طالب علموں کو پہلے لیکچر میں تعین کنندگان کے دوسرے لیکچر میں خوش آمدید کہ ہم نے وضاحت کی ہے کہ مربع میٹرکس کا تعین کن کیا ہے
اور ہم نے اس لیکچر میں کچھ خاصی
توں کی چھان بین کی ہے، ہم تعین کنندہ کی مزید خصوصیات کی جانچ کرنا جاری رکھیں گے اور حل کرنے کی کوشش کریں گے۔ چند مسائل اگر
آپ کو پراپرٹی چار میں یاد ہو
برابر ہے ایک ایک ایک دو ایک تین تین دو ایک دو دو دو تین اور تین ایک تین 2 اے 3 3 a تو ہم نے دیکھا ہے کہ اگر
determinant a کا b پھر ka 1 1 ka 1 2 ka 1 3 a 2 1 a 2 2 a 2 3 a 3 1 a 3 2 a 3 3 ہے b تو اگر
کے ساتھ ضرب کیا k کے تمام عناصر کو a اوقات کے تعین کنندہ کے برابر ہے جسے ہم نے آخری کلاس سوال میں دیکھا ہے۔ اگر k کے
جائے
ka 1 1 ka 1 2 ka 1 3 ka 2 1 ka کا تعین کنندہ کیا ہے جو b تو یہ تعین کنندہ پر کیسے اثر انداز ہوتا ہے یا دوسرے لفظوں میں
ہے 3 کا 3 1 کا تین دو کا تین تین کیا ہونے والا ہے۔ اس میٹرکس کا ٹرمیننٹ اگر ہم اسے بالکل اسی طرح پھیلاتے ہیں 2 2 ka 2
ka 1 مائنس ka 1 1 in ka 2 2 in ka 3 3 minus ka 2 3 in ka 3 2 ہے determinant تو ہم استعمال کرتے ہیں
مائنس کا 3 1 ان کا کا 2 3 جمع کا 1 3 کا 2 1 میں کا 3 2 مائنس کا 2 2 میں کا اے 3 1 یہ کیا ہے اگر 2 in ka 2 1 in ka 3 3
ہم ہر اصطلاح کو دیکھیں
کیوب کو عام میں لے سکتے ہیں اور پھر مجھے جو k تو تین صورتیں ہیں ایک دو تین یہاں ایک دو تین یہاں ایک دو تین یا دوسرے لفظوں میں ہم
کا b کے اظہار کے مترادف ہے لہذا determinant کے a ملتا ہے میں اسے دوبارہ نہیں لکھ رہا ہوں آپ دیکھتے ہیں کہ یہ
کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے اگر k کے تمام عناصر کو عام طور پر a اگر a کیوب اوقات کے تعین کنندہ کے k برابر ہے determinant
سے ضرب کیا جائے k میٹرکس ہے اور اگر تمام عناصر کو مستقل n ایک کراس a
اگر میٹرکس کی دو قطاریں یا کالم ایک جیسے ہیں a کا تعین کنندہ میں n ہو جائے گا قوت k کا تعین کنندہ b تو نئے میٹرکس
کے برابر ہے لہذا abcabcxyz a صفر ہے ٹھیک ہے پہلے میں اس بات کی تصدیق کرتا ہوں کہ inant میٹرکس کا determ تو پھر
میٹرکس ایسا ہے کہ دو قطاریں ایک جیسی ہیں یہ ظاہر کرے گا کہ اس کا تعین صفر ہے آئیے ہم اسے پہلی قطار کے ساتھ پھیلاتے ہیں لہذا یہ ایک
acy مائنس abz یہ ہم جانتے ہیں کہ یہ bx مائنس ay میں c پلس cx مائنس az میں b مائنس cy مائنس bz ہو جائے گا۔ ان میں
مائنس ایپسیلون کو دیکھیں وہ ایک دوسرے کو abz کے برابر ہے اب آئیے ہم شرائط پلس bcx مائنس acy پلس dcx پلس abz مائنس
وہ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں bcx پلس bcx وہ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں اور مائنس acy مائنس acy منسوخ کرتے ہیں پلس
لہذا نتیجہ صفر ہے کیونکہ ہمیں اس کی گنتی کرنے سے پہلے نتیجہ معلوم نہیں تھا لیکن ایک بار جب آپ ماہر ہیں اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک
کی دو قطاریں میٹرکس ایک جیسے ہیں یا میٹرکس کے دو کالم ایک جیسے ہیں
کی چیونٹی ایک ٹرانسپوز a تو اس میٹرکس کا تعین کنندہ صفر ہوگا میں نے اسے قطار کو پھیلاتے ہوئے دکھایا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ تعین
کے تعین کنندہ کے مترادف ہے لہذا اگر ہم میٹرکس کے دو کالموں کا ٹرانسپوز لیں
ہے میٹرکس a تو پہلا اور دوسرا کالم ایک جیسے ہوں گے اور اس صورت میں بھی اس کا تعین کنندہ صفر خاصیت والا ہوگا چھ فرض کریں کہ
determinant کے a کا تعین کرنے والا b حاصل کرتے ہیں پھر b دیا جاتا ہے اور ہم دو قطاروں یا دو کالموں کو بدل کر ایک نیا میٹرکس
اس کا تعین کرنے والا سمجھتا k اور abcdefgh کے مائنس کے برابر ہوتا ہے جو کہ قیمت ایک ہی رہے گی لیکن نشان بدل جائے گا میں اسے
مائنس مثال کے طور پر اس پر واپس آئیں گے لیکن dh میں c پلس fg مائنس dk میں b مائنس fh مائنس a in ek ہوں۔ برابر ہے
بنائیں آئیے پہلی اور تیسری قطار لیں b آئیے دو قطاروں کو آپس میں بدل کر
تو تیسری قطار اب پہلی بن جائے گی۔ قطار دوسری قطار جوں کی
bf مائنس ec کے برابر ہے g کا تعین کنندہ b کی پہلی قطار ملتی ہے لہٰذا a کی تیسری قطار کے طور پر b توں رہتی ہے اور یہاں ہمیں
آئیے اب ہم ایک کے تعین کنندہ کے اظہار کے ساتھ موازنہ کریں جو ہم نے ابھی حاصل ae مائنس b پلس میں af مائنس dc میں h مائنس
کیا ہے اور اب ہم غور کریں کہ سائنس جی ای سی کا ایک مثبت نشان تھا یہاں مجھے منفی نشان کے ساتھ جی سی ملتا ہے جی بی ایف منفی نشان
منفی hdc ایک مثبت نشان کے ساتھ آتا ہے کیونکہ مائنس اور مائنس پلس ہو جاتا ہے gbf اور gb کے ساتھ آتا ہے یہاں مجھے ملتا ہے۔
منفی علامت کے ساتھ آتا ہے اور aahf مثبت علامت کے ساتھ آتا ہے اور a hf مثبت علامت کے ساتھ آتا ہے hdc علامت کے ساتھ آتا ہے
یہاں منفی علامت کے ساتھ آتا ہے اور kae اور kae یہاں مثبت نشان کے ساتھ آتا ہے لیکن یہاں یہ ایک منفی علامت ہے اور kdb پھر
یہاں مثبت علامت کے ساتھ آتا ہے اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ تمام اصطلاحات برقرار ہیں لیکن تمام اصطلاحات کی علامت کو الٹ دیا گیا ہے kae
یعنی اگر یہ مثبت خوف تھا۔ یہ یہاں منفی ہے اور اگر یہ یہاں منفی ہے
کا تعین کنندہ ثابت شدہ جائیداد کے سات کا تعین کرنے والے کے مائنس b تو یہ یہاں مثبت ہو جاتا ہے یا دوسرے لفظوں میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ
دو میٹرکس cos کے متعین کرنے والے کو براہ راست ایک دو bi کے تعین کرنے والے کے برابر ہے a کی چیونٹی ab کے برابر ہے۔
کے سائز دو کراس دو کے لیے دکھاتا ہوں اور میں تجویز کرتا ہوں کہ آپ تین کراس تھری b اور a کے لیے دکھاتا ہوں میں اسے براہ راست
کے bc مائنس ad کا تعین کنندہ a کے برابر ہے لہذا mnpq b کے برابر ہے اور abcd a میٹرکس کے لیے اسی طرح تصدیق کریں
dpcn جمع bqcm جمع bpan پلس am پروڈکٹ میٹرکس ab کے برابر ہے اب np مائنس mq کا تعین کرنے والا b برابر ہے اور
کے am میں bq پلس dp پلس cm کیوب مائنس d پلس cn میں bp پلس m کے برابر ہے لہذا اس کا ڈیٹرمیننٹ برابر ہے dq جمع
ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو bdpq مائنس bcmq مائنس andp مائنس ancm مائنس bpdq پلس amdq پلس bpcn پلس cn برابر ہے
مائنس سے ضرب mq کو bc مائنس ad کا تعین کرنے والا b کا تعین کرنے والا a اصطلاحات اور کر سکتے ہیں آئیے اب غور کریں کہ
کے تعین کنندہ ab اب ہم ان اصطلاحات کا موازنہ کریں جو ہم نے bc پلس adnp میں p مائنس کے برابر ہے bcmq مائنس admq np
پلس adnp مائنس adnp مائنس bcmq مائنس bcmq مائنس admqadmq ہے ہمارے پاس admq کے طور پر حاصل کی ہیں ہمارے پاس
کر سکتے ہیں۔ ایک دوسرے کو اس لیے ہمیں minus an cel اور amcn ہے اور ہم دیکھ سکتے ہیں کہ باقی شرائط bcnp پلس bcnp
خاصیت آٹھ کے تعین کنندگان کی پیداوار کے برابر ہے اگر ہماری قطار کے تمام اندراجات کو دو مقداروں b اور a کا تعین کنندہ ملتا ہے جو ab
کے مجموعہ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے
m c جمع kb جمع a برابر ہے a کا تعین کنندہ لکھا جا سکتا ہے۔ دو تعین کنندگان کے مجموعے کے طور پر میں سمجھاتا ہوں کہ a تو
ہم دیکھتے ہیں کہ پہلی قطار کے عناصر کو دو مقداروں کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے جن میں سے ہر ایک کا plus ndefxyz
t کے تعین کرنے والے کے برابر ہے جب ہم اسے kmndefxyz کے علاوہ determinant کے abcdefxyz a ہم دعویٰ کرتے ہیں
کے ساتھ پھیلاتے ہیں
کا تعین m پلس b مائنس efyz کے برابر ہے اور k جمع a کا تعین کنندہ a کی پہلی قطار ہے کیونکہ a تو یہ دیکھنا بہت آسان ہے وہ
a کے تعین کرنے والے میں b مائنس efyz ڈیکسی کا تعین کرنے والا برابر ہے ہم n جمع c کا تعین کرنے والا پلس dfxz کرنے والا
لکھ سکتے ہیں ڈی ایف ایکس زیڈ کا پلس سی ڈیکسی کے ڈیٹرمیننٹ میں پلس کے ایفائز کے ڈیٹرمیننٹ میں مائنس ایم ڈی ایف ایکسز کا ڈیٹرمیننٹ

kmndusth کا ڈیٹرمیننٹ ہے پلس یہ abcdefxyz مائنس این ڈیکسی کے ڈیٹرمیننٹ میں اور ہم آسانی سے کہہ سکتے ہیں کہ پہلا اصل میں
کے مجموعے کے طور پر لکھا جا سکتا ہے determinants کو دو determinant کے a کا تعین کنندہ ہے ۔ میٹرکس thedefxyz
اب مجھے کچھ مسائل کرنے دیں ایک کا تعین کرنے والا مربع ایک ڈی بی مربع اور ایک سی سی مربع ہم اسے پہلی قطار کے ساتھ پھیلاتے ہیں لہذا
مربع جمع ایک مربع میں b مربع مائنس c مربع b مربع مائنس c میں a مربع مائنس cb مربع مائنس bc کا تعین کنندہ 1 کے برابر ہے۔ a
کو کامن لیتا ہوں bc کے برابر ہے اگر میں پہلی اصطلاح سے b مائنس c
c کے برابر ہے اگر میں b مائنس c کے علاوہ ایک مربع کو b پلس c میں b مائنس c میں a مائنس b مائنس c میں bc تو یہ
مائنس بٹ کو عام کے طور پر لیتا ہوں بی سی مائنس اے سی پلس اے بی مائنس اے بی پلس ایک مربع برابر ہے سی مائنس بی میں مجھے اس سے
سی کامن لینے دیں
میں b تو سی میں ب مائنس اے مائنس اے میں بی مائنس اے برابر ہے سی مائنس بی میں بی مائنس اے میں سی مائنس اے جس کو ہم اسے مائنس
کے طور پر لکھ سکتے ہیں لہذا یہ اس میٹرکس کا تعین کرنے والا ہے آئیے ایک اور خاصیت کو تلاش کریں اگر a مائنس c میں c مائنس b
کے مجموعہ سے بدل دیا جائے ith row کو ith row اور jth row میٹرکس میں
پہلی قطار اور دوسری قطار let b abcmnpxyz برابر ہے a مثال کو تبدیل نہیں کرتا ہے غور کریں کہ determinant تو پھر
ایک جمع b کے مجموعہ سے بدل رہا ہوں جس کا مطلب ہے کہ اب rho 2 اور rho 1 کو rho 1 کے مجموعے کے برابر ہے یعنی میں
کا b ہے پھر دعویٰ یہ ہے کہ xyz اور t mnp اور دیگر قطاریں ایک جیسی رہتی ہیں۔ p پلس nc پلس mb کے برابر ہے
کے برابر ہے کیونکہ خاصیت کی وجہ سے کہ اگر قطار کے عناصر کو دو اظہار کے determinant کیوں کے determinant a
مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے
کو دراصل determinant کے b کے مجموعے کے طور پر لکھ سکتا ہوں۔ اس لیے determinants کو دو determinant تو میں
اس میٹرکس mnpmnpxyz determinant کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور اس دوسرے اجزاء کا determinant کے abcmnpxyz
aa کا تعین کرنے والے کے برابر ہے b کے ایک جمع کے تعین کنندہ کے برابر ہے جو کہ 0 کے برابر ہے کیونکہ دو قطاریں ایک جیسی ہیں
سے بدل دیا جائے jth row پلس کچھ مستقل اوقات ith row کو ith row تھوڑا سا زیادہ عام کرنا اگر
کے برابر kpmnpxyz پلس knc پلس kmb ایک جمع b کے برابر ہے یا اگر determinant کے a بھی determinant کا b تو
ہے
کا درست تعین کرنے والا ہے kpmnpxyz جمع knc جمع mkmb کے تعین کنندہ کے برابر یہ ایک جمع a کا تعین کنندہ ہے b تو
جمع کے تعین کرنے کے برابر ہے ہم جانتے ہیں kmknkpmnpxyz determinant of کا determinant plus کا abcmnpxyz
کہ اگر تمام عناصر کو ایک ہی مستقل سے ضرب دیا جائے
b کے طور پر لکھ سکتے ہیں اور یہ 0 بن جاتا ہے لہذا اس کا تعین کنندہ mnpmnpxyz اوقات k تو ہم مستقل کو نکال سکتے ہیں لہذا ہم اسے
a جمع c میں cab ایک c جمع b کا تعین کرنے والا bca ایک کے تعین کنندہ کے برابر ہے آئیے اب ہم کچھ مزید مسائل کرتے ہیں کہ ایک
اب میں نے دکھایا ہے کہ ab پلس abca کے تعین کنندہ کے برابر ہے 1 ba جمع cabc 1 ac جمع ab bc 1 b میں جمع a abc
اگر ایک قطار کو اس قطار اور دوسری قطار کے مجموعہ سے بدل دیا جائے
تو یہ تعین کنندہ کو تبدیل نہیں کرتا کیونکہ ہم جو کچھ قطاروں کے بارے میں کہہ سکتے ہیں اسی طرح ہم کالموں کے بارے میں بھی کہہ سکتے
ہیں۔ اگر ایک خاص کالم کو اس کالم اور دوسرے کالم کے مجموعے سے بدل دیا جاتا ہے
ac پلس ab پلس bc اب میں کالم 2 کو کالم 3 bc تو یہ تعین کنندہ کو تبدیل نہیں کرتا ہے لہذا میں لکھ سکتا ہوں کہ استعمال کا تعین 1 ہے
تھری کالم معذرت کالم تھری ہو جاتا ہے کالم ٹو پلس کالم تھری c ٹو پلس c ٹو ہے اب c میں شامل کر رہا ہوں آپریشن
ہے اب اے بی پلس سی اے یہ سی بی سی بی ہے اب آئیے ان عناصر کو دیکھتے ہیں یہ ab it ایک ba پلس bc پلس ca یہ ca تو ایک
اے بی پلس اے سی پلس بی سی ہے یہ اے بی پلس اے سی پلس بی سی ہے اور یہ بھی اے بی پلس اے سی پلس بی سی ہے لہذا تیسرے کالم کے
ہے اگر ہم اس عنصر کو ca جمع bc جمع ab تمام عناصر کو اس سے ضرب کیا جارہا ہے۔ ایک ہی مستقل لہٰذا استعمال کرنے والا عامل
پھر 1 1 1۔ اور اس میٹرکس کا تعین کنندہ کیا ہے کیونکہ اس کے دو ایک جیسے کالم ہیں کیونکہ ab ca bc نکالیں جو باقی رہ جاتا ہے 1 1 1
جمع y جمع x اس کا تعین صفر ہے اس کے دو ایک جیسے کالم ہیں لہذا اصل میٹرکس صفر کا تعین کنندہ اب ایک اور مسئلہ کو حل کرتے ہیں کہ
ہمیں y 2 plus x plus z ہے zx ہے اور تیسری قطار xy جمع دو z جمع y کا تعین کنندہ کیا ہے دوسرا عنصر yz کوما zx 2
c ایک c اس میٹرکس کے تعین کنندہ کی گنتی کرنے کی ضرورت ہے ہم پہلے قدم کو کیا کریں گے ہم پہلے کالم ٹو کو کالم ون میں جوڑتے ہیں
پلس zy پلس ٹو y ٹو ایکس پلس zxy بن جاتا ہے۔ پلس ٹو y جمع x دو x ٹو بن جاتا ہے پھر جو میٹرکس ہمیں مل رہا ہے وہ c ایک جمع
اب ہم کالم 1 کو کالم 1 جمع کالم 2 کالم 3 کے مجموعے سے بدلتے ہیں۔ پھر ہمیں y پلس ٹو x پلس z اور zx پلس yx میں x پلس ٹو z
z جمع دو x اور دو y میں x جمع دو z جمع zy جمع دو y جمع دو x یہ دو zxy جمع دو y جمع دو x جو مل رہا ہے وہ ہے دو
اب ہم دیکھ سکتے ہیں کہ پہلے کالم میں تمام عناصر ایک جیسے ہیں لہذا میں اسے نکال سکتا ہوں اس کے برابر ہے y دو x جمع yxz جمع دو
کے تعین میں یہ ابھی بھی کچھ پیچیدہ ہے اس y جمع دو x جمع xxyz جمع دو z جمع xyy ایک ایک ایک z جمع دو y جمع دو x دو
نے دکھایا کہ اگر ایک قطار e لئے اب ہم جو کریں گے اسے بدل دیں گے۔ دوسری قطار مائنس کے ساتھ ایک بار پہلی قطار ابھی ہمارے پاس ہے۔
کو مستقل اوقات کے ساتھ دوسری قطار اور اس مخصوص قطار سے تبدیل کیا جائے
سے بدل رہا ہوں rho 1 تو یہ تعین کنندہ کو تبدیل نہیں کرتا ہے لہذا میں جو کر رہا ہوں میں قطار 2 کو قطار 2 جمع مائنس 1 بار
y جمع x کے برابر ہے یقیناً 2 کو y 2 x x جمع xz 1 0 x جمع z جمع y 0 xy تو پھر ہمیں کیا مل رہا ہے۔ اس کا تعین کنندہ 1
سے بدل دیں جو ہم حاصل کر رہے ہیں ڈیٹرمیننٹ 2 کے برابر r1 مائنس r3 کو r3 میں ضرب دیں کیونکہ یہ وہاں سے آرہا ہے اب z جمع
سے گھٹا رہا ہوں اگر آپ x y plus z کو قطار 3 0 0 rho 1 اب میں 0 z جمع y جمع x 0 xy میں 1 z جمع y جمع x ہے
دیکھیں
اور z جمع y جمع x تو یہ ایک تکونی میٹرکس ہے اور ہم جان لیں کہ مثلث میٹرکس کا تعین کنندہ عناصر کی پیداوار ہے اب یہ اخترن عناصر
لہذا مجموعی طور پر z جمع x جمع y جمع y ہے پورا مربع ضرب z جمع y جمع x ہیں لہذا ان کی مصنوع z جمع y جمع x
مکمل مکعب ہوگا لہذا یہ جوابی نوٹس ہے کہ ہم نے اسے واضح طور پر نہیں پھیلایا کیونکہ x plus y plus z میں 2 s i فیصلہ کن
اصطلاحات کافی لمبے ہیں بہت لمبے ایکسپریشنز موجود ہیں لہذا اگر ہم تین اصطلاحات کے اس مجموعہ کو مزید تین اصطلاحات کے ساتھ ضرب
کریں
تو یہ نو اصطلاحات ہونے والی ہیں یہ کمپیوٹیشنل طور پر پھٹ جائے گی لیکن ہم نے کیا کیا ہم نے بہت ساری خصوصیات کا استعمال کیا ہے جو ہم
نے پچھلی کلاس میں دکھائے ہیں اور اس کلاس نے بہت مؤثر طریقے سے تعین کنندہ کو بہت آسان طریقے سے شمار کرنے کے لئے اب میں ایک
عددی مثال لیتا ہوں۔ دو سات ساٹھ پانچ تین آٹھ ستر پانچ اور پانچ نو چھیاسی کا تعین کیا ہے بظاہر بہت پیچیدہ ہے لیکن ایسا نہیں ہے میں ان دو
کالموں کو دیکھوں گا اور دیکھوں گا کہ میں تیسرا کالم کیسے بنا سکتا ہوں یہ 65 ہے یہاں ہمارے پاس 7 ہیں اور یہاں یہ 2 ہے ہم جانتے ہیں کہ 7

میں 9 63 جمع 2 ہے 65 کے برابر اسی طرح 8 میں 9 جمع 3 برابر 72 جمع 3 برابر 75 اور 9 میں 9 جمع 5 برابر ہے 86
تو ہم اسے لکھ سکتے ہیں۔ 2 7 9 میں 7 جمع 2 3 8 9 میں 8 جمع 3 پانچ نو نو میں نو جمع پانچ چونکہ کالم کو دو عناصر کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے میں اسے لکھ سکتا ہوں کیونکہ دو عاملوں کا مجموعہ دو کے تعین کنندہ کے برابر ہے۔ سات نو میں سات تین آٹھ نو میں آٹھ میں 9 جمع 2 7 2 3 8 3 پانچ نو پانچ اس کے دو کالم ایک جیسے ہیں لہذا یہ ہمیں صفر دے گا اور اس کا کالم 3 کالم 2 کا 9 گنا ہے 9 9 5 اور اس لیے ڈیٹرمیننٹ کا استعمال کریں اگر میں 9 نکالتا ہوں
تو یہ 2 7 7 3 8 8 5 9 9 کا تعین کنندہ ہے اور اس لیے ہم دیکھیں گے کہ اس میں ایک ہی دو کالم ہیں اس لیے خطرے کا تعین کرنے والا بھی صفر ہے اس لیے جواب ہے ٹھیک ہے طالب علم میں روکتا ہوں آج یہاں اس کلاس میں ہم نے تعین کنندگان کی متعدد خصوصیات کا جائزہ لیا ہے اور ہم نے ان خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے کئی مسائل کو بھی حل کیا ہے جس کی وجہ سے تعین کنندہ کی گنتی کو اگلی کلاس میں آسان بنایا گیا ہے، مجھے کچھ اور مسائل نظر آئیں گے اور میں آگے بڑھوں گا۔ تعین کرنے والوں کا تصور خاص طور پر گرامر کا اصول اور مساوات کا حل وغیرہ آپ کا شکریہ آپ کا

Prutor@IITK