1 जे का निर्धारक है rho 1 और कॉलम j को हटाने के बाद a के उप मैट्रिक्स को इसी तरह से हम rho y के साथ विस्तार करके a is बराबर sigma over jaij माइनस 1 से घात i प्लस j को mij में rho y के साथ विस्तार करके लिख सकते हैं। एक कॉलम के साथ भी लेकिन जो महत्वपूर्ण है वह यह है कि aij शब्द को घात 1 से गुणा किया जा रहा है जो कि i प्लस j को निर्धारित करता है मैट्रिक्स की चींटी जिसे हम ith पंक्ति और j कॉलम को हटाकर प्राप्त करते हैं, इस मिज को तत्व aij के अनुरूप माइनर कहा जाता है,

इसलिए किसी दिए गए मैट्रिक्स के लिए परिभाषा कहते हैं कि यदि हम तत्व aij पर विचार करते हैं जो कि ith पंक्ति और jth कॉलम में है तो संगत माइनर मिज , n घटा 1 क्रॉस n घटा 1 मैट्रिक्स का निर्धारक है जो a की ith पंक्ति और jth कॉलम को हटाने के बाद प्राप्त होता है, हमने देखा है कि a के सारणिक के लिए व्यंजक के विस्तार में हम aij को माइनस एक से गुणा करते हैं। पावर आई प्लस जे इन मिज इस पूरी चीज को एजे के लिए कॉफ़ैक्टर कहा जाता है उदाहरण पर विचार करें मैट्रिक्स ए एबीसीडी के बराबर है

इसलिए ए का निर्धारक विज्ञापन माइनस बीसी के बराबर है

इसलिए एम 1 1 इसके लिए नाबालिग है ए उप का निर्धारक है पहली पंक्ति को हटाने के बाद मैट्रिक्स और पहला कॉलम डीएम के बराबर है 1 2 पहली पंक्ति को हटाने के बाद उप मैट्रिक्स के निर्धारक के बराबर है और दूसरा कॉलम सी एम दो के बराबर है हटाने के बाद उप मैट्रिक्स के निर्धारक के बराबर है कॉलम 1 और पंक्ति 2, बी और एम 2 2 के बराबर है, इसी तरह हम प्राप्त कर सकते हैं एक के बराबर है लेकिन कॉफ़ैक्टर्स क्या हैं जो कॉफ़ैक्टर्स हैं एक एक बराबर घात के एक के बराबर है एक प्लस एक में एम एक एक बराबर है d a 1 2 बराबर है माइनस 1 से घात 1 जमा 2 गुणा m 1 2 बराबर माइनस ca 2 1 है इसी तरह से मिलेगा माइनस बी और ए 2 2 ए के बराबर है यानी खनिकों और सह-कारकों के बीच सूक्ष्म अंतर मैं आपसे एक सरल प्रश्न पूछना चाहता हूँ कि क्या a 1 1 a 1 2 a 1 3 a 2 1 a 2 दो दो तीन a तीन एक तीन दो तीन तीन के बराबर है निम्नलिखित एक विकल्प का निर्धारक देता है एक दो एक में एम दो एक प्लस एक दो दो में एम दो दो प्लस एक दो तीन गुणा एम दो तीन है कि मैं इसे दूसरी पंक्ति के साथ विस्तारित करने की कोशिश कर रहा हूं लेकिन हम पाते हैं कि संकेत नहीं हैं यहां ध्यान रखा गया है कि हमें ई माइनस वन टू पावर टू प्लस वन होना चाहिए था
इसलिए यहां माइनस होना चाहिए था यहां माइनस होना चाहिए था
इसलिए यह सही विकल्प नहीं है b ए 1 1 गुणा एम 1 1 घटा 1 1 2 गुणा एम 2 1 जमा 1 3 गुणा एम 3 1 जैसा कि हम देख सकते हैं कि इसने संकेत का ध्यान रखा है यहाँ यह सकारात्मक होने जा रहा है क्योंकि 1 जमा 1 यहाँ यह जा रहा है सकारात्मक रहें क्योंकि 1 जमा 3 ये सम संख्या माइनस 1 है और सम संख्या इसे एक बनाती है लेकिन यहाँ यह एक और दो है
इसलिए माइनस साइन है लेकिन यहाँ समस्या एक है दो को कोफ़ेक्टर से गुणा किया जाता है m दो एक जो होना चाहिए था m एक दो
इसलिए यह भी गलत विकल्प है c a 3 1 में 3 1 माइनस a 3 2 इन 3 2 प्लस ए 3 3 इन 3 थ्री यहाँ नाबालिगों के बजाय हम कॉफ़ैक्टर्स का उपयोग कर रहे हैं
इसलिए माइनस साइन है कॉफ़ेक्टर के अंदर पहले से ही ध्यान रखा गया है
इसलिए यह माइनस गलत है
इसलिए यह हमें निर्धारक विकल्प का सही मान भी नहीं देता है d एक 1 3 गुणा 1 3 प्लस 2 3 गुणा दो तीन जमा एक तीन तीन गुणा तीन है तीन अगर हम इसे देखें तो हम समझ सकते हैं कि हम कॉलम संख्या 3 के साथ विस्तार कर रहे हैं और प्रत्येक पद को कोर से उपयुक्त रूप से गुणा किया गया है सहकारकों को टटोलना
इसलिए यह सही उत्तर है
इसलिए उत्तर विकल्प है d अब मैं एक नई अवधारणा का परिचय देता हूं जिसे एक मैट्रिक्स परिभाषा के आस-पास कहा जाता है , एक वर्ग मैट्रिक्स के आस-पास को मैट्रिक्स aij के स्थानान्तरण के रूप में परिभाषित किया जाता है जहां aij का सहकारक है यानी अगर ए बराबर है 1 1 ए 1 2 एक तीन एक दो एक दो दो दो तीन एक तीन एक तीन दो तीन तीन तो ए के आस- पास तीन क्रॉस थ्योरी मैट्रिक्स है जो एक एक है ए एक दो एक तीन क्योंकि हम एक 2 1 ए 2 2 ए 2 3 ए 3 1 ए 3 2 एक तीन तीन उदाहरण के रूप में लिख रहे हैं अगर ए एबीसीडी के बराबर है तो एक एक बराबर डी के बराबर है 1 2 है माइनस सीए 2 1 के बराबर माइनस बी के बराबर है और ए 2 2 ए के बराबर है
इसलिए ए का आसन्न मैट्रिक्स डी माइनस सी माइनस बीए है जो कि विकर्ण तत्वों को आपस में जोड़ा जाता है और ऑफ विकर्ण तत्वों के संकेत इस प्रकार 2 के लिए बदल जाते हैं। क्रॉस 2 मैट्रिक्स हमें अब बहुत आसानी से मिल जाता है, ए के समय के उत्पाद का क्या होता है तो आइए हम इसे करते हैं हमारे पास ए के बराबर है बीसीडी और ए के आस-पास डी माइनस सी माइनस बीए के बराबर है और अगर मैं इसे गुणा करता हूं तो हमें दो क्रॉस टू मैट्रिक्स मिलते हैं जो कि एड माइनस बीसी माइनस एबी प्लस एबी प्लस सीडी माइनस सीडी और माइनस सीबी प्लस एड एक 0 के निर्धारक के बराबर है। 0 का निर्धारक यह है कि यह एक विकर्ण मैट्रिक्स है जिसमें विकर्ण प्रविष्टियों के बराबर है,
इसलिए हमारे 2 क्रॉस 2 मैट्रिक्स के लिए हम देखते हैं कि ए के आस- पास ए के निर्धारक के बराबर है जो कि आकार दो की पहचान मैट्रिक्स है सामान्य रूप से दो को पार करें यदि a n क्रॉस n है, तो हम पाते हैं कि a in a in a के निर्धारक के बराबर है a in a in a का एक पहचान मैट्रिक्स में आकार n क्रॉस n मुझे 3 क्रॉस 3 मैट्रिक्स के लिए परिणाम सत्यापित करने दें,
इसलिए p को होने दें a का गुणनफल a के a के जोड़ में p है a 1 1 a 1 2 a 1 3 a 2 1 a 2 2 a 2 3 a 3 1 a 3 2 a 3 3 गुणा 1 1 a 1 2 a 1 के बराबर 3 ए 2 1 ए 2 2 ए 2 3 ए 3 1 ए 3 2 ए 3 3 पी का मान क्या है जैसा कि मैंने कहा था कि यह ए से आई तीन का निर्धारक होने जा रहा है हम सत्यापित करना चाहते हैं कि पी निर्धारक के बराबर है एक से एक में शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य हम पी एक को देखते हैं यदि हम इसे देखते हैं तो यह एक एक में एक है एक एक दो में एक दो और एक तीन में एक तीन पी 1 1 एक के बराबर है 1 1 गुणा 1 1 जमा 1 2 1 1 2 जमा 1 3 1 1 3 जो हम जानते हैं कि जब हम पहली पंक्ति के साथ विस्तार करते हैं तो निर्धारक की अभिव्यक्ति होती है
इसलिए यह एक का निर्धारक होने जा रहा है इसी तरह पी दो दो और पी तीन तीन को एक के निर्धारक के रूप में दिखाया जा सकता है हमें यह दिखाने की जरूरत है कि विकर्ण तत्व शून्य हैं मैं पी एक दो के साथ सत्यापित करता हूं तो पी एक दो पी एक दो एक के बराबर है 1 गुणा 2 1 जमा 1 2 गुणा 2 2 जमा 1 3 गुणा 2 3 बराबर है 1 1 गुणा घटा 1 से घात 2 जमा 1 1 2 1 3 3 से 3 3 क्योंकि यह हमें मिलता है 2 1 जमा 1 2 के जोड़ से घटा 1 से घात 2 जमा 2 तक क्योंकि हम जोड़ जोड़ की गणना 2 2 से कर रहे हैं और
इसलिए 1 1 1 3 3 1 और 3 3 प्लस का निर्धारक a 1 3 घटा 1 से घात 2 जमा 3 beca उपयोग हम इसे 2 3 के लिए कर रहे हैं और
इसलिए यह 1 1 1 1 2 ए 3 1 ए 3 2 होने जा रहा है अब हम इसका विस्तार करते हैं यह माइनस ए 1 1 1 1 2 ए 3 3 प्लस हो रहा है ए 1 1 ए 1 3 ए 3 2 प्लस ए 1 2 ए 1 1 ए 3 3 माइनस ए 1 2 ए 1 3 ए 3 1 माइनस ए 1 3 ए 1 1 ए 3 2 प्लस ए 1 3 ए 3 1 ए 1 2 अब आइए हम उन शब्दों को देखें जो हम पाते हैं कि घटा एक 1 1 ए 1 से 1 ए 3 3 और यह प्लस 1 2 ए 1 1 3 3 है
इसलिए वे एक दूसरे को रद्द करते हैं यह एक 1 1 ए 1 3 ए 3 2 है और यह माइनस ए 1 3 ए वन वन ए थ्री टू है
इसलिए वे एक दूसरे को भी रद्द करते हैं यह माइनस ए वन टू वन थ्री वन बराबर है प्लस ए वन टू वन थ्री ए थ्री वन
इसलिए यह भी इसके साथ रद्द हो जाता है
इसलिए यह पूरी बात शून्य के बराबर है
इसलिए मैंने पी एक दो के लिए सत्यापित किया है, मेरा सुझाव है कि आप अन्य विकर्ण तत्वों पर काम करके और उनके मूल्यों की गणना करके खुद को मना लें, जो हम देखेंगे कि शून्य हो जाएगा
इसलिए ए में ए ए का जोड़ ए के सारणिक के बराबर है मैं तीन ठीक है छात्रों मैं आज यहां रुकता हूं y अगली कक्षा में मैं एक मैट्रिक्स के व्युत्क्रम के बारे में बात करूंगा और फिर मैं इसके कुछ गुणों को दिखाऊंगा और सिस्टम रैखिक समीकरणों को हल करने में हम इसका उपयोग कैसे कर सकते हैं ठीक है छात्र धन्यवाद