पहले व्याख्यान में निर्धारकों पर दूसरे व्याख्यान में छात्रों का स्वागत करते हैं, हमने परिभाषित किया है कि एक वर्ग मैट्रिक्स के लिए एक निर्धारक क्या है और हमने इस व्याख्यान में कुछ गुणों की जांच की है, हम एक निर्धारक के अधिक गुणों की जांच करना जारी रखेंगे और कोशिश करेंगे हल कुछ समस्याएं यदि आपको संपत्ति चार में याद है तो हमने देखा है कि यदि ए बराबर है एक एक एक दो एक तीन एक दो एक दो दो एक दो तीन और एक तीन एक तीन 2 ए 3 3 तो यदि बी है के बराबर ka 1 1 ka 1 2 ka 1 3 a 2 1 a 2 2 a 2 3 a 3 1 a 3 2 a 3 3 तो b का सारणिक , a के निर्धारक के k गुणा के बराबर होता है जिसे हमने पिछली कक्षा के प्रश्न में देखा है।

क्या होगा यदि a के सभी तत्वों को k से गुणा किया जाए तो यह सारणिक को कैसे प्रभावित करता है या दूसरे शब्दों में b का निर्धारक क्या है
जो ka 1 1 ka 1 2 ka 1 3 ka 2 1 ka 2 2 ka 2 के बराबर है।
3 का 3 1 का तीन दो का तीन तीन क्या होने जा रहा है? इस मैट्रिक्स के टर्मिनेंट यदि हम इसे एक समान तरीके से विस्तारित करते हैं तो हमें उपयोग निर्धारक मिलता है ka 1 1 में ka 2 2 में ka 3 3 घटा ka 2 3 में ka 3 2 घटा ka 1 2 में ka 2 1 में ka 3 3 घटा का 3 1 गुणा का 2 3 जमा का 1 3 का 2 1 में का 3 2 घटा का 2 2 का का 3 1 तीन या दूसरे शब्दों में हम k घन को सामान्य मान सकते हैं और फिर जो मुझे मिलता है मैं उसे फिर से नहीं लिख रहा हूँ आप देखते हैं कि यह एक के सारणिक की अभिव्यक्ति के समान है
इसलिए b का निर्धारक k घन गुणा के निर्धारक के बराबर है यदि a के सभी तत्वों
को सामान्य रूप से k से गुणा किया जाता है यदि a एक क्रॉस n मैट्रिक्स है और यदि सभी तत्वों को एक स्थिर k से गुणा किया जाता है, तो नए मैट्रिक्स b का निर्धारक k से घात n के निर्धारक में होगा a यदि मैट्रिक्स की दो पंक्तियाँ या स्तंभ समान हैं तो निर्धारित करें मैट्रिक्स का inant शून्य है ठीक है , मुझे पहले यह सत्यापित करने दें कि a abcabcxyz के बराबर है,
इसलिए मैट्रिक्स ऐसा है कि दो पंक्तियाँ समान हैं, यह दिखाएगा कि इसका निर्धारक शून्य है, आइए हम इसे पहली पंक्ति के साथ विस्तारित करें
इसलिए यह एक होने जा रहा है बीज़ माइनस साइ माइनस बी में एज़ माइनस सीएक्स प्लस सी में एई माइनस बीएक्स यह हम जानते हैं कि यह एबीजेड माइनस एसी माइनस एबीजेड प्लस डीसीएक्स प्लस एसी माइनस बीसीएक्स के बराबर है अब हम शर्तों को देखते हैं प्लस एबीज माइनस एप्सिलॉन वे एक दूसरे को रद्द करते हैं प्लस एसी माइनस एसी वे एक दूसरे को रद्द करते हैं और माइनस बीसीएक्स प्लस बीसीएक्स वे एक दूसरे को रद्द करते हैं
इसलिए परिणाम शून्य है क्योंकि हमें इसकी गणना करने से पहले परिणाम नहीं पता था, लेकिन एक बार जब आप एक विशेषज्ञ होते हैं और आप देख सकते हैं कि एक की दो पंक्तियां मैट्रिक्स समान हैं या मैट्रिक्स के दो कॉलम समान हैं तो उस मैट्रिक्स का निर्धारक शून्य होने वाला है मैंने इसे पंक्ति का विस्तार करके दिखाया है लेकिन हम जानते हैं कि निर्धारित एक की चींटी एक स्थानान्तरण के निर्धारक के रूप में समान है,
इसलिए यदि हम मैट्रिक्स के दो स्तंभों को स्थानांतरित करते हैं तो पहला और दूसरा स्तंभ समान होने जा रहा है और उस स्थिति में भी इसका निर्धारक शून्य संपत्ति छह मान लीजिए कि एक है दिया गया मैट्रिक्स और हम दो पंक्तियों या दो स्तंभों को आपस में बदलकर एक नया मैट्रिक्स बी प्राप्त करते हैं, तो बी का
निर्धारक एक के निर्धारक के ऋण के बराबर होता है, जो कि मान समान रहेगा लेकिन संकेत बदल जाएगा , मुझे इसे एबीसीडीईएफएग और के को इसके निर्धारक पर विचार करने दें।
ए के बराबर है एक माइनस एफएच माइनस बी गुणा डीके माइनस एफजी प्लस सी इन डीएच माइनस उदाहरण के लिए इस पर वापस आएंगे लेकिन दो पंक्तियों को आपस में बदलकर बी का निर्माण करते हैं आइए हम पहली और तीसरी पंक्ति लेते हैं ताकि तीसरी पंक्ति अब पहली बन जाए पंक्ति दूसरी पंक्ति जस की तस बनी रहती है और यहाँ हमें a की पहली पंक्ति b की तीसरी पंक्ति के रूप में मिलती है
इसलिए b का सारणिक बराबर g गुणा ec घटा bf घटा h गुणा dc घटा af जोड़ k गुणा बी माइनस
एई अब हम
एक के निर्धारक की अभिव्यक्ति के साथ तुलना करते हैं जिसे हमने अभी प्राप्त किया है और अब हम विज्ञान पर विचार करते हैं जीईसी का एक सकारात्मक संकेत था यहां मुझे एक नकारात्मक संकेत के साथ जीसी मिलता है gbf एक नकारात्मक संकेत के साथ आता है मुझे मिलता है जीबी और जीबीएफ एक सकारात्मक संकेत के साथ आता है क्योंकि माइनस और माइनस प्लस हो जाता है एचडीसी एक नकारात्मक संकेत के रूप में आता है एचडीसी एक सकारात्मक संकेत के साथ आता है एक एचएफ एक सकारात्मक संकेत के साथ आता है और एएचएफ एक नकारात्मक संकेत के साथ आता है और फिर केडीबी यहां एक सकारात्मक संकेत के साथ आता है लेकिन यहाँ यह एक ऋणात्मक चिन्ह है और kae
और kae यहाँ एक ऋणात्मक चिन्ह के साथ आता है और kae यहाँ एक धनात्मक चिन्ह के साथ आता है इस प्रकार हम देखते हैं कि सभी शर्तें बरकरार हैं लेकिन
सभी शब्दों का चिन्ह उलट दिया गया है यानी यदि यह एक सकारात्मक भय था यह यहाँ ऋणात्मक है और यदि यह यहाँ ऋणात्मक है तो यह यहाँ धनात्मक हो जाता है या दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि b का निर्धारक
एक सिद्ध संपत्ति के सात निर्धारक के ऋण के बराबर है एबी की चींटी ए के निर्धारक के बराबर है
द्वि के निर्धारक में सीधे इसे दो कॉस दो मैट्रिक्स के लिए दिखाएं मैं इसे सीधे ए और बी आकार दो क्रॉस टू के लिए दिखाता हूं और मेरा सुझाव है कि आप
तीन क्रॉस थ्री मैट्रिस के लिए उसी तरह सत्यापित करें चलो a, abcd के

बराबर है और b, mnpq के बराबर है,
इसलिए a का सारणिक विज्ञापन माइनस bc के बराबर है और b का सारणिक mq घटा np के बराबर है, अब ab उत्पाद मैट्रिक्स am जोड़ bpan जोड़ bqcm जमा dpcn जमा dq के बराबर है
इसलिए इसका सारणिक बराबर है एम प्लस बीपी गुणा सीएन प्लस डी क्यूब माइनस सेमी प्लस डीपी इन प्लस बीक्यू बराबर है एम सीएन प्लस बीपीसीएन प्लस एएमडीक्यू प्लस बीपीडीक्यू
माइनस एएनसीएम माइनस और पी माइनस बीसीएमक्यू
माइनस बीडीपीक्यू हम देखते हैं कि ये दो शब्द रद्द हैं और आइए अब हम विचार करें कि a का सारणिक b का सारणिक है, विज्ञापन घटा bc गुणा mq घटा np बराबर admq घटा bcmq घटा है एडीएनपी प्लस बीसी इन पी अब हम उन शब्दों की तुलना करते हैं जो हमने एबी के निर्धारक के रूप में प्राप्त किए हैं, हमारे पास एडीएमक है, हमारे पास एडीएमक्यू माइनस बीसीएमक्यू माइनस बीसीएमक्यू माइनस एडएनपी माइनस एडएनपी प्लस बीसीएनपी प्लस बीसीएनपी है और हम देख सकते हैं कि शेष शब्द एमसीएन और माइनस एसीएम वे रद्द करते हैं।
एक दूसरे को
इसलिए हम पाते हैं कि एबी का निर्धारक ए और बी संपत्ति आठ के निर्धारकों के उत्पाद के बराबर है यदि
हमारी पंक्ति की सभी प्रविष्टियों
को दो मात्राओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है तो एक के निर्धारक को लिखा जा सकता है
दो निर्धारकों के योग के रूप में मुझे यह स्पष्ट करना चाहिए कि एक प्लस केबी प्लस एम सी प्लस एनडेफ्क्सीज़ के बराबर है,
हम देखते हैं कि पहली पंक्ति के तत्वों को दो मात्राओं के योग के रूप में व्यक्त किया गया है , उनमें से प्रत्येक का हम निर्धारक का दावा करते हैं a , abcdefxyz के सारणिक और kmndefxyz के सारणिक के बराबर है, यह देखना बहुत आसान है जब हम इसे t के साथ विस्तारित करते हैं वह a की पहली पंक्ति है क्योंकि a का सारणिक a के बराबर है efyz के सारणिक घटा b जोड़ m में dfxz का सारणिक जोड़ c जोड़ n में dexy के सारणिक
के बराबर है हम efyz के निर्धारक में a लिख सकते हैं घटाकर b में निर्धारक dfxz plus c को dexy के निर्धारक में प्लस k को efyz के निर्धारक में घटाना m को dfxz के निर्धारक में
घटाकर n को dexy के निर्धारक में घटाना और हम आसानी से कह सकते हैं कि पहला वास्तव में abcdefxyz का निर्धारक है और यह kmndefxyz का निर्धारक है ।
मैट्रिक्स के निर्धारक को दो निर्धारकों के योग के रूप में लिखा जा सकता है, अब मुझे कुछ समस्याएं करने दें, एक के निर्धारक को वर्ग एक डीबी वर्ग और एक सीसी वर्ग के रूप में हम इसे पहली पंक्ति के साथ विस्तारित करते हैं
इसलिए एक का निर्धारक 1 के बराबर है बीसी वर्ग घटा सीबी वर्ग घटाकर ए गुणा सी वर्ग घटा बी वर्ग सी वर्ग घटा बी वर्ग जमा एक वर्ग गुणा सी माइनस बी बराबर है अगर मैं पहले टर्म से बीसी कॉमन लेता हूं तो यह बीसी में सी माइनस बी माइनस ए में सी माइनस बी में सी प्लस बी प्लस ए स्क्वायर इन सी माइनस बी बराबर है अगर मैं सी माइनस बिट को सामान्य मानता हूं बीसी माइनस एसी प्लस एबी माइनस एबी प्लस ए स्क्वायर सी माइनस बी के बराबर है , मुझे इसमें से सी कॉमन लेने दें,
इसलिए सी में बी माइनस ए माइनस ए से बी माइनस ए बराबर सी माइनस बी गुणा बी माइनस ए गुणा सी माइनस ए जिसे हम इसे माइनस बी के रूप में बी माइनस सी में सी माइनस ए के रूप में लिख सकते हैं ताकि इस मैट्रिक्स का निर्धारक हो, आइए हम एक और संपत्ति का पता लगाएं यदि मैट्रिक्स में ith पंक्ति को
ith पंक्ति और jth पंक्ति के योग से बदल दिया जाए तो निर्धारक चित्रण नहीं बदलता है, मान लें कि ए बराबर है abcmnpxyz चलो बी पहली पंक्ति और दूसरी पंक्ति के योग के बराबर है जिसका अर्थ है कि मैं rho 1 को rho 1 और rho 2 के योग से बदल रहा हूं जिसका अर्थ है कि अब b एक प्लस के बराबर है एमबी प्लस एनसी प्लस पी और अन्य पंक्तियां समान रहती हैं I t mnp और xyz है
तो दावा यह है कि बी का निर्धारक संपत्ति के कारण क्यों के निर्धारक के समान है
कि यदि पंक्ति तत्वों को दो अभिव्यक्तियों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तो मैं निर्धारक को दो निर्धारकों के योग के रूप में लिख सकता हूं
इसलिए बी के निर्धारक को वास्तव में abcmnpxyz के निर्धारक के रूप में लिखा जा सकता है और इस अन्य घटकों के निर्धारक mnpmnpxyz इस मैट्रिक्स के एक प्लस निर्धारक के निर्धारक के बराबर है जो 0 के बराबर है क्योंकि दो पंक्तियाँ समान हैं b के निर्धारक के बराबर है
थोड़ा अधिक सामान्यीकरण यदि ith पंक्ति को ith पंक्ति और कुछ स्थिर समय jth पंक्ति द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है, तो b का सारणिक भी a के सारणिक के
बराबर होता है या यदि b एक प्लस kmb प्लस knc प्लस kpmnpxyz के बराबर होता है,
तो b का निर्धारक होता है a के सारणिक के बराबर यह a का सही सारणिक है mkmb जमा
knc जोड़ kpmnpxyz
के बराबर है abcmnpxyz का सारणिक और kmknkpmnpxyz का सारणिक एक
धन के सारणिक के बराबर है,
हम जानते हैं कि यदि सभी तत्वों को एक ही स्थिरांक से गुणा किया जाता है तो हम अचर को निकाल सकते हैं ताकि हम इसे k गुणा mnpmnpxyz के रूप में लिख सकें और यह 0 हो जाता है
इसलिए इसका निर्धारक b, a के सारणिक के बराबर है, आइए अब कुछ और समस्याएँ करते हैं, एक bca गुणा b जोड़ c एक कैब गुणा c जोड़ a a bc गुणा a जोड़ b, 1 bc ab जोड़ ac 1 cabc जोड़ ba के सारणिक के बराबर है 1 abca

plus ab अब मैंने दिखाया है कि यदि एक पंक्ति को उस पंक्ति और दूसरी पंक्ति के योग से बदल दिया जाता है तो यह सारणिक को नहीं बदलता है क्योंकि हम पंक्तियों के बारे में क्या कह सकते हैं हम कॉलम के बारे में भी उसी तरह कह सकते हैं जैसे हम कह सकते हैं यदि एक विशेष कॉलम को उस कॉलम और दूसरे कॉलम के योग से बदल दिया जाता है तो यह सारणिक को नहीं बदलता है
इसलिए मैं लिख सकता हूं कि उपयोग निर्धारक 1 है बीसी अब मैं कॉलम 2 को कॉलम 3 बीसी प्लस एबी प्लस एसी में जोड़ रहा हूं, ऑपरेशन सी दो है अब सी दो प्लस सी तीन कॉलम सॉरी कॉलम तीन बन जाता है कॉलम टू प्लस कॉलम तीन तो एक सीए यह सीए प्लस बीसी प्लस बीए एक एबी है।
एबी प्लस सीए है यह सीबीसीबी है अब आइए इन तत्वों को देखें यह एबी प्लस एसी प्लस बीसी है यह एबी प्लस एसी प्लस बीसी है और यह एबी प्लस एसी प्लस बीसी भी है
इसलिए तीसरे कॉलम के सभी तत्वों को गुणा किया जा रहा है एक ही स्थिरांक
इसलिए उपयोग निर्धारक है ab प्लस बीसी प्लस सीए अगर हम उस कारक को निकालते हैं जो 1 1 1 बीसी सीए एबी है तो 1 1 1 है और इस मैट्रिक्स का निर्धारक क्या है क्योंकि इसमें दो समान कॉलम हैं, इसका निर्धारक शून्य है क्योंकि इसमें दो समान कॉलम हैं
इसलिए मूल मैट्रिक्स शून्य का निर्धारक अब हम एक और समस्या को हल करते हैं जो x प्लस y प्लस 2 zx कॉमा yz का निर्धारक है दूसरा तत्व y प्लस z प्लस टू xy है और तीसरी पंक्ति zx है जेड प्लस एक्स प्लस 2 वाई हमें इस मैट्रिक्स के निर्धारक की गणना करने की आवश्यकता है कि हम चरण एक क्या करेंगे हम पहले कॉलम दो को कॉलम एक में जोड़ते हैं सी एक सी एक प्लस सी दो बन जाता है
फिर हमें जो मैट्रिक्स मिल रहा है वह एक्स टू एक्स प्लस वाई हो जाता है प्लस टू जेडएक्सवाई
दो एक्स प्लस वाई प्लस टू ज़ी प्लस जेड प्लस टू एक्स इन वाईएक्स प्लस जेडएक्स और जेड प्लस एक्स प्लस टू वाई अब हम कॉलम 1 को कॉलम 1 प्लस कॉलम 2 कॉलम 3 के योग से बदलते हैं।
तो हमें जो मिल रहा है वह दो है एक्स प्लस टू वाई प्लस टू जेडएक्सवाई
यह दो एक्स प्लस टू वाई प्लस टू ज़ी प्लस जेड प्लस टू एक्स इन वाई और टू एक्स प्लस टू जेड प्लस टू वाईएक्सजेड प्लस एक्स प्लस टू वाई अब हम देख सकते हैं कि पहले कॉलम में सभी तत्व समान हैं
इसलिए मैं इसे निकाल सकता हूं
इसलिए दो एक्स प्लस दो वाई प्लस दो जेड एक के निर्धारक में एक
एक्सवाई प्लस जेड प्लस दो
एक्सएक्सवाई प्लस एक्स प्लस दो वाई यह अभी भी कुछ हद तक जटिल है
इसलिए हम जो करेंगे वह अब बदल देगा दूसरी पंक्ति माइनस एक बार पहली पंक्ति के साथ अभी हमारे पास है ई ने दिखाया कि यदि एक पंक्ति को लगातार दूसरी पंक्ति और उस विशेष पंक्ति से बदल दिया जाता है, तो यह निर्धारक को नहीं बदलता है,
इसलिए मैं जो कर रहा हूं, मैं पंक्ति 2 को पंक्ति 2 प्लस माइनस 1 बार rho 1 के साथ बदल रहा हूं, फिर हमें क्या मिल रहा है इसका सारणिक 1 xy 0 y जमा z जमा x 0 1 xz जमा x जमा 2 y के बराबर है, निश्चित रूप से 2 से x जमा y जमा z में गुणा किया जाता है क्योंकि वह वहां से आ रहा है अब r3 को r3 घटा r1 से बदलें,
इसलिए हमें क्या मिल रहा है सारणिक 2 गुणा x जोड़ y जमा z के बराबर है 1 xy 0 x जमा y जमा z 0 के सारणिक में अब मैं rho 1 को पंक्ति 3 0 0 x जमा y जमा z से घटा रहा हूं यदि आप देखते हैं कि यह एक त्रिकोणीय मैट्रिक्स है और हम पता है कि त्रिकोणीय मैट्रिक्स का निर्धारक विकर्ण तत्वों का उत्पाद है अब ये विकर्ण तत्व एक्स प्लस वाई प्लस जेड और एक्स प्लस वाई प्लस जेड हैं,
इसलिए उनका उत्पाद एक्स प्लस वाई प्लस जेड पूरे वर्ग को एक्स प्लस वाई प्लस वाई प्लस से गुणा किया जाता है z
इसलिए समग्र निर्धारक i s 2 गुणा x प्लस y प्लस z पूरे घन में होने जा रहा है,
इसलिए यह उत्तर सूचना है कि हमने इसका स्पष्ट रूप से विस्तार नहीं किया है क्योंकि शब्द बहुत लंबे हैं, बहुत लंबे भाव हैं
इसलिए यदि हम तीन शब्दों के इस योग को अन्य तीन शब्दों से गुणा करते हैं तो यह नौ शब्द होने जा रहा है यह कम्प्यूटेशनल रूप से विस्फोट करेगा लेकिन हमने जो किया है हमने कई गुणों का उपयोग किया है जो हमने पिछली कक्षा में दिखाया है और इस वर्ग को बहुत ही सरल तरीके से निर्धारक की गणना करने के लिए बहुत प्रभावी ढंग से
मुझे एक संख्यात्मक उदाहरण लेने दें दो सात पैंसठ तीन आठ पचहत्तर और पांच नौ अस्सी छह का निर्धारक क्या है जो स्पष्ट रूप से बहुत जटिल है लेकिन ऐसा नहीं है मैं इन दो स्तंभों को देखूंगा और देखूंगा कि मैं तीसरा स्तंभ कैसे उत्पन्न कर सकता हूं यह 65 है यहां हमारे पास 7 हैं और यहां यह 2 है हम जानते हैं कि 7 गुणा 9 है 63 जमा 2 बराबर 65 है इसी तरह 8 गुणा 9 जमा 3 बराबर 72 जमा 3 बराबर 75 है और 9 गुणा 9 जमा 5 बराबर 86 है
इसलिए हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं 2 7 9 गुणा 7 जमा 2 3 8 9 गुणा 8 जमा 3 पांच नौ नौ गुणा नौ जमा पांच चूंकि कॉलम को दो तत्वों के योग के रूप में व्यक्त किया जाता है, मैं इसे लिख सकता हूं क्योंकि दो निर्धारकों का योग दो के निर्धारक के बराबर है सात नौ में सात तीन आठ नौ आठ 5 9 9 गुणा 9 जमा 2 7 2 3 8 3 पांच नौ पांच इसमें दो कॉलम समान हैं
इसलिए यह हमें शून्य देगा और इसमें कॉलम 3 कॉलम 2 का 9 गुना है और
इसलिए निर्धारक का उपयोग करें यदि मैं 9 लेता हूं तो यह 2 7 7 3 8 8 5 9 9 का निर्धारक है और
इसलिए हम पाएंगे कि इसमें समान दो कॉलम हैं
इसलिए जोखिम निर्धारक भी शून्य है
इसलिए उत्तर ठीक है छात्र मैं रुकता हूं आज इस कक्षा में हमने सारणिकों के कई गुणों की जांच की है और उन गुणों का उपयोग करके कई समस्याओं को हल किया है, जिन्होंने अगली कक्षा में सारणिक की गणना को आसान बना दिया है,
मैं कुछ और समस्याओं को देखूंगा और साथ ही मैं आगे बढ़ूंगा निर्धारकों की अवधारणा विशेष रूप से व्याकरण के नियम और समीकरणों को हल करना वगैरह धन्यवाद आप