

مساوات کے خطی نظام کو حل کرنے میں تعین کنندگان کے کردار کا مطالعہ کرنے والے اس لیکچر میں خوش آمدید

، اس لیے آج ہم جس موضوع پر بات کرنے جا رہے ہیں وہ خطی نظام مساوات کو حل کرنا ہے

اس لیے پچھلے تین لیکچرز میں ہم نے تعین کرنے والوں کے مختلف پہلوؤں کو دیکھا ہے جہاں سے شروع ہوتے ہیں۔ وہ پیدا ہو سکتے ہیں اس لیے حوصلہ افزا مثالوں میں سے ایک درحقیقت مساوات کا خطی نظام حل کرنا تھا پھر ہم نے یہ بھی دیکھا کہ ان کی جیومیٹرک تشریح کس طرح ہوتی ہے آہ پھر ہم نے ایک تعین کنندہ کی تعریف کی تاکہ اگلے لیکچر کے پہلے لیکچر میں ہم نے دیکھا۔ کچھ خاصیتوں پر جو تعین کی قدروں کو مؤثر طریقے سے شمار کرنے میں مدد کرے گی پھر ہم نے تعین کرنے والوں کا ایک اطلاق دیکھا ہم نے دیکھا کہ تعین کنندگان مربع میٹرکس کے الٹا حساب کرنے میں کس طرح مددگار ثابت ہو سکتے ہیں یہ شرائط دیتے ہوئے کہ آیا میٹرکس کا الٹا ہوگا یا نہیں اور آج اسی لائن میں ہم دیکھتے ہیں کہ وہ مساوات کے لکیری نظام کو حل کرنے میں کس طرح مدد کرتے ہیں تاکہ خیال دوبارہ سیدھا ہو جائے اور یہ عام کرنے میں سے ایک ہے۔ کو اسی طرح حل کرنا چاہتے ہیں  $x$  کے برابر مساواتیں دیکھ سکتے ہیں اور ہم متغیر  $3 \times$  سادہ مساوات جو ہم عام طور پر دیکھتے ہیں لہذا ہم  $2z$  اور  $xy$  یا  $y$  اور  $x$  جب ہمارے پاس ایک سے زیادہ مساوات ہوں فرض کریں کہ ہمارے پاس ایسی مساواتیں ہیں جن میں متعدد نامعلوم ہیں کے برابر  $b$  مساوات میں پھر ہم نے دیکھا ہے کہ ہم ان نمائندگیوں کو میٹرکس کی نمائندگی میں کیسے تبدیل کر سکتے ہیں تاکہ ہم  $n$  عام طور پر اور  $ah$  نامعلوم ہیں اور کوئی مساوات  $n$  مربع میٹرکس ہے عام طور پر اگر  $n$  بذریعہ  $n$  ایک عام  $a$  لکھ سکیں جہاں  $ax$  ایک عام مساوات کا استعمال کیسے کر سکتے ہیں  $ah$  پھر ہم اسے حل کرنا چاہیں گے تو یہاں ہم یہ دیکھنے جا رہے ہیں کہ ہم اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا کوئی حل ہے یا کوئی حل نہیں یا بہت سے حل صحیح ہیں تو ہمارا مقصد یہی ہے تو صرف یہ لکھنا ہے کہ ہمیں کیلر اور ایکس ایک نامعلوم ہے  $s$   $a$  بھی ہو سکتا ہے  $b$  کچھ اسکیلر  $a$  پہلے  $b$  کے برابر کلہاڑی جیسی مساوات کا سامنا کرنا پڑا ہو گا جہاں جسے حل کرنے کی ضرورت ہے اس کے لیے حل کرنے کی ضرورت ہے اور کیونکہ یہ تمام اسکیلر ویلیوز ہیں ہم کہہ سکتے ہیں ٹھیک ہے اگر  $ax$  کو عام کرتے ہیں۔ آئیے ہم کہتے ہیں کہ دو نامعلوموں میں مساوات  $ah$  کے برابر اس وقت جب ہم ان  $x$  صفر کے برابر نہیں ہے تو  $a$  نامعلوم ہیں تو دو نامعلوم اور دو مساواتیں ہیں ہم اس کا حل  $y$  اور  $x$  جہاں اب  $n$  برابر  $cx$  plus  $dy$  اور  $m$  plus  $by$  equal to  $m$  اور  $m$  اور پھر  $x$   $y$  میں ہے اور وہاں  $abcd$  کیسے تلاش کریں گے اور ہم جانتے ہیں کہ ہم لکھ سکتے ہیں یہ نیچے ایک میٹرکس کی نمائندگی دائیں ہے لہذا یہ ایک میٹرکس کا کردار ادا کرتا ہے یہ ایک نامعلوم ویکٹر ہے لہذا اشارے کو الجھانے سے بچنے کے لیے آئیے یہ کہتے ہیں کہ  $n$  ہے بار تو یہ ایکس ایک اسکیلر ہے یہ ایک ویکٹر ہے تو مجھے صرف ایک نوٹ کرنے دو کہ یہ اس معاملے میں  $x$  یہ نیچے کے ساتھ ایک ویکٹر نامعلوم ہے  $x$  معلوم ہے اور یہ چیز کے دائیں طرف مساوات بھی معلوم ہے لیکن  $a$  ایک ویکٹر دائیں دو جہتی ہے اور یہ بھی معلوم مستقل ہیں اب کی قدر کیسے  $x$  کے برابر ہے تو ہم یہاں  $b$   $b$  اوقات کی نمائندگی کرتا ہے۔ ہم اپنی قدر کہتے ہیں کہ کیپٹل  $x$  کے برابر  $kn$  لہذا یہ ایک حاصل کر سکتے ہیں تو یہ وہی عام ہے جو ہم ایک جہت میں دیکھتے ہیں یہ دو جہت میں ہے اور عام طور پر ہماری صورت حال ہو سکتی ہے طول و عرض تو ہم مساوات کے ان نظاموں کو کیسے حل کرتے ہیں مساوات کے یہ خطی نظام آہ اس میں تعین کنندگان کا کیا کردار ہے جو اس لیکچر کا مقصد ہے بالکل ٹھیک ہے تو آپ تعین کنندگان کو کیسے استعمال کرتے ہیں ہم ان مساواتوں کو کیسے حل کرتے ہیں ہم کیسے آتے ہیں ان کے وجود یا حل کی جانچ کرنے کے لیے حالات کے ساتھ یا نہیں تو ہم متعلقہ تصورات کو دیکھیں گے اور یہاں کچھ مسائل کو بھی دیکھیں گے کہ ہم نے کہا  $n$  اور  $m$  برابر  $xy$  اوقات  $abct$  ٹھیک ہے تو صرف پچھلی مثال کے ساتھ آگے بڑھنے کے لیے ہمارے پاس کچھ ہے جیسے کو کیسے حل کیا جائے اور  $x$  یہ ٹھیک ہے اب مقصد ہے جیسا کہ ہم نے ابھی کہا ہے یہ معلوم کرنا ہے کہ  $x$  ہے کہ یہ ایک نامعلوم ویکٹر ہے سیاق و سباق واضح ہے کہ ہم یہ  $cons$  اس لیے آہ صرف اشارے کے بارے میں ایک نقطہ ہے جسے ہم استعمال کرنے جا رہے ہیں ایک بار سے الجھن میں نہ ڈالا جائے لہذا مناسب سیاق و  $x$  کو اسکیلر  $x$  کو صرف عام اشارے سے بدلنے جا رہا ہے  $x$  کہنے جا رہے ہیں کہ ہم ہیں۔ کو زیر بار کے  $x$  کا استعمال کرتے ہیں حالانکہ ہم کسی بھی الجھن سے بچنے کے لیے  $x$  سیاق میں ہم ویکٹر کی قدر کو ظاہر کرنے کے لیے ساتھ استعمال کرنے میں محتاط رہنے کی کوشش کریں گے ٹھیک ہے اب ہمارے پاس یہ ایک دو جہتی آہ نظام کی ایک مثال ہے جو کہ دو نامعلوم ہیں اور دو مساوات ہیں آہ صرف مکمل ہونے کی خاطر آئیے ہم مساوات کے تین جہتی نظام کو لکھتے ہیں اور پھر متعلقہ مقداروں کو تین کے ذریعے جمع ایک تین ریڈ برابر  $y$  جمع ایک دو  $x$  بیان کرتے ہیں۔ تین جہتی مثال تین جہتی مثال ٹھیک ہے تو یہاں ہم کہتے ہیں کہ تین مساواتیں ہیں ایک ایک دو اور تیسری  $b$  برابر  $z$  دو تین  $a$  جمع  $y$  دو دو  $a$  ہوسکتی ہے جمع  $x$  ایک ٹھیک ہے یہ مساوات ایک ہے دوسری مساوات ایک دو ایک  $b$  کے ساتھ تین مساوات کی ایک مثال ہے  $xy$  تین ہے لہذا یہ تین نامعلوم  $b$  برابر  $z$  جمع ایک تین تین  $y$  جمع ایک تین دو  $x$  مساوات ایک تین ایک جن میں سے ہر ایک اسکیلرز ہیں۔ ہم اسے عام میٹرکس کی نمائندگی میں کیسے لکھیں گے ہم ان شرائط کو جمع کر سکتے ہیں جیسا کہ ہم  $z$  اور جو  $x$  اور پھر ایک نامعلوم انڈر بار کے ساتھ ویکٹر  $a$  ہم اسے کیپٹل  $a$  نے دو جہتی نظام کے لیے مربع میٹرکس میں کیا ہے جسے ہم کہتے ہیں  $b$  one ہیں اور پھر مساوات کے دائیں جانب ایک اور کالم ویکٹر ہوگا جس میں اندراجات  $z$  اور  $xy$  کہ ایک کالم ویکٹر ہے جس میں نامعلوم اقدار ایک ایک ایک دو ایک تین  $a$  کہنا چاہئے تاکہ ہم کر سکیں اسے میٹرکس کے طور پر لکھیں  $b$  ہوں گے جسے آپ کو کیپٹل  $b$  two  $b$  three تین اسے کیپٹل کے طور پر  $b$  دو  $b$  ایک  $b$  اور پھر ویکٹر  $xyz$  ایک دو ایک دو دو دو تین تین تین ایک تین دو تین تین اور پھر آہ کالم ویکٹر یہاں کے برابر ہے اور یہاں ہمارا  $b$  بار  $x$  ہے لہذا ہمارے پاس جو مساوات ہے وہ ایک بار  $b$  بار ہے اور یہ کیپٹل  $x$  یہ  $a$  ظاہر کیا جا سکتا ہے ظاہر کرنا تھا جب آپ اس کا موازنہ دو جہتی نظام سے کرتے  $ah$  کو تلاش کرنا ہے لہذا تین جہتی نظام کو لکھنے کا مقصد مساوات کا  $x$  مقصد یہاں  $ah$  نامعلوم ہیں لہذا  $n$  مساوات اور  $n$  جہتی نظام کے لیے لکھ سکتے ہیں جس میں  $n$  میں عام طور پر آپ اسے ایک  $g$  ہیں جو کہ  $a$  جہتی مقداروں میں لے سکتے ہیں خاص طور پر  $n$  کو ان کی مناسب  $b$  بار اور  $x$  کے برابر  $3$  کا معاملہ ہے ہم عام طور پر ایک  $n$  صرف مربع  $n$  ایک بذریعہ  $1$  ویکٹر ہوگا لہذا عام طور پر یہ ایک بذریعہ  $b$  ایک بذریعہ  $1$  ویکٹر ہوگا اور  $x$  مربع میٹرکس  $n$  بذریعہ  $n$  ایک  $is$  لکیری نظام کے برابر  $BA$  ہے بذریعہ  $1$  ویکٹر تو یہ مسئلہ ہے مساوات کے  $n$  میٹرکس ہے یہ ایک بذریعہ  $1$  ویکٹر ہے اور اسی طرح یہ ایک محور کو ترتیب دیا گیا ہے کہ ہم حل کیسے تلاش کرتے ہیں ہم ان حالات کو کیسے چیک کرتے ہیں جن کے حل ہیں یا نہیں تو عمومی نظام اب یہاں کے برابر ہے میں اس موقع سے دو اصطلاحات کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں جو اس تناظر میں کثرت سے استعمال ہوتی ہیں آہ وہ ایک دوسرے  $b$  کے مخالف ہیں لہذا شرائط میں سے ایک مستقل ہے لہذا مساوات کے نظام کو مستقل کہا جاتا ہے اگر اس کا حل ہے تو یہ ایک ہوسکتا ہے۔ یا مزید حل اور کہا جاتا ہے کہ اگر کوئی سولو نہ ہو تو یہ متضاد ہے۔ لہذا میں یہ نیچے لکھتا ہوں لیکن یہ وہ اصطلاحات ہیں جن کی وضاحت اس تناظر میں کی گئی ہے کہ مساوات کا ایک نظام ہے اور ان نامعلوم اقدار کی مستقل مزاجی کے لیے مساوات کا ایک نظام حل کرنے کی کوشش کر رہا ہے جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے کہ اگر کوئی حل ہو تو مطابقت رکھتا ہے۔ موجود ہے اور یقیناً ایک حل یا ایک سے زیادہ حل ہو سکتے ہیں اور عدم مطابقت کی یکساں تعریف مساوات کا ایک نظام ہے اگر کوئی حل موجود نہیں ہے تو اسے متضاد کہا جاتا ہے تو آئیے ہم ان کو دوبارہ دیکھتے ہیں تو  $x$  یہ نظام میں مساوات کے نظام کو یہاں کہا جاتا ہے کہ مساوات کے نظام کو ہم آہنگ کہا جاتا ہے اگر کوئی حل موجود ہو جس کا مطلب یہ ہے کہ نہیں ہے جو میٹرکس  $x$  کا ایک حل ہے یا ایک سے زیادہ حل متضاد ہیں اگر کوئی حل موجود نہیں ہے تو مساوات کا نظام متضاد کہا جاتا ہے کوئی اصطلاحات کو مستقل مزاجی اور عدم مطابقت کہنے کا مقصد  $ah$  کی دی گئی اقدار کے لیے ان کو مطمئن کرتا ہے لہذا ان  $b$  اور  $a$  حل کو سنبھالنے یا اس کے بارے میں بات کرنے کے لیے ہم کہیں گے کہ مساوات کا  $ah$  کے  $x$  کے لیے ایک مختصر شکل کا اظہار دینا ہے۔ نظام مستقل ہے یا مساوات کا نظام متضاد ہے اور اس کا مطلب یہ ہوگا کہ آیا اس کا حل ہے یا اس نوڈ پر کوئی حل نہیں ہے ذکر کریں کہ بہت ساری قابل تبادلہ اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں آہ ، مثال کے طور پر اگر مساوات کے نظام میں صرف ایک حل ہے تو ہم کہتے ہیں کہ اس کا

x ایک انوکھا حل ہے منفرد مطلب ایک حل کبھی کبھی وہ غیر معمولی حل کے بارے میں بات کرتے ہیں غیر معمولی معنی کہ حل جو آپ کو ملتا ہے۔  
 صفر کے برابر نہیں ہے لہذا یہ کچھ دوسری اصطلاحات ہیں جو ہمارے مقاصد کے لئے سیاق و سباق میں استعمال ہوتی ہیں ہم اسے آسان رکھتے  
 کے b ہیں اور صرف مستقل مزاجی اور عدم مطابقت کا استعمال کرتے ہیں ٹھیک ہے تو ہم اس کو حل کرنے کے بارے میں کیسے جانیں گے تو  
 برابر کلہاڑی ہم جاننا چاہتے ہیں کیا مستقل مزاجی کی خصوصیات کیا ہے کیا متضاد ہے کیا یہ مستقل متضاد ہے صحیح کو چیک کرنے کا طریقہ یہ  
 ہے جو ہم نے یہ معلوم کرنے کے لئے ترتیب دیا ہے کہ آیا نظام مساوات مطابقت رکھتا ہے یا نہیں اور یہ وہ جگہ ہے جہاں اب ہم تعین کرنے  
 ہے یا نہیں لہذا ہمارا پروگرام  $a$  invertible والوں کے کردار کے بارے میں بات کریں خاص طور پر یہ فیصلہ کرنے میں کہ آیا میٹرکس  
 اس طرح ہے کہ ہم ٹھیک کہیں گے جیسا کہ ہم نے پچھلے لیکچر میں دیکھا ہے کہ میٹرکس واحد یا غیر واحد ہو سکتا ہے اس پر منحصر ہے کہ آیا  
 اس کا تعین کنندہ  $\theta$  ہے یا نہیں اگر یہ غیر واحد ہے یعنی اگر تعین کنندہ  $\theta$  ہے تو یہ الٹا ہے اور اگر یہ الٹا ہے تو ہمارے پاس ایک میٹرکس الٹا ہے  
 جسے ہم الٹا کہتے ہیں جس سے آپ ان مساوات کو ضرب دے سکتے ہیں اور اس صورت میں جب ہم ضرب کرتے ہیں۔ ایک معکوس کی طرف سے  
 بن جائے گا اور اگر ایک الٹا  $b$  بن جائے گی اور دائیں ہاتھ کی طرف ایک الٹا اوقات  $x$  ایک الٹا بار ایک بار  $ah$  بائیں ہاتھ کی طرف کی مساوات  
 کے لئے ایک تیار حل ہے ہم دوسری صورت دیکھتے ہیں جب یہ الٹا  $x$  کو ہم تعریف کے ذریعہ جانتے ہیں تو شناخت ہے تو ہمارے پاس  $a$  اوقات  
 نہیں ہوتا ہے اور پھر دیکھتے ہیں کہ وہاں کیا ہوتا ہے اہ تو آئیے لکھیں جو ہم نے ابھی کہا ہے تو اگر پہلی صورت جسے ہم دیکھیں گے وہ یہ ہے  
 صفر کے برابر نہیں ہے فوری طور پر ایک معکوس  $t$  کا  $a$  غیر واحد ہے اس کا کیا مطلب ہے اس کا مطلب ہے کہ تعین کرنے والا  $a$  کہ  
 موجود ہے ٹھیک ہے تو اگر کوئی معکوس موجود ہے تو آئیے ہم اس مساوات کے دونوں اطراف کو ایک الٹا سے ضرب کریں ہمیں کیا ملے گا کہ ایک  
 ہے تو یہ ایک دو جہتی شناخت ہے  $a$  کے برابر ہے یہ ہم جانتے ہیں کہ شناخت ہے لہذا اگر یہ دو جہتی میٹرکس  $b$  الٹا ایکس بار ایک الٹا اوقات  
 قطاریں اور کالم ہیں اور تمام اخترن  $n$  یہ ایک جہتی شناخت ہے لہذا اس میں  $a$  جو عام طور پر ایک صفر ہے اگر یہ ایک جہتی میٹرکس ہے  
 غیر واحد ہے جو حل ہم حاصل  $a$  ہے لہذا اس صورت میں کہ  $b$  ایک الٹا اوقات  $x$  ہے لہذا یہ ہمیں  $x$  اندراجات ایک ہیں لہذا شناختی اوقات  
 صحیح کے برابر ہے لہذا یہ پہلی صورت ہے جس میں یہ غیر واحد ہے جو تعین کرنے والا غیر صفر ہے تو ہمارے  $b$  ایک الٹا  $x$  کرتے ہیں  
 پاس اس کے لیے ایک تیار حل ہے ٹھیک ہے اب دوسرے معاملے کا کیا ہوگا وہاں ہم پھر سے ان ٹولز کا استعمال کرتے ہیں جو ہم نے میٹرکس الٹا  
 خاص طور پر جو انٹ کی تعریف کرنے میں تیار کیے ہیں۔ میٹرکس تو اس صورت میں تعین کنندہ  $\theta$  ہے تو ہم آسانی سے وہیں کو دیکھ سکتے ہیں۔ ایک  
 $a$  کا ملحق شناخت کے اوقات  $a$  صحیح ہے کیونکہ پہلے ہم اس تعلق کے ساتھ آئے تھے کہ وقت کے دار الحکومت  $\theta$   $a$  اوقات کے ملحقہ پر  
 ہے تو آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے تو دوسری  $\theta$   $a$  کے تعین کنندہ کے برابر ہے اور اگر متعین  $\theta$  ہے تو اس کا مطلب ہے کہ وقت کا ملحقہ  
 کا متصل وقت کی شناخت کا تعین  $a$  کا تعین کرنے والا ہے صفر ہے تو ہم نے دیکھا تھا کہ ایک اوقات  $a$  واحد ہے جو  $a$  صورت یہ ہے کہ اگر  
 کے ملحقہ سے ضرب دے  $a$  کرنے والا ہے جس کی وجہ سے یہ  $\theta$  ہے یہ برابر ہے۔  $\theta$  میٹرکس تک اور اس طرح ہم اسے مساوات کے نظام کو  
 کے جوڑ کے برابر ہے لہذا میں  $b$  بار کا ملحقہ اوقات  $x$  کر استعمال کرتے ہیں لہذا اگر آپ اسے ضرب دیتے ہیں تو ہمیں ملے گا کہ اوقات  
 بار کا دائیں جوڑ ہونا چاہئے تاکہ یہ معنی رکھتا ہے کیونکہ بائیں ہاتھ کی طرف ایکس بار ہے لہذا  $x$  یہاں ایک کھو رہا ہوں۔ یہ ایک اوقات ایک بار  
 کا جوڑ ہے اب یہاں سے ہمیں معلوم ہوا کہ یہ اصطلاح ہے صفر ہے تو بائیں ہاتھ کی طرف  $b$  ہمارے پاس ٹائم ایکس بار کا جوڑ ہے اور پھر ٹائمز  
 کا ملحقہ  $\theta$   $b$  ہے اگر ایک اوقات  $a$  صفر ہے اور پھر ہمارے پاس دائیں وقت کا ایک جوڑ ہے تو اب دو ہیں صورتوں میں ذیلی صورت ایک چھوٹا  
 کے برابر ہے تو ہم کچھ نہیں کہہ سکتے ہیں تو پھر ہم مستقل مزاجی یا عدم مطابقت مستقل مزاجی یا عدم مطابقت کے بارے میں کچھ نہیں کہہ  
 سکتے ہیں لہذا یہ ایک غیر حتمی نتیجہ ہے اس صورت میں کہ  
 $a$  So  
 کا ملحقہ صفر کے برابر نہیں ہے تو ہمیں ایک مسئلہ ہے کیونکہ دائیں ہاتھ کی طرف صفر  $b$  ہے اگر ایک اوقات  $b$  کا ملحقہ یہ صورت دو  
 نہیں ہے بائیں ہاتھ کی طرف  $\theta$  ہے۔ اس صورت میں ہم کہتے ہیں کہ نظام ہے متضاد دائیں تو یہاں اس بارے میں سوالات ہیں کہ یہ کتنی اچھی  
 طرح سے پوز کیا گیا ہے کیونکہ بائیں ہاتھ کی طرف  $\theta$  ہے دائیں ہاتھ کی طرف  $\theta$  نہیں ہے ہم 2 دائیں کو کیسے برابر کر سکتے ہیں تو اس صورت  
 واحد ہے تو زیادہ تر نتیجے پر پہنچ سکتے ہیں مندرجہ ذیل کے ساتھ ہم آپریشن کا طریقہ یہ ہے کہ ہم کہتے ہیں کہ ٹھیک ہے ہم ایک  $a$  میں جب  
 کے ملحقہ سے ضرب کرنے جا رہے ہیں جیسا کہ ہم نے پچھلے کیس میں ایک الٹا کے ساتھ کیا تھا یقیناً پہلے یہ بہت آسان صورتحال تھی کیونکہ  
 ہم جانتے ہیں کہ ایک الٹا موجود ہے اس کا الٹا اوقات ایک شناخت ہے۔ اور  
 اس لیے ہم ایکس کے لیے ایک تیار حل حاصل کر سکتے ہیں یہاں یہ قدرے زیادہ پیچیدہ ہے کیونکہ یہاں ہم نہیں جانتے کہ الٹا کیا ہے درحقیقت ہم  
 جانتے ہیں کہ یہ موجود نہیں ہے

اس لیے ہم وہ نہیں کر سکتے جو ہم نے پہلے کیا تھا تو کیا ہم یہاں یہ کرتے ہیں کہ ہم اس جوڑ سے ضرب کرتے ہیں اور پھر اس صورت میں کہ  
 میٹرکس کرتا ہے اس بات پر منحصر ہے کہ آیا یہ  $\theta$  ہے یا  $\theta$  نہیں تو ہم یہ نتیجہ  $b$  ایک بار کا ملحقہ برابری کے دائیں جانب مستقل میٹرکس کو  
 اخذ کرتے ہیں کہ ہم نے ابھی ٹھیک لکھا ہے لہذا مجموعی طور پر یہ ہے کہ ہم تعین کنندگان کے خیال کو کس طرح استعمال کرتے ہیں اور خاص  
 طور پر مساوات کے ایک خطی نظام میں مستقل مزاجی اور عدم مطابقت کے مسائل کو حل کرنے کے لیے میٹرکس الٹا تعین کرنے میں اس کے  
 کردار کو اب تک ہم نے اس کے بارے میں بات کی ہے۔ فریم میں ہم نے دو جہتی یا تین جہتی مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے حوصلہ افزائی کی ہے  
 $n$  مربع میٹرکس پر غور کرتے ہیں جو کسی بھی مساوات اور  $n$  by  $n$  اور اب ہم نے مسئلہ کو متحرک کیا ہے اور پھر کہا ٹھیک ہے ہم ایک عام  
 نامعلوم کے بارے میں ہے اور پھر ہم ایک جنرل لے کر آئے ہیں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کا طریقہ کہ آیا اس کا کوئی حل ہے یا اس کا کوئی حل  
 نہیں ہے اور اس طرح یہ اس طرح کی تصوراتی تفہیم ہے جسے ہم مساوات کے نظام کو حل کرنے کے معاملے میں دیکھنا چاہتے ہیں، آئیے کچھ  
 مثالیں دیکھیں اور دریافت کرنے کی کوشش کریں۔ یا ان مثالوں کے ذریعے ان مسائل کی تشریح کریں ٹھیک ہے تو پہلی مثال جو میں پیش کرنا چاہتا  
 ہوں وہ کچھ ہے جسے ہم پہلے دیکھ چکے ہیں آئیے اس الجبری رگ میں جاری رکھیں کہ ہمیں کیا نتائج حاصل ہوتے ہیں تو مساوات کا یہ نظام جو ہم  
 کا کردار ادا کرتا ہے یہ  $a$  تھا اور یہ دس صفر کے برابر تھا لہذا یہ  $xy$  مائنس 1 گنا  $ah$  4 1  $a$  نے پہلے لکھا تھا۔ لیکچر میں میٹرکس  
 میٹرکس کا کردار ادا کرتا ہے بالکل ٹھیک ہے لہذا یہ ہیں ان اقدار میں صرف کچھ نمبر ڈالیں تاکہ یہ اندازہ  $b$  بار کا کردار ادا کرتا ہے اور یہ  $x$   
 ، لگایا جا سکے کہ ہم اصل میں اس مسئلے کے بارے میں کس طرح جانتے ہیں  
 اس لیے سب سے پہلا کام جو ہم نے کیا وہ یہ ہے کہ آیا اس کا کوئی حل موجود ہے یا نہیں اور اس کے لیے ہم کیا کریں گے کہ ہم اسے دیکھتے  
 میٹرکس کا تعین کرنے والا نسبتاً آسان ہونا چاہیے، آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا میں اس کا اندازہ  $\theta$  کا تعین کرنے والا یہ ایک دو سے دو ہے۔  $a$  ہیں۔  
 ، لگا سکتا ہوں

اس لیے یہاں ایک کا تعین کنندہ دو ضرب دو میٹرکس کے برابر ہے تو ہم یا تو ایک مائنس ون کر سکتے ہیں تو مائنس ایک مائنس فور مائنس پانچ یا ہم  
 کا استعمال کر سکتے ہیں۔ تعریف جو ایک ہی اظہار کے سوا کچھ نہیں پر ابلتی ہے لہذا ہم 1 مائنس 1 کو ضرب کر رہے ہیں تاکہ مائنس 1 ہو  $um$   
 اس لئے یہ اصطلاح آتی ہے اور پھر یہاں آپ کے پاس مائنس 4 گنا 1 ہے تو مائنس 4 منفی 5 ہے اور ہم بات یہ ہے کہ نوٹ کرنا یہ ہے کہ یہ  $\theta$   
 کے برابر نہیں ہے اور  
 اس لیے یہ پہلا معاملہ ہے جسے ہم لاگو کرتے ہیں اور جو ہمیں بتاتا ہے وہ ٹھیک ہے مساوات کے اس نظام کا درحقیقت ایک حل ہوتا ہے جب ہم حل  
 تلاش کرنے کی کوشش میں الٹا کے استعمال کو تلاش کرتے ہیں دیکھیں کہ ہم حل بھی تشکیل دے سکتے ہیں تو حل تو یہ کہتا ہے کہ اس کا ایک حل  
 صحیح ہے لہذا  $b$  کا حل الٹا اوقات  $x$  اس حل کو کیسے تلاش کیا جائے کہ حل  $um$  ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ اس کے پاس ایک حل ہے

حقیقت کا استعمال کرتے ہوئے یہ تعین کرنے والا صفر نہیں ہے ہم یہ کہہ سکتے ہیں۔ مساوات کا ایک مستقل نظام ہے اس کا حل کیا ہے ہمارے کو ایک جوائنٹ سے بدلنا ہے تو  $a$  مائنس 1 ضرب 5 ہار میٹرکس  $ah$  ہے تو اس صورت میں الٹا الٹا کیا ہے  $b$  ہار ایک معکوس اوقات  $x$  پاس یہ مائنس 1 مائنس 1 مائنس 4 تو مجھے یقین ہے کہ یہ میٹرکس کا الٹا ہے جسے ہم اس مساوات کو اس کے ساتھ ضرب دے کر بھی چیک کر سکتے ہیں اور یہ پتہ چلتا ہے کہ یہ شناخت بالکل ٹھیک لگ رہا ہے لہذا یہ الٹا ہے اور اس طرح حل ہے تو کیا ہے الٹا اوقات یہ مائنس 1 ہائی 5 ہے میں صرف ایک الٹا دوبارہ لکھتا ہوں مائنس 1 مائنس 4 اور پھر 10  $\theta$  تو اس کا مطلب ہے کہ ایکس ہار مائنس 1 ہائی 5 اور مائنس 1 ہے تو یہ مائنس 10 اور مائنس چار مائنس چالیس ہے تو یہ دو اور آٹھ ہے تو یہ صحیح حل ہے تو ہم نے یہاں کیا کیا ہے پہلے ہم نے یہ جانچا کہ آیا اس نظام مساوات کا کوئی حل ہے یا نہیں اور یہ کرتے ہوئے ہم پہلے تعین کرنے والے کا حساب لگاتے ہیں کہ صفر نہیں ہے تو یہ ایک غیر واحد اور پھر ہم کہتے ہیں ٹھیک ہے اگر یہ مطابقت رکھتا ہے تو حل کیا ہے اور یہ  $at$  ions میٹرکس ہے لہذا یہ مساوات کا ایک مستقل نظام ہے۔

ہے اور  $b$  محلول کی تعمیر میں ہے اور پہلے ہم دیکھ چکے ہیں کہ محلول ایک الٹا اوقات سے ضرب لگاتے ہیں اور پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ حل اب ہم یقیناً یہ چیک کر سکتے ہیں کہ آیا دو آٹھ کا یہ حل دو  $b$  اس لیے ہم ایک معکوس کو ہار 2 کوما کے برابر ہے  $2 \times 8$  انفرادی مساواتوں کو پورا کرتا ہے تو آئیے چیک کرتے ہیں کہ آیا ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ آیا مساوات کو پورا کرتا ہے یا نہیں تو کیا مساواتیں ہیں تو اب ان کو لکھتے ہیں۔ ان کی اصل الجبری شکلوں میں نیچے جہاں آپ کے پاس دو نامعلوم کو آٹھ کے برابر رکھتے ہیں تو ہاں ہم دیکھتے ہیں  $y$  کو دو کے برابر اور  $x$  مائنس 5 دائیں تو فرض کریں کہ آپ  $x$  میں دو مساواتیں ہیں لہذا 4 دو ہے چار میں دو ہے آٹھ مائنس آٹھ صفر  $x$  دس کے برابر ہے کیونکہ دو جمع آٹھ ہے فرض کریں آپ اسے یہاں ڈالتے ہیں تو  $y$  جمع  $x$  کہ ہے لہذا یہ حل اصل مساوات کو درست کرتا ہے لہذا یہ صرف ایک سنجیدگی سے جانچ پڑتال ہے اگر آپ چاہیں گے کہ ہم کچھ کے لئے ایک نئی آہ لے کر آئے ہیں ہمیں فن کا راستہ حل نکالتے ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ اگر آپ کو حل مل جاتا ہے تو براہ راست متبادل تکنیک کے ذریعہ ہم جانچ کر سکتے ہیں یا یہ جانچنے کا ایک طریقہ نکال سکتے ہیں کہ آیا حل مساوات کو پورا کرتا ہے اور ہاں ہم نے پایا کہ حل ان مساواتوں کا صحیح حل ہے۔ ٹھیک ہے اب تک ہم نے اس مسئلے کو الجبری طور پر دیکھا ہے خاص طور پر کیونکہ یہ ایک دو جہتی مثال ہے اور اس مسئلے کے ہندسی پہلو کو تصور کرنا آسان ہے ہم اس آہ کو خاص طور پر دیکھنے جا رہے ہیں جس سے ہم ان نتائج کی تشریح کرنے جا رہے ہیں۔ ایک ہندسی نقطہ نظر اور صرف مساوات کے نظام کی مستقل مزاجی یا عدم مطابقت کے اس مسئلے کی ایک ہندسی تہ کو سمجھنے کے لیے ایک متبادل سمجھنے کے لیے ہم دس کے برابر اور  $y$  جمع  $x$  ایک ہی مثال کو دیکھتے ہیں لیکن ہندسی نقطہ نظر سے اس مثال کی جیومیٹری تو یہ دو ہیں۔ آہ مساوات تو یہ تھیں دو مساوات کو ہندسی نقطہ نظر سے دیکھیں یہ لائنیں ہیں یہ مساواتیں ہیں ایک کوارڈینیٹ فریم میں  $e$  برابر صفر کے اب اس  $y$  مائنس  $x$  چار جمع  $x$  محور ہے  $y$  محور ہے یہ  $x$  لائنوں کی تو میں لکھتا ہوں کہ اسے نیچے کھینچتا ہوں تو یہ ایک کوارڈینیٹ فریم ہے چلو کہتے ہیں کہ یہ برابر 10 اس طرح کی ایک لائن ہے جس کے یہاں پوائنٹس ہیں 10  $\theta$  اور 10  $\theta$ ۔ یہ ایک کھردرا خاکہ ہے لیکن یہاں خیال یہ ہے کہ ان لائنوں  $y$  مائنس  $x$  برابر صفر کے برابر ایک لائن اس طرح ہے تو یہ 4  $y$  مائنس  $x$  کی عمومی شکل کو درست طریقے سے حاصل کیا جائے چار کے برابر ہے اور ہم کیا کرنے کی کوشش کر رہے ہیں جب ہم اس کا حل تلاش کرنے کی کوشش کر رہے 10  $y$  جمع  $x$  برابر ہے  $\theta$  اور یہ ہے اقدار کا ایک سیٹ تلاش کرنے کی کوشش کر رہے ہیں جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کرے گا لہذا ہندسی نقطہ نظر  $y$  چھوٹے  $x$  میں ہم چھوٹے سے کیا ہے ہم یہ دیکھنے کی کوشش کر رہے ہیں کہ آیا یہ دونوں لکیریں ایک نقطہ پر آپس میں ملتی ہیں یا نہیں ایسا کیوں ہے کیونکہ اگر وہ ایک نقطہ پر آپس میں ملتے ہیں تو وہ نقطہ دونوں لائنوں کی مساوات کو پورا کرے گا لہذا اس نقطہ کو اس مساوات اور اس دونوں کو بھی پورا کرنا چاہیے۔ مساوات اور مثال کے پچھلے تجزیہ کی بنیاد پر ہم کہتے ہیں کہ یہ پوائنٹ ٹو کوما ہے۔ آٹھ اور ہم نے دیکھا ہے کہ یہ اس لائن اور اس لائن دونوں پر واقع ہے لہذا انقطاع کا نقطہ دونوں لائنوں کی مساوات کو پورا کرتا ہے اور یہی وہ حل ہے جسے ہم صحیح تلاش کر رہے ہیں لہذا یہ مساوات کا ایک مستقل نظام ہے ام چلو اس خیال کو جاری رکھتے ہوئے دیکھیں کہ ٹھیک ہے ہم ہندسی طور پر ان دو لائنوں کو اس طرح تصور کر سکتے ہیں کہ کن صورتوں میں دو لائنوں کا کوئی حل نہیں ہوگا اس معنی میں کہ کن دو لائنوں میں ایک دوسرے کے تقاطع کا کوئی نقطہ نہیں ہوگا ایک امکان یہ ہے کہ اگر دو لائنیں ایک دوسرے کے متوازی پھر تعریف کے لحاظ سے وہ ایک دوسرے کو کاٹتے نہیں ہیں اور اس لیے یہ ایسی صورت حال ہو سکتی ہے جہاں حل متضاد ہو جائے گا یعنی مساوات کے نظام کا کوئی حل نہیں ہو گا اور اسے متضاد کا لیبیل لگا دیا جائے گا تو آئیے دیکھتے ہیں اس مثال کی بنیاد پر کیا ہم مساوات کے ایک ایسے نظام کے ساتھ آ سکتے ہیں جس کا کوئی حل نہیں ہے تو فرض میں دوبارہ دیکھیں لین دو لائنیں تو اس کی  $p$  کریں کہ ہمارے ذہن میں ہے کہ ہم ایک متضاد نظام بنانے جا رہے ہیں تو فرض کریں کہ ہم مرحلہ ہے اور  $y$  ہے یہ  $x$  کے برابر ہے بیس یہ  $y$  جمع  $x$  دس کے برابر فرض کریں ہمارے پاس ایک اور سسٹم ہے جو  $y$  جمع  $x$  اصل ہے بیس کے برابر اور ہم کوشش  $y$  جمع  $x$  مساوی دس  $y$  جمع  $x$  واضح طور پر یہ دو متوازی لائنیں ہیں تو اگر ہم ان مساوات کو لکھیں جیسے کرتے ہیں کہ ان دونوں مساواتوں کا میٹرکس ورژن سامنے لائیں اور اپنے پچھلے طریقے سے چیک کریں کہ آیا اس کا کوئی حل نکلے گا یا جیومیٹری کی ہماری سمجھ پر مبنی ہے کیونکہ یہ متوازی لکیریں ہیں وہاں چورابا کا کوئی نقطہ نہیں ہونا چاہئے اور اس لئے کوئی حل نہیں ہونا چاہئے لیکن آئیے صرف اس خیال کو چیک کریں کہ ٹھیک ہے ہم جانتے ہیں کہ کیا ہو رہا ہے لیکن آئیے ہم قائم شدہ طریقہ کار کو چیک کریں جس پر اور 10  $xy$  کی ہم یہ دیکھنے کی کوشش کر رہے ہیں کہ آیا وہاں بہت زیادہ ہے تو آپ کیا کریں گے کہ ہم کہتے ہیں ٹھیک ہے یہ 1 1 1 1 کے لحاظ سے پہلے کی طرح حل نہیں بنا سکتے  $bum$  کا ٹھیک تعین 1 منفی 1 ہے تو یعنی  $\theta$ ۔ تو واضح طور پر ہم ایک الٹا اوقات  $a$  طرح ہے جوائنٹ کا جوڑ ایک کی جگہ  $aa$  کے  $a$  کے اس جوڑ کو دیکھتے ہیں کہ  $a$  جیسا کہ آپ دیکھ رہے ہیں آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے جب ہم کا جوائنٹ ہے کیونکہ ایک کا کوئی ایک ہے تو آئیے ہم یہاں ڈالتے ہیں اس کا کوئی مائنس ون ہے  $a$  لے رہا ہے۔ ایک مائنس ون مائنس ون تو یہ اور اسے یہاں یقیناً وہی اندراج رکھا گیا ہے تو یہ ایک ہم اینگ میٹرکس ہے لیکن عام طور پر ایسا ہونے کی ضرورت نہیں ہے پھر ہم چیک کریں گے کہ آیا ملحقہ کیا ہے یہ 1 مائنس 1 مائنس 1 ضرب 10  $\theta$  ہے  $b$  ہے تو ایک دفعہ  $b$  کے جوڑ کی قدر کیا ہے تو اس صورت میں یہ  $d$  کہ آیا اور یہ ہے 10 مائنس 20 ہونے جا رہا ہے تو مائنس 10 اور پھر جمع 10۔ لہذا ہمارے پاس ایک ایسی صورت حال ہے جہاں مساوات کا دائیں ہاتھ کی کے برابر ایک ہار ایکس ہار کے ملحقہ کو ضرب کر کے حاصل کیا ہے وہ غیر صفر ہے لیکن دائیں بائیں  $b$  طرف جو ہم نے دائیں ہاتھ کی طرف ایک ایسی صورت حال  $is$  کا جوڑ صفر ہے لہذا ہم جانتے ہیں کہ ہم یہاں براہ راست چیک کر سکتے ہیں کہ صفر ہے۔  $a$  طرف کیونکہ ایک دفعہ کے ساتھ آئے گا جہاں  $\theta$  کسی چیز کے برابر ہے جو  $\theta$  نہیں ہے لہذا اس کا کوئی مطلب نہیں ہے اور اسی وجہ سے ہم نے اسے متضاد کا لیبیل لگایا اور ہندسی نقطہ نظر سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دو متوازی لائنیں ہیں لہذا وہاں ہونا چاہئے۔ کوئی حل نہیں ہے اور یہ بھی مساوات کے ایک مستقل نظام کے ہمارے خیال کے مطابق ہے لہذا یہاں اس مشق کا مقصد خالص الجبری میٹرکس نقطہ نظر سے ٹھیک کہنا تھا شاید یہ اتنا واضح نہیں ہے کہ ایسا کیوں ہے کہ ہم یہاں ان کو متضاد کے طور پر لیبیل کرتے ہیں ہم اسے ہندسی طور پر دیکھ سکتے ہیں اور کہہ سکتے ہیں کہ ٹھیک ہے متوازی لکیریں کوئی پوائنٹ آف انٹرسیکشن کوئی حل نہیں ہے لہذا تعریف کی تعریف کے مطابق وہ متضاد ہیں ٹھیک ہے تو یہاں ایک مثال ہے کہ خیال میں یاد رکھیں کسی چیز کو مستقل کے طور پر بیان کرتے ہوئے ہمیں یہ کہنا پڑا کہ ایک حل ہو سکتا  $ah$  جہاں کوئی حل نہیں ہے اب ہے یا ایک سے زیادہ حل ام اور ہم نے ایک مثال دیکھی ہے جہاں آہ ایک حل ہے آہ کیا ہم ایسی مثال کے بارے میں سوچ سکتے ہیں جہاں ایک سے زیادہ محلول ہو سکتے ہیں اُن اور خاص طور پر لامحدود حلوں میں ام اچھی طرح سے اس ہندسی خیال کی طرف واپس جا رہے ہیں کہ یہ ایک ہوائی جہاز میں لائنیں ہیں آئیے اس پر غور کریں کہ جب دو لائنیں ایک ہی مساوات کو بیان کرتی ہیں تو کیا ہوتا ہے اگر آپ کے پاس دو لائنیں ہیں تو آپ معذرت خواہ ہوں اگر میں کہوں کہ مجھے یہ کہنا چاہیے تھا اگر دو مساوات ایک ہی لائن کو بیان کرتی ہیں  $i$  ایک ہی مساوات کو بیان کرتے ہیں یا



کہ ٹھیک ہے کیا یہ سیدھا سیدھا مقام ہو گا جس طرح کی صورت حال ہے یا لکیریں متوازی ہو جاتی ہیں اس لیکچر کا خلاصہ بیان کرنے کے لیے اس لیکچر کا مقصد یہ تھا کہ مساوات کے نظام کے خطوطی نظام کو حل کرنے میں تعین کنندگان کے کردار کی چھان بین کرنا اور ہم نے ایسا ہی کیا ایک عام صورت میں ہم نے دیکھا کہ نظام کی تعمیر کس طرح سے ہو سکتی ہے۔ سادہ دو ہم دو یا تین ہم تین مثالیں اور پھر ہم نے الفاظ کی مستقل کے بارے میں پچھلا  $ma$  مزاحی کی وضاحت کی اور پھر دیکھا کہ ہم نے انورسز میٹرکس باب میں جو کچھ سیکھا ہے اسے استعمال کرتے ہوئے خاص طور پر اس خیال کو استعمال کیا جا سکتا ہے کہ تعین کنندہ اس بات کا تعین کرتا ہے کہ آیا یہ  $trix\ inverses$  لیکچر کس طرح ہے۔ ایک واحد میٹرکس ہے یا نہیں کیونکہ اس سے آپ کو اندازہ ہو سکتا ہے کہ آیا الٹا موجود ہے یا نہیں اور پھر اس کا استعمال حل بنانے یا اس بارے میں کچھ کہنے کے لیے کیا جا سکتا ہے کہ آیا حل نہیں بنایا جا سکتا لہذا یہ ایک بار پھر مساوات کے لکیری نظام کو حل کرنے میں تعین کنندگان کی اہمیت کو واضح کرتا ہے لہذا میں اسے خلاصہ بیان کے طور پر لکھتا ہوں تاکہ اس لیکچر نے مساوات کے لکیری نظام کو حل کرنے میں تعین کنندگان کے رول پر روشنی ڈالی ٹھیک ہے لہذا اس کے ساتھ میں شکریہ ادا کرتا ہوں۔ آپ کی توجہ کے لیے اور مجھے امید ہے کہ جن تصورات اور مسائل پر ہم نے یہاں بات کی ہے وہ تعین کنندگان کے بارے میں آپ کے خیال کو سمجھنے میں کارآمد ہوں گے آپ کا شکریہ

Prutor@mitk