निर्धारकांवरील दुसऱ्या व्याख्यानात विद्यार्थ्यांचे स्वागत आहे पहिल्या लेक्चरमध्ये आम्ही स्क्वेअर मॅट्रिक्ससाठी निर्धारक म्हणजे काय ते परिभाषित केले आहे आणि आम्ही या व्याख्यानात काही गुणधर्म तपासले आहेत आम्ही निर्धारकाच्या आणखी गुणधर्मांचे परीक्षण करणे सुरू ठेवू आणि सोडवण्याचा प्रयत्न करू.

काही समस्या जर तुम्हाला गुणधर्म चार मध्ये आठवत असतील तर आम्ही पाहिले आहे की जर a एक एक एक एक दोन एक तीन तीन दोन एक दोन दोन दोन तीन आणि तीन एक तीन 2 ए 3 3 असेल तर b असेल तर
ka 1 1 ka 1 2 ka 1 3 a 2 1 a 2 2 a 2 3 a 3 1 a 3 2 a 3 3 तर b चा निर्धारक a च्या k गुणिले निर्धारक हे आपण
शेवटच्या वर्ग प्रश्नात पाहिले आहे.

a चे सर्व घटक k ने गुणले तर त्याचा निर्धारकावर कसा परिणाम होतो किंवा दुसऱ्या शब्दांत
b चा निर्धारक काय आहे जो ka 1 1 ka 1 2 ka 1 3 ka 2 1 ka 2 2 ka 2 आहे 3 का 3 1 का तीन दोन का तीन तीन काय होणार आहे या मॅट्रिक्सचा टर्मिनंट जर आपण त्याच प्रकारे विस्तारित केला तर आपल्याला ka 1 1 मध्ये ka 2 2 मध्ये ka 3 3 वजा ka 2 3 मध्ये ka 3 2 वजा ka 1 2 मध्ये ka 2 1 मध्ये ka 3 3 वापरता येईल.

वजा ka 3 1 मध्ये ka 2 3 अधिक ka 1 3 मध्ये ka 2 1 मध्ये ka 3 2 वजा ka 2 2 मध्ये kaa 3 1 हे काय आहे जर आपण प्रत्येक पदावर तीन केस आहेत एक दोन तीन येथे एक दोन तीन येथे एक दोन तीन किंवा दुसऱ्या शब्दात आपण k क्यूब ला कॉमन समजू शकतो आणि मग मला जे मिळाले ते मी पुन्हा लिहित नाही, तुम्ही पहात आहात की हे a च्या निर्धारकाच्या अभिव्यक्तीसारखे आहे म्हणून b चा निर्धारक k घन गुणांच्या निर्धारकाच्या समान आहे.

a जर a चे सर्व घटक सामान्यतः k ने गुणाकार केले तर a हा क्रॉस n मॅट्रिक्स असेल आणि जर सर्व घटक स्थिर k ने गुणले असतील तर नवीन मॅट्रिक्स b चा निर्धारक k च्या घात n च्या निर्धारकामध्ये k असेल.

a जर मॅट्रिक्सच्या दोन पंक्ती किंवा स्तंभ एकसारखे असतील तर निर्धार मॅट्रिक्सचा inant शून्य आहे ठीक आहे , मी प्रथम हे सत्यापित करतो की a abcabcxyz च्या बरोबरीचे आहे,

त्यामुळे मॅट्रिक्स असे आहे की दोन ओळी एकसारख्या आहेत हे दर्शवेल की त्याचा निर्धारक शून्य आहे, चला पहिल्या रांगेत विस्तारित करू या इन bz वजा cy वजा b मध्ये az वजा cx अधिक c मध्ये ay वजा bx हे आम्हाला माहित आहे की हे abz वजा acy वजा abz अधिक dcx अधिक acy वजा bcx बरोबर आहे आता आपण अधिक abz वजा एप्सिलॉन या अटी पाहू ते एकमेकांना रद्द करतात अधिक acy वजा acy ते एकमेकांना रद्द करतात आणि वजा bcx अधिक bcx ते एकमेकांना रद्द करतात म्हणून निकाल शून्य आहे कारण आम्हाला निकालाची गणना करण्यापूर्वी आम्हाला माहित नव्हते परंतु एकदा तुम्ही तज्ञ आहात आणि तुम्ही पाहू शकता की a च्या दोन ओळी मॅट्रिक्स एकसारखे आहेत किंवा मॅट्रिक्सचे दोन स्तंभ एकसारखे आहेत तर त्या मॅट्रिक्सचा निर्धारक शून्य होणार आहे , मी पंक्तीचा विस्तार करून दाखवला आहे
परंतु आम्हाला ते निर्धारक माहित आहे a ची ant ही ट्रान्सपोजच्या निर्धारक सारखीच असते म्हणून जर आपण मॅट्रिक्सचे दोन कॉलम्सचे ट्रान्सपोज घेतले तर पहिला आणि दुसरा कॉलम समान असेल आणि त्या बाबतीत त्याचा निर्धारक देखील शून्य गुणधर्म असेल सहा समजा a a आहे.

मॅट्रिक्स दिले आणि दोन पंक्ती किंवा दोन स्तंभांची अदलाबदल करून एक नवीन मॅट्रिक्स b मिळवतो मग b चा निर्धारक a च्या निर्धारकाच्या वजा बरोबर असतो म्हणजे मूल्य समान राहील परंतु चिन्ह बदलेल मी त्याला abcdefgh आणि k त्याचे निर्धारक समजावून सांगू.

बरोबर आहे a इंटू ek वजा fh वजा b मध्ये dk वजा fg अधिक c मध्ये dh वजा उदा.

याकडे परत येऊ पण दोन ओळींची अदलाबदल करून b बनवू या आपण पहिली आणि तिसरी रांग घेऊ म्हणजे तिसरी रांग आता पहिली होईल पंक्ती दुसरी पंक्ती जशी आहे तशीच राहते आणि येथे आपल्याला b ची तिसरी पंक्ती म्हणून a ची पहिली पंक्ती मिळते म्हणून b चा निर्धारक g मध्ये ec वजा bf वजा h मध्ये dc वजा af अधिक k मध्ये आहे b उणे ae आता आपण नुकत्याच मिळवलेल्या निर्धारकाच्या अभिव्यक्तीशी तुलना करूया आणि आता विज्ञान gec चे सकारात्मक चिन्ह आहे याचा विचार करू या येथे मला नकारात्मक चिन्हासह gc मिळते gbf नकारात्मक चिन्हासह येते येथे मला मिळते gb आणि gbf सकारात्मक चिन्हासह येतात कारण वजा आणि वजा होतो प्लस hdc नकारात्मक चिन्हासह येतो hdc सकारात्मक चिन्हासह येतो
a hf सकारात्मक चिन्हासह येतो आणि aahf नकारात्मक चिन्हासह येतो आणि नंतर kdb येथे सकारात्मक चिन्हासह येतो परंतु येथे हे नकारात्मक चिन्ह आहे आणि kae
आणि kae येथे नकारात्मक चिन्हासह येतात आणि kae येथे सकारात्मक चिन्हासह येतात अशा प्रकारे आपण पाहतो की सर्व संज्ञा कायम ठेवल्या गेल्या आहेत परंतु
सर्व संज्ञांचे चिन्ह उलट केले गेले आहे जर ते सकारात्मक भीती असेल तर येथे ते ऋण आहे आणि जर ते येथे नकारात्मक असेल तर ते येथे सकारात्मक होते किंवा दुसऱ्या शब्दात आपण असे म्हणू शकतो की b चा निर्धारक
सिद्ध केलेल्या मालमत्तेच्या निर्धारकाच्या निर्धारकाच्या वजा सात निर्धारक आहे.

ab ची मुंगी a च्या निर्धारक बरोबर
bi च्या निर्धारकाच्या बरोबर आहे ते थेट दोन कॉस दोन मॅट्रिक्ससाठी दाखवा मी ते थेट a आणि b आकाराच्या दोन क्रॉस दोन साठी दाखवतो आणि मी सुचवितो की तुम्ही
तीन क्रॉस तीन मॅट्रिक्ससाठी त्याच प्रकारे सत्यापित करा a abcd च्या
समान आहे आणि b mnpq च्या बरोबर आहे म्हणून a चा निर्धारक ad वजा bc च्या बरोबरीचा आहे आणि b चा निर्धारक mq

वजा np च्या बरोबर आहे आता ab उत्पादन मॅट्रिक्स am अधिक bpan अधिक bqcm अधिक dpcn अधिक dq आहे म्हणून त्याचे निर्धारक समान आहे m अधिक bp मध्ये cn अधिक d घन cm अधिक dp मध्ये an अधिक bq बरोबर am cn अधिक bpcn अधिक amdq अधिक bpdq
वजा ancm वजा andp वजा bcmq
वजा bdpq आपण पाहतो की या दोन संज्ञा आणि शब्द आपण पाहू शकतो.
आता a चा निर्धारक b च्या निर्धारकाचा विचार करू.
p मध्ये adnp अधिक bc
आता आपण ab चा
निर्धारक म्हणून मिळवलेल्या संज्ञांची तुलना
करूया आमच्याकडे admq आहे admqadmq वजा bcmq वजा bcmq वजा adnp वजा adnp अधिक bcnp अधिक bcnp आणि आपण पाहू शकतो की उर्वरित संज्ञा amcn आणि वजा ancel करू शकतात.
एकमेकांना म्हणून आम्हाला ab चा निर्धारक मिळतो a आणि b गुणधर्म आठच्या निर्धारकांच्या गुणाकाराइतके समान आहे जर आपल्या a च्या पंक्तीच्या सर्व नोंदी दोन प्रमाणांची बेरीज म्हणून लिहिता येतील तर a चा निर्धारक लिहिता येईल.

दोन निर्धारकांची बेरीज म्हणून मी a हे एक अधिक kb अधिक m c अधिक ndefxyz च्या बरोबरीचे आहे हे समजावून सांगू.

आम्ही पाहतो की पहिल्या पंक्तीचे घटक दोन प्रमाणांची बेरीज म्हणून व्यक्त केले गेले आहेत त्यापैकी प्रत्येकाचा आम्ही निर्धारक दावा करतो .
a हे abcdefxyz च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे आणि kmndefxyz च्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे जेव्हा आपण ते t च्या बाजूने विस्तृत करतो तेव्हा हे पाहणे खूप सोपे आहे तो a ची पहिली पंक्ती आहे कारण a चा निर्धारक एक अधिक k च्या निर्धारकात efyz वजा b अधिक m च्या निर्धारकामध्ये dfxz अधिक c अधिक n dexy च्या निर्धारकामध्ये समान आहे आपण efyz वजा b च्या निर्धारकामध्ये a लिहू शकतो dfxz plus c चा निर्धारक dexy plus k मध्ये efyz वजा m च्या निर्धारकात dfxz वजा n dexy च्या निर्धारकामध्ये आणि आपण सहज म्हणू शकतो की पहिला एबीसीडीएफएक्सआयझेडचा निर्धारक आहे अधिक हा kmndefxyz चा निर्धारक आहे मॅट्रिक्स a चा निर्धारक दोन निर्धारकांची बेरीज म्हणून लिहिता येईल आता मला काही समस्या करू द्या
एकाचा निर्धारक वर्ग एक db चौरस आणि एक cc चौरस म्हणून आपण
पहिल्या रांगेत विस्तृत करतो म्हणून a चा निर्धारक 1 च्या बरोबरीचा आहे मध्ये bc वर्ग वजा cb वर्ग वजा a मध्ये c वर्ग वजा b वर्ग c वर्ग वजा b वर्ग अधिक एक वर्ग मध्ये c उणे b समान आहे जर मी पहिल्या टर्ममधून bc सामान्य घेतला तर तो bc मध्ये c उणे b वजा a मध्ये c वजा b मध्ये c अधिक b अधिक a वर्ग c वजा b मध्ये c उणे b समान आहे जर मी c उणे बिट सामान्य घेतला तर bc वजा ac अधिक ab वजा ab अधिक a चौरस आहे c वजा b मध्ये मी यातून c सामान्य घेऊ म्हणजे c मध्ये b वजा a वजा a मध्ये b वजा a समान c वजा b मध्ये b वजा a मध्ये c वजा a ज्याला आपण एक वजा b मध्ये b वजा c मध्ये c वजा a असे लिहू शकतो जेणेकरुन या मॅट्रिक्सचा निर्धारक असा दुसरा गुणधर्म शोधूया जर
मॅट्रिक्समध्ये ith पंक्ती th row आणि jth row च्या बेरजेने बदलली असेल तर determinant इलस्ट्रेशन बदलत नाही a is equal to abcmnpxyz let b हे पहिल्या पंक्तीच्या आणि दुसऱ्या पंक्तीच्या बेरीजच्या बरोबरीचे आहे याचा अर्थ मी rho 1 ला rho 1 आणि rho 2 च्या बेरजेने बदलत आहे याचा अर्थ आता b बरोबर एक अधिक आहे.
mb अधिक nc अधिक p आणि इतर पंक्ती समान राहतील i t mnp आणि xyz आहे
तर दावा आहे की b चा निर्धारक a का निर्धारक सारखा आहे कारण जर पंक्ती घटक दोन अभिव्यक्तींची बेरीज म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकतात तर मी निर्धारक दोन निर्धारकांची बेरीज म्हणून लिहू शकतो.

त्यामुळे b चा निर्धारक हे abcmnpxyz चा निर्धारक आणि या इतर घटकांचा निर्धारक mnpmnpxyz हा या मॅट्रिक्सच्या अधिक निर्धारकाच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचा आहे जो 0 च्या समान आहे कारण दोन पंक्ती b चे निर्धारक समान आहेत aa थोडे अधिक सामान्यीकरण जर ith पंक्तीच्या जागी ith पंक्ती अधिक काही स्थिर वेळा jth पंक्ती असेल तर b चा निर्धारक देखील a च्या निर्धारकाच्या समान असेल किंवा b चा निर्धारक अधिक kmb अधिक knc अधिक kpmnpxyz बरोबर असेल
तर b चा निर्धारक असेल a च्या निर्धारकाच्या समान हा अधिक mkmb अधिक knc अधिक kpmnpxyz
चा खरा निर्धारक आहे abcmnpxyz चा निर्धारक अधिक kmknkpmnpxyz चा निर्धारक हे अधिकच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे हे
आपल्याला माहित आहे की जर सर्व घटकांना समान स्थिरांकाने गुणले तर आपण स्थिरांक काढू शकतो म्हणून आपण त्याला k गुणिले mnpmnpxyz असे लिहू शकतो आणि हे 0 होते म्हणून निर्धारक b हा a च्या निर्धारकाच्या समान आहे आता आपण आणखी काही समस्या करूया एक bca चा निर्धारक b
मध्ये c अधिक c एक cab मध्ये c अधिक a abc मध्ये a अधिक b 1 bc ab अधिक ac 1 cabc अधिक ba च्या निर्धारकाच्या समान आहे.
1 abca अधिक ab आता मी दाखवले आहे की जर एक पंक्ती त्या पंक्तीची बेरीज आणि दुसरी पंक्ती बदलली तर ती निर्धारक बदलत नाही कारण आपण पंक्तीबद्दल जे म्हणू शकतो त्याच प्रकारे आपण स्तंभांबद्दल देखील म्हणू शकतो.
जर एक विशिष्ट स्तंभ त्या स्तंभाच्या बेरीजने आणि दुसरा स्तंभ बदलला असेल तर तो निर्धारक बदलत नाही म्हणून मी लिहू शकतो की

निर्धारक 1 वापरतो.

bc आता मी स्तंभ 2 मध्ये स्तंभ 3 bc अधिक ab अधिक ac जोडत आहे ऑपरेशन c दोन आता c दोन अधिक c तीन स्तंभ क्षमस्व स्तंभ तीन झाले स्तंभ दोन अधिक स्तंभ तीन म्हणून एक ca ते ca अधिक bc अधिक ba एक ab it आहे ab plus ca आहे तो cbcb आहे आता आपण हे घटक पाहूया ते ab plus ac plus bc आहे ते ab plus ac plus bc आहे आणि हे देखील ab plus ac plus bc आहे
त्यामुळे तिसऱ्या स्तंभातील सर्व घटकांचा गुणाकार केला जात आहे.
समान स्थिरांक म्हणून वापरा निर्धारक हा ab अधिक bc अधिक ca आहे जर आपण तो घटक काढला तर 1 1 1 bc ca ab नंतर 1 1 1 उरतो.
आणि या मॅट्रिक्सचा निर्धारक काय आहे कारण त्याचे दोन समान स्तंभ आहेत कारण त्याचा निर्धारक शून्य आहे यात दोन समान स्तंभ आहेत म्हणून मूळ मॅट्रिक्स शून्याचा निर्धारक आता आणखी एक समस्या सोडवूया x अधिक y अधिक 2 zx स्वल्पविराम yz दुसरा घटक y अधिक z अधिक दोन xy आहे आणि तिसरी पंक्ती zx आहे z अधिक x अधिक 2 y आपल्याला या मॅट्रिक्सच्या निर्धारकाची गणना करायची आहे आपण प्रथम चरण काय करू आपण प्रथम स्तंभ दोन मध्ये स्तंभ एक c मध्ये जोडतो एक c एक अधिक c दोन नंतर आपल्याला जे मॅट्रिक्स मिळत आहे ते x दोन x अधिक y होईल अधिक दोन zxy
दोन x अधिक y अधिक दोन zy अधिक z अधिक दोन x मध्ये yx अधिक zx आणि z अधिक x अधिक दोन y आता आपण स्तंभ 1 ला स्तंभ 1 अधिक स्तंभ 2 स्तंभ 3 च्या बेरजेने बदलतो.
मग आपल्याला जे मिळत आहे ते दोन आहे x अधिक दोन y अधिक दोन zxy
ते दोन x अधिक दोन y अधिक दोन zy अधिक z अधिक दोन x मध्ये y आणि दोन x अधिक दोन z अधिक दोन yxz अधिक x अधिक दोन y आता आपण पहिल्या स्तंभात सर्व घटक पाहू शकतो.
समान आहेत म्हणून मी ते बाहेर काढू शकतो म्हणून दोन x अधिक दोन y अधिक दोन z हे एक एक एक
xyy अधिक z अधिक दोन
xxyz अधिक x अधिक दोन y च्या निर्धारकात समान आहे हे अद्याप काहीसे क्लिष्ट आहे म्हणून आता आपण काय करू ते बदलू पहिल्या रांगेच्या एक पट वजा असलेली दुसरी पंक्ती आत्ताच आपल्याकडे आहे e दाखवले की जर एका पंक्तीच्या जागी दुसरी पंक्ती आणि ती विशिष्ट पंक्ती स्थिर असेल तर ती निर्धारक बदलत नाही म्हणून मी काय करत आहे मी पंक्ती 2 च्या जागी पंक्ती 2 अधिक वजा 1 गुणा rho 1 घेत आहे तर मग आपल्याला काय मिळत आहे त्याचा निर्धारक समान आहे 1 xy 0 y अधिक z अधिक x 0 1 xz अधिक x अधिक 2 y अर्थातच 2 ने x अधिक y अधिक z ने गुणाकार केला आहे कारण ते तिथून येत आहे आता r3 ला r3 वजा r1 ने बदला
म्हणून आपल्याला काय मिळत आहे निर्धारक 1 xy 0 x अधिक y अधिक z 0 च्या निर्धारकाच्या 2 मध्ये x अधिक y अधिक z बरोबर आहे आता मी 3 0 0 x अधिक y अधिक z मधून rho 1 वजा करत आहे आता जर तुम्ही पाहिले तर हे त्रिकोणी मॅट्रिक्स आहे आणि आम्ही त्रिकोणी मॅट्रिक्सचा निर्धारक कर्ण घटकांचा गुणाकार आहे हे जाणून घ्या आता हे कर्ण घटक x अधिक y अधिक z आणि x अधिक y अधिक z आहेत म्हणून त्यांचे गुणाकार x अधिक y अधिक z संपूर्ण वर्ग x अधिक y अधिक y अधिक ने गुणाकार केला आहे z म्हणून एकूण निर्धारक i s 2 मध्ये x अधिक y अधिक z संपूर्ण घन असेल म्हणजे उत्तराची सूचना आहे की आम्ही ते स्पष्टपणे विस्तारित केले नाही कारण अटी खूप लांब आहेत तेही लांब अभिव्यक्ती आहेत म्हणून जर आपण या तीन पदांची बेरीज आणखी तीन संज्ञांनी गुणाकार केली तर
त्यामुळे हे नऊ पदांचे असणार आहे हे संगणकीयदृष्ट्या स्फोट होईल पण आम्ही काय केले आम्ही अनेक गुणधर्म वापरले आहेत जे आम्ही शेवटच्या वर्गात दाखवले आहेत आणि या वर्गाने अतिशय प्रभावीपणे निर्धारकाची अगदी सोप्या पद्धतीने गणना केली आहे,
आता मी एक संख्यात्मक उदाहरण घेऊ.
दोन सात साठ पाच तीन आठ पंचाहत्तर आणि पाच नऊ आठ सहा चा निर्धारक काय आहे हे वरवर पाहता खूप क्लिष्ट आहे पण मी हे दोन स्तंभ पाहणार नाही आणि तिसरा स्तंभ कसा निर्माण करू शकतो ते पाहणार आहे तो 65 आहे इथे आपल्याकडे 7 आहे आणि येथे 2 आहे हे आपल्याला माहित आहे की 7 ते 9 63 अधिक 2 समान आहे 65 त्याचप्रमाणे 8 ते 9 अधिक 3 बरोबर 72 अधिक 3 बरोबर 75 आणि 9 मध्ये 9 अधिक 5 बरोबर 86 आहे म्हणून आपण ते असे लिहू शकतो.
2 7 9 ते 7 अधिक 2 3 8 9 ते 8 अधिक 3 पाच नऊ नऊ ते नऊ अधिक पाच कारण स्तंभ दोन घटकांची बेरीज म्हणून व्यक्त केला जातो म्हणून मी ते लिहू शकतो कारण दोन निर्धारकांची बेरीज दोनच्या निर्धारकांच्या बरोबरीची आहे सात नऊ मध्ये सात तीन आठ नऊ मध्ये आठ 5 9 9 मध्ये 9 अधिक 2 7 2 3 8 3 पाच नऊ पाच यात दोन स्तंभ एकसारखे आहेत म्हणून हे आपल्याला शून्य देईल आणि या स्तंभात 3 हा स्तंभ 2 च्या 9 पट आहे आणि म्हणून निर्धारक वापरा जर मी 9 काढले तर तो 2 7 7 3 8 8 5 9 9 चा निर्धारक आहे आणि म्हणून आपल्याला आढळेल की त्याचे दोन स्तंभ समान आहेत म्हणून जोखीम निर्धारक देखील शून्य आहे म्हणून उत्तर ठीक आहे विद्यार्थी मी थांबतो आज येथे या वर्गात आपण निर्धारकांच्या अनेक गुणधर्मांचे परीक्षण केले आहे आणि त्या गुणधर्मांचा वापर करून अनेक समस्या सोडवल्या आहेत ज्यामुळे
पुढील वर्गात निर्धारकांची गणना सोपी झाली आहे, मला आणखी काही समस्या दिसतील आणि मी पुढे जाईन.
निर्धारकांची संकल्पना विशेषत: व्याकरणाचे नियम आणि समीकरणे सोडवणे इत्यादी.
धन्यवाद तुमचे