تعین کرنے والوں کے خواص پر اس لیکچر میں خوش آمدید، لہذا تعین کرنے والوں پر اس آہ سیریز کا یہ دوسرا لیکچر ہے، اس سے قبل ہم نے تعین کنندگان کی تعریف اور کچھ ایسے شعبوں کے بارے میں بات کی تھی، جن میں سے کچھ ایسے واقعات سامنے آتے ہیں جہاں پر ہم آگے آئیں گے۔ تعین کرنے والوں کی خصوصیات کی خصوصیات کے بارے میں بات کرنے جا رہا ہوں لہذا تعین کنندگان کی خصوصیات کو شمار کرنے کی کوشش کرنے کے پیچھے خیال بالکل اسی طرح ہے جیسا کہ کسی اور خاصیت کے ساتھ جو ہم نے دیکھا ہوگا مثال کے طور پر ضرب کی تقسیمی خاصیت ah کو شامل کرنا ہے۔ ٹھیک کہنے کی کوشش کرکے تعریف سے جو ہم پہلے ہی جانتے ہیں کیا ہم کچھ مقداروں کی گنتی کو آسان بنا سکتے ہیں لہذا ہم جو کرنا چاہتے ہیں وہ یہ کہنا ہے کہ ٹھیک ہے ہم ایک تعین کنندہ کی تعریف جانتے ہیں لیکن کیا ہم کچھ خصوصیات لے کر آسکتے ہیں جو آسان بنائیں یا بنائیں وہ عمل زیادہ موثر ہے جس کے ذریعے ہم ان تعین کنندگان کا حساب لگاتے ہیں مثال کے طور پر اگر آپ تقسیمی جائیداد لیا جاتا ہے حالانکہ یہ وہ چیز ہے جو ضرب اور a times c جمع a times b کچھ نہیں ہے بلکہ رقم کو انفرادی طور پر c جمع b اور پھر آپ کہتے ہیں کہ ٹھیک ہے c اور ab کے بارے میں سوچتے ہیں کہ آپ کے پاس تین ہیں اسکیلرز a times b جمع c sum b اضافے کی تعریفوں سے ملتی ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں اور ہم اسے جلد ہی لکھیں گے کہ خیال یہ ہے کہ ایک طرح سے کوئی ایک ہی مقدار کو زیادہ موثر طریقے سے گننے کے قابل ہے

b جس کو ہم اسکیلرز کہتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ ایک دفعہ abc تو میرا مطلب یہ ہے کہ مندرجہ ذیل خیال ہے لہذا تین نمبروں پر غور کریں۔ c جمع ایک دفعہ b برابر ہے ایک دفعہ c جمع

تو یہ دونوں برابر ہیں لہذا اصولی طور پر کسی بھی تین نمبر کو دیا جائے یا

تو ہم اسے استعمال کر کے حساب کر سکتے ہیں یا ہم اسے استعمال کر کے حساب کر سکتے ہیں لیکن دونوں عملوں میں کارکردگی میں تھوڑا سا فرق ہے اس لیے مثال کے طور پر اگر ہم اس طریقے سے حساب کریں

mul تو ہمارے پاس ایک ضرب ہے جو ہمیں کرنا ہے اور ہمارے پاس ایک اضافہ ہے جو ہمیں کرنا ہے جبکہ اس طرف ہمیں دو کرنا ہیں۔ ٹپلیکیشنز اور ایک اضافہ اس لیے اگرچہ یہ ایک ہی مقدار ہیں ہمیں کوشش کی مختلف مقدار کا اطلاق کرنا ہے اسی مقدار میں لیکن مختلف کوششیں تاکہ ڈیٹرمینٹ کی تعریف کا استعمال کرتے ہوئے تعین کنندگان کی ان خصوصیات کو دیکھ کر ہم بہرحال حساب کر سکتے ہیں۔ ڈیٹرمینٹ لیکن ڈیٹرمیننٹس کی تعریف میں کچھ خصوصیات کا فائدہ اٹھا کر ہم کچھ آسان بنانے والے اصولوں کے ساتھ آ سکتے ہیں جو یقیناً نہ صرف اس وقت کارآمد ہوتے ہیں جب ہم ڈیٹرمینٹس کی گنتی کرنے کی کوشش کرتے ہیں بلکہ اس وقت بھی جب ہم کمپیوٹر کو کچھ خاص تعین کرنے والوں کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں۔ مربع میٹرکس کا سائز جس کے لیے ہم تعین کنندہ کا حساب لگانے میں دلچسپی رکھتے ہیں وہ بڑا ہو جاتا ہے اس لیے تعین کنندگان کو دیکھ کر شروع کریں گے اور استعمال کرکے خواص کی تصدیق um کی خصوصیات کو دیکھنے کا بنیادی خیال یہی ہے لہذا ہم خصوصیات اور اسی طرح ٹھیک کیوں ah سے یہ خیال حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ کچھ خاصیتیں ah کرنے کی کوشش کریں گے۔ کچھ مثالیں ہوتی ہیں۔ تعین کنندگان کی خصوصیات اس لیے ہم شروع کریں گے کچھ سادہ ڈیٹرمیننٹس کی قدروں کو نوٹ کر کے کچھ سادہ میٹرکس کے تعین کنندگان کی قدروں کا خیال یہ ہوگا کہ ٹھیک ہے اگر آپ کچھ میٹرکس یا مخصوص قسم کے میٹرکس کی شناخت کر سکتے ہیں جن میں نسبتاً آسان تعین کن حسابات ہیں

تو ہم کیا کر سکتے ہیں زیادہ نسبتاً پیچیدہ میٹرکس کے تعین کنندہ کا حساب لگانے کے لیے یہ ہے کہ ان خصوصیات کا استعمال کرتے ہوئے اسے فارم میں قریب لانے کی کوشش کی جائے تاکہ پہلی خاصیت یا پہلا نسبتاً آسان تعین کنندہ جسے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ صرف تعریف سے براہ راست آرہا ہے اور وہ ہے اگر آپ کے پاس ایک مربع میٹرکس ہے جس میں صفر کی پوری قطار ہے ٹھیک ہے

تو اس میٹرکس کا تعین کرنے والا کیا ہوگا یہ 0 کے علاوہ کچھ نہیں ہوگا کیوں کہ صرف تعریف سے اگر آپ اس قطار کے ساتھ پھیلتے ہیں جس میں 0 اندراجات ہیں اس کا مجموعہ قطار کے اندراج کی مصنوعات اور اس کے متعلقہ کوفیکٹر ان میں سے ہر ایک 0 ہوگا اور اس طرح مجموعی تعین چیونٹی صفر ہوگی لہذا پہلی خاصیت جسے ہم لکھ سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر ایک متعین کی پوری قطار صفر ہے

تو ٹھیک ہے

تو معاف کیجئے گا اگر مربع میٹرکس کی پوری قطار صفر ہے

تو اس کے تعین کنندہ کی قدر بھی صفر ہے۔

تو یہ جو ہم کہنے کی کوشش کر رہے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر ایک مربع میٹرکس کی پوری قطار صفر ہے

تو تعین کنندہ کی قدر بھی صفر ہے اب آہ جیسا کہ ہم نے ڈیٹرمیننٹ کی تعریف میں دیکھا تھا یہ صرف یہ نہیں ہے کہ ہم کر سکتے ہیں۔ مربع میٹرکس کو قطار کے ساتھ بڑھا دیا ہے لیکن ہم اسے کالم کے ساتھ بھی کر سکتے ہیں اور مکمل طور پر اس خاصیت کو پڑھنا چاہیے اگر مربع میٹرکس کی پوری قطار یا کالم 0 ہے

تو تعین کنندہ کی قدر 0 ہے۔ وہ اضافہ یہاں کریں

تو میں کہتا ہوں کہ اگر مربع میٹرکس کی پوری قطار یا کالم صفر ہے اور قطار اور کالم کے درمیان اس طرح کی تبدیلی ایسی چیز ہے جسے ہم دوسری خصوصیات میں بھی دیکھیں گے

تو یہ نوٹ کرنا اچھا ہے۔ اس کا یہاں اور اب آئیے ہم صرف ایک دو بائی دو میٹرکس کو دیکھتے ہیں کہ یہ کیسے کام کرتا ہے لہذا اگر ہم جس مثال پر غور کرتے ہیں وہ ایک دو بائی دو میٹرکس ہے جس میں دو صفر اندراجات سی ڈی ہیں

تو یا

um تو ہم کی تعریف یا فارمولہ کا استعمال کرتے ہوئے فیصلہ کن کو لیتے ہیں۔ جان لیں کہ یہ اندراج کا یہ وقت ہے اس اندراج کو مائنس کسی بھی طرح سے ہم یہ حاصل کر سکتے ہیں کہ اگر ہم اس قطار کو پھیلاتے ہیں

تو یہ 0 گنا کچھ اور 0 گنا کچھ اور ہے اور کیونکہ ان میں سے ہر ایک 0 ہے جو صفر ہے اور کوئی ایسا کرنے کا تصور کر سکتا ہے۔ یہ ایک عام مربع میٹرکس کے لیے صرف ایک قطار کے ساتھ پھیلائیں یا کالم کے ساتھ پھیلائیں اگر یہ مکمل طور پر صفر ہے n بائی n

تو تعین کنندہ کی قدر صفر ہو جائے گی ٹھیک ہے لہذا یہ ایک سادہ خاصیت ہے لیکن کچھ ایسی چیز ہے جسے بنانا اچھا ہے۔ ایک نوٹ ٹھیک ہے لہذا اگلی پراپرٹی جس کے بارے میں ہم بات کرنا چاہتے ہیں پراپرٹی دو کا بھی ایک ہی ذائقہ ہے اور یہاں خیال یہ ہے کہ اگر آپ کے پاس ایک اخترن میٹرکس ہے

تو یاد رکھیں کہ اخترن میٹرکس ایک میٹرکس ہے جس کے صرف اس کے ساتھ عناصر ہوتے ہیں۔ اخترن اور بقیہ اندراجات صفر ہیں لہذا اگر ہم ایک اخترن میٹرکس کو دیکھیں

تو اس کا تعین کنندہ کچھ نہیں بلکہ اختراعی اندراجات کی پیداوار ہے لہذا ایک اخترن میٹرکس اخترن میٹرکس کے لیے عامل اختراعی اندراجات کی پیداوار ہے اور ایسا کیوں ہے؟ ایک بار پھر یہ براہ راست اس تعریف کی پیروی کرتا ہے کہ اگر آپ اب کسی قطار یا کالم ah کے ساتھ توسیع کرنے کی کوشش کرتے ہیں

تو آپ کے پاس کیا رہ جائے گا کیونکہ صرف ایک اندراج ہے جو غیر صفر ہوگی لہذا یہ واحد اصطلاح ہوگی جس سے آپ کو ضرب ملے گی۔ اس کے کوفیکٹر کے ذریعہ جو ہمیشہ ایک اخترن میٹرکس کی ساخت سے ملتا جلتا ایک ڈھانچہ ہوتا ہے

تو آئیے اس کا اندازہ لگانے کے لئے صرف تین بائی تین میٹرکس کی مثال پر ایک نظر ڈالیں تاکہ اس مثال کو ہم 3 بذریعہ دیکھیں۔ 3 میٹرکس یہ ہے

تو یہ ایک اختررن میٹرکس ہے اس لیے آف اختررن شرائط صفر ہیں ایک دو دو تین تین تین ٹھیک ہے اب اگر یہ میٹرکس ہے اور ہم اس کا تعین کرنا چاہتے ہیں
کہ اگر آپ کے پاس میٹرکس a 1 ہے
تو ہم کسی بھی قطار یا کالم کے ساتھ
توسیع کر سکتے ہیں
تو آئیے مثال کے طور پر اس قطار کو پھیلاتے ہیں
تو یہ اس اندراج کے 1 1 گنا اس کے کوفیکٹر کے برابر ہو جائے گا لہذا کوفیکٹر اس پوری قطار کو اس کالم کو حذف کر کے تعریف سے یاد رکھا رہ گیا ہے یہ کوفیکٹر ہوگا کیونکہ اس 1 1 کا انڈیکس ایسا ہے کہ مائنس 1 پاور ah a 2 2 0 0 a 3 3 جائے گا۔ اور پھر جو ہمارے پاس جمع 1 جو کہ 1 کے علاوہ کچھ نہیں ہے اور پھر دوسری اصطلاحات ہم نہیں کرتے اس کے بارے میں فکر کرنے کی ضرورت ہے کیونکہ وہ 1 ہیں اب اس اصطلاح کا کیا ہوگا یا sہیں کیونکہ یہ اصطلاحات 0s 0
تو براہ راست تعریف سے یا دو بہ دو میٹرکس کے تعین کنندہ کو جان کر ہم اسے صرف ایک ایک بار دو دو بار کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ ایک تین تین
تو وہاں ہمارے پاس یہ ہے کہ اختررن میٹرکس کا تعین کنندہ عناصر کی پیداوار کے سوا کچھ نہیں ہے اور جو ہم نے واضح کیا ہے وہ عام طور پر 2 ایک کے پاس اسی قسم c ہم n کی طرف سے n بائی 2 یا اس سے زیادہ کے لیے عام طور پر کسی بھی دوسری قسم کی ترتیب کے لیے ہے
کی خاصیت ہے کہ اگر آپ ایک اختررن میٹرکس کو دیکھتے ہیں
تو اس کا تعین ہوتا ہے اگر آپ اس کا حساب لگانا چاہتے ہیں
تو یہ بہت آسان ہے آپ کو صرف ترچھی اصطلاحات کو دیکھنا ہوگا ان کی پیداوار بنائیں اور یہ ایک تعین کنندہ ہے اور اسے دکھانا ہے۔ عام طور پر ہم اس طرح کی آہ کو قطار یا کالم کے ساتھ پھیلاتے ہوئے بھی کر سکتے ہیں اور دوبارہ پچھلی پراپرٹی کی طرح یہ جاننا اچھا ہے کیونکہ اگر آپ کے پاس کوئی ڈیٹرمیننٹ ہے جس کی شکل اختررن میٹرکس جیسی ہے
تو ہم جانتے ہیں کہ یہ فیصلہ کن کا اندازہ کرنے کے لیے ایک آسان طریقہ اختیار کرنے جا رہا ہے نہ کہ صرف ایک اختررن میٹرکس کے لیے اور درحقیقت یہ پراپرٹی تھری کا موضوع ہے جو کہ اگر آپ کے پاس کوئی تکونی میٹرکس ہے
تو ایک مثلث میٹرکس ایسی چیز ہے جس کے عناصر صرف ایک پر ہوتے ہیں۔ اختررن کا رخ یا
تو اوپری تکونی یا نچلا مثلث ہے لیکن ان صور
توں میں بھی اور تقریباً اسی طریقہ کار کو استعمال کرکے ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ مثلث میٹرکس کا تعین کنندہ بھی مصنوع ہوگا۔ اختررن اندراجات کی
تو مجھے یہ لکھنے دو میں اس خاصیت کو لکھتا ہوں
تو خاصیت تین یہ ہے کہ ایک مثلث میٹرکس کے لیے تعین کنندہ ترچھی اندراجات کی پیداوار ہے مثال کے طور پر آئیے ہم ایک سادہ دو بہ دو مثال پر غور کریں صرف ایک میٹرکس جس میں abc ہے اور یہاں ایک 0 ہے
تو یہ اوپری مثلث میٹرکس دائیں کی شکل میں ہے اور اس کا تعین کنندہ کیا ہے
ہے جو صرف اختررن اندراجات کی پیداوار ہے جو ہم کر سکتے ہیں ایک مثال کے c قسم ca تو اس کا تعین کرنے والا کچھ نہیں بلکہ ایک دفعہ طور پر تین بائے تین یا ایک جنرل این کو بھی دیکھیں لیکن خیال یہ ہے کہ اگر آپ کے پاس جنرل میٹرکس ہے
تو ہمیں اس خاص معاملے میں تین بائے تین کا کہنا ہے
ہے اور اس صورت میں آئیے تین کو دیکھیں۔ تین نچلے مثلث میٹرکس کے ذریعے اس لیے ان صور abc تو اگر آپ کے پاس
توں میں ہمارے پاس صفر ہیں اور پھر اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ یہاں کیا ہے یہ کچھ بھی درست ہو سکتا ہے لہذا یہ نچلا مثلث میٹرکس ہے اگر آپ تعین کنندہ کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں اس میٹرکس کے پہلے جیسا کہ ہم اس قطار کے ساتھ پھیل سکتے ہیں کیونکہ یہ دونوں اندراجات صفر صفر آہ ڈاٹ سی ہوگا لہذا یہ ڈاٹ ظاہر کرتا ہے کہ یہ کچھ بھی ہوسکتا ہے ہمیں b ہیں اس لیے یہ ایک بار اس کا کوفیکٹر ہوگا لہذا کوفیکٹر میں فکر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ ان دو اصطلاحات کے بارے میں کیونکہ یہ صفر ہیں اور اس ڈیٹرمیننٹ کو پھیلاتے ہوئے ہم جانتے ہیں کہ یہ دوبارہ abc ہے
میٹرکس کے تعین کنندہ کا ah تو یہ ایک بار پھر اختررن اندراجات کے ترچھے اندراجات کی پیداوار ہے لہذا یہ ایک بار پھر اشارہ کر رہا ہے کہ حساب کیسے لگایا جائے ڈیٹرمیننٹ کا حساب لگانا آسان ہے آہ نسبتاً بولیں
تو اگر آپ کے پاس ایک مثلث میٹرکس یا ایک اختررن میٹرکس یا میٹرکس ہے جس میں صفر کی ایک پوری قطار یا کالم ہے
تو اس کے تعین کنندہ کا حساب لگانا نسبتاً آسان ہے لہذا تین خصوصیات کے اس سیٹ میں کیا ہوگا ہم نے ابھی دیکھا ہے یا ابھی نوٹ کیا ہے کہ کیا آہ بڑے پیمانے پر آسانی سے قابل حساب تعین کرنے والے ہیں بالکل ٹھیک ہے
کی نشاندہی کرنے کے لیے پراپرٹیز کے اگلے سیٹ پر جائیں گے۔ یہاں ہم اس بات پر بھی بحث کرنے کی کوشش کر o تو اس کے بعد ہم صرف سکتے ہیں کہ یہ خصوصیات کچھ ہندسی تصورات یا الجبری نظریات سے کیسے متعلق ہیں جن پر ہم نے بحث کی جب ہم نے تعین کنندہ کا ذکر کیا میٹرکس یا مربع میٹرکس کے بارے میں سوچتے ہیں جس کی ایک پوری قطار ہوتی ہے۔ صفر کا صحیح ہے ah تھا مثال کے طور پر اگر آپ ایک
تو اگر آپ ہمیں دو بہ دو میٹرکس کہتے ہیں کیونکہ یہ وہ جہت ہے جس میں ہم نے تعین کرنے والے کی جیومیٹری کے بارے میں بات کی ہے اور ایک قطار صفر ہے
محور اس لیے بنیادی طور پر کوئی رقبہ نہیں ہے اور اس سے یہ y تو اس کا کیا مطلب ہے کہ میٹرکس کے دو کالم اس کے ساتھ منسلک ہیں سمجھ میں آتا ہے کہ تعین کنندہ 0 ہے کیونکہ م
توازی علامت سے منسلک کوئی رقبہ نہیں ہے اس لیے میں اس خیال کو مختصراً بیان کرتا ہوں
تو یہ ایک چھوٹا سا نوٹ ہے اور وہ یہ ہے کہ اگر آپ کے پاس 2 بذریعہ صفر کے طور پر ایک قطار کے ساتھ 2 میٹرکس اور اس طرح یہ کچھ بھی کا کہنا ہے اور پھر اگر آپ اسے جیومیٹریکل طور پر خاکہ بنانے کی کوشش کریں جیسا کہ ہم نے پچھلے لیکچر میں b اور a ہو سکتا ہے ہمیں محور ہے اگر آپ ان کے بارے میں سوچتے ہیں کہ کالم ویکٹر کالم ویکٹر ہیں y محور ہے اور یہ x کیا تھا یہ
تو ایک 0 a ہے
تو شاید یہ 0 a اور شاید دوسرا صفر b ہے
تو یہاں پر م
توازی علامت کیا ہے کوئی م
توازی علامت نہیں ہے کیونکہ یہ دونوں ویکٹر حقیقت میں م
ہیں اس لیے کالموں کے کالم ویکٹرز سے منسلک رقبہ 0 ہے اور یہ خود تعین کنندہ کے 0 ہونے کے ساتھ مطابقت رکھتا collinear توازی ہیں صفر ہے آپ دوبارہ اس کا براہ راست حساب لگا سکتے ہیں یا آپ صرف اس پراپرٹی سے نوٹ کر determinant ہے۔ اب حقیقت یہ ہے کہ

سکتے ہیں جو آپ کو ٹھیک ہے ایک میٹرکس صفر سے بھرا ہوا ہے اور اس لیے تعین کنندہ صفر ہے لہذا صرف یہ چھوٹا سا نوٹ بنانے کا بنیادی
خیال یہ ہے کہ اس پراپرٹی کے لیے جس پر ہم نے ابھی بحث کی ہے یا ان کے لیے جن پر ہم کچھ معاملات کے لیے بحث کر سکتے ہیں یہ مددگار
ہو سکتا ہے صرف ایک جیومیٹریکل تصویر ذہن میں ہے کیونکہ یہ ہماری سمجھ میں صرف ایک پرت کا اضافہ کرتا ہے ٹھیک ہے ٹھیک ہے لہذا اب
اگلا ہم اگلی پراپرٹی میں جانا چاہتے ہیں لہذا پراپرٹی چار ہے لہذا یہ پراپرٹی ڈیٹرمی سے متعلق ہے ۔ میٹرکس کے نانٹ اور اس کے ٹرانسپوز کو
یاد رکھیں جب ہم میٹرکس کے ٹرانسپوز کے بارے میں بات کرتے ہیں
تو میٹرکس کا ٹرانسپوز قطاروں اور ان کے کالموں کو تبدیل کرکے حاصل کیا جاتا ہے اور جو چیز ڈیٹرمیننٹ کی تعریف سے براہ راست آتی ہے وہ
ہے لہذا determinant میں ایک ہی transpose اور اس کے determinants so matrix یہ ہے کہ ان کے پاس ایک ہی ہے
خاصیت یہ ہے کہ اگر ہم ایک میٹرکس مربع میٹرکس کی قطار اور کالم کا تبادلہ کرتے ہیں
a کی قدر کو تبدیل نہیں کرتا ہے۔ ایک مربع میٹرکس کے determinant قطار اور کالم کا تبادلہ دوسرے الفاظ میں ah تو ایک مربع میٹرکس
کا تعین کنندہ اس لیے ہم یہاں ایک مربع میٹرکس کے تعین کنندہ کو شمار کرنے کے لیے ایک اشارے کے طور پر استعمال کر رہے ہیں اس لیے
اور اس کی منتقلی ایک ہی determinant ٹرانسپوز ایک علامت ہے جو میٹرکس کے قاطع کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے اس لیے
آہ معذرت خواہ ہوں لہذا میٹرکس اور اس کے ٹرانسپوز کا تعین ایک ہی ہے اور یہ وہ چیز ہے جو آپ کر سکتے ہیں ایک جہتی یا ایک ایک مربع
میٹرکس کے لیے دیکھیں تاکہ یہ صرف ٹرانسپوز میٹرکس کے برابر ہے
تو اس میں کوئی نئی بات نہیں آہ ایک دو بائی دو میٹرکس کے لیے بھی ہم حساب لگا سکتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ایسا ہوتا ہے
ہے ٹھیک ہے اس کا ٹرانسپوز کیا ہے اس کا abcd تو آئیے دیکھتے ہیں کہ اگر آپ 2 بائی 2 میٹرکس کو دیکھیں آپ کے پاس ایک میٹرکس
ٹرانسپوز یا ہم نے کالموں میں قطاروں کا تبادلہ کرکے کیا حاصل کیا
بنا سکتے ہیں۔ ایک قطار ہم بنا سکتے ہیں کہ کالم سی ڈی ٹھیک ہے cd دوبارہ ab ایک قطار ہے لہذا ہم اسے کالم ab تو یہاں
ہے ایک تعین کنندہ ہے bc تو یہ اشتہار مائنس
ہے bc ہے یہاں پھر اس کا تعین کنندہ اشتہار مائنس bc تو اس کا تعین کنندہ اشتہار مائنس
ہے لہذا یہ دونوں ایک جیسے ہیں لہذا آپ ایک میٹرکس کا ٹرانسپوز لے سکتے ہیں اور آپ وہی ڈیٹرمیننٹ bc تو یہاں بھی تعین کنندہ اشتہار مائنس
حاصل کر سکتے ہیں یہ ایک دو بائی دو میٹرکس کے لیے تین بائی تین کے لیے بھی ہم آہ طرح سے تصدیق کر سکتے ہیں یا چیک کر سکتے ہیں کہ
یہ تعین کنندگان کی تعریف سے کیسے چلتا ہے کیونکہ وہاں ہم کہتے ہیں ٹھیک ہے ہم ایک قطار یا کالم کے ساتھ پھیل سکتا ہے لہذا اگر آپ یہ
کے ساتھ پھیلنے کی ab دیکھنا چاہتے ہیں کہ یہاں واضح طور پر تعین کنندہ کی قدر کا حساب لگانے کے بجائے ہم کہہ سکتے ہیں ٹھیک ہے قطار
ایک cofactors اور پھر ہم دیکھتے ہیں کہ ab کے ساتھ پھیلانے کی بجائے یہاں ہم اس کالم کے ساتھ پھیل رہے ہیں۔ ab بجائے قطار
کی قدریں یکساں نکلتی ہیں ایک زیادہ عام میٹرکس کے تین بائی تین کے لیے بھی ہم وہی منطق determinants جیسے نکلتے ہیں اور اس طرح
لاگو کر سکتے ہیں جو آپ کے پاس پہلی قطار پہلی بن جاتی ہے۔ اگر آپ اس کے ساتھ کالم کو پھیلاتے ہیں
تکراری طور پر یا انڈکشن کا استعمال کرتے ہوئے کوئی ٹھیک کہہ سکتا ہے کیونکہ ہم ایک ٹو بائی ٹو میٹرکس جانتے ہیں اور اس کا ah تو
ٹرانسپوز ایک ہی ڈیٹرمیننٹ رکھتا ہے لہذا کوفیکٹر میٹرکس کو میٹرکس کرتا ہے جو کوفیکٹرز بناتے ہیں ان میں بھی ایک ہی ڈیٹرمیننٹ ہوتا ہے اور
اسی طرح ہم یہ ایک عام ماحول کے مربع میٹرکس آہ کے لیے کر سکتے ہیں لیکن بات صرف یہ ہے اور یہاں پر غور کرنے کی بات یہ ہے کہ
میٹرکس اور اس کے ٹرانسپوز کا تعین ایک جیسا ہوتا ہے یہ وہ پراپرٹی 4 ہے جس کے بارے میں آپ اب بات کرنا چاہتے تھے اگلی پراپرٹی کا اس
کے ساتھ کیا تعلق ہے جب آپ ایک تعین کنندہ کی دو قطاروں کا تبادلہ کرتے ہیں
تو اگر آپ کے پاس ایک عام میٹرکس مربع میٹرکس ہے اور آپ ایک قطار کو تبدیل کرتے ہیں اور اسے دوسری قطار میں تبدیل کرتے ہیں
تو اسی طرح ایک کالم کے لیے تعین کنندہ کی قدر کا کیا ہوتا ہے اگر آپ کے پاس ایک کالم ہے
تو آپ اسے دوسرے کالم کے ساتھ تبدیل کرتے ہیں، تعین کنندہ کی قدر کا کیا ہوتا ہے اور ہم کیا دیکھیں گے کہ اگر ہم ایسا کرتے ہیں
تو تعین کنندہ کا نشان بدل جاتا ہے۔ میں اسے لکھتا ہوں اور پھر ہم دیکھیں گے کہ ایسا کیوں ہوتا ہے
تو اگلی خاصیت یہ ہے کہ اگر کوئی دو قطاریں یا کالم ہیں
تو پھر قطاروں اور کالموں کے درمیان اس طرح کا دوہرا ہے اس معنی میں کہ ہم جو کچھ کہتے ہیں اس پر یکساں طور پر لاگو ہوتا ہے۔ دوسرا اور
یہ اس طرح کی پیروی ہے کیونکہ میٹرکس اور ٹرانسپوز جہاں آپ قطاروں اور کالموں کو تبدیل کرتے ہیں ان کا ایک ہی عامل ہوتا ہے لہذا اگر ان کا
تبادلہ ہوتا ہے
تو تعین کنندہ کا نشان تبدیلیاں ام میں تبدیلیاں آتی ہیں
تو میں اسے دوبارہ پڑھتا ہوں اگر کوئی دو قطاریں یا کالم آپس میں بدل جاتے ہیں
تو تعین کنندہ کا نشان صحیح طور پر بدل جاتا ہے اور صرف اس کو کام میں دیکھنے کے لیے ہم کچھ مثالوں پر غور کر سکتے ہیں آہ آئیے ایک دو یہ
دو مثالوں سے آغاز کرتے ہیں۔ یہ کہ ہم ایک قطار اور ایک کالم کو تبدیل کریں گے اور پھر دیکھیں گے کہ تعین کنندہ کی قدر کا کیا ہوتا ہے، اس مثال
میں اور یہ مثال ہمیں ان تبدیلیوں کے لیے صرف ایک اشارے قائم کرنے میں بھی مدد دے گی، اس لیے ہمارے پاس اپنے دو بائی دو میٹرکس ہیں۔
دو کو r ایک اور r دو کہتے ہیں اور جو تبدیلی ہم کر رہے ہیں وہ یہ ہے کہ ہم rho ایک کہتے ہیں آئیے اس کو rho آئیے اس کو abcd
تبدیل کر رہے ہیں بالکل ٹھیک ہے
کا تبادلہ کریں گے r2 اور r1 کی بجائے ab تو کیا ہوتا ہے جب ہم قطار 1
ہے اب آئیے ہم ab کے ساتھ بدل دیا ہے ہمارے پاس ab کی بجائے کیونکہ ہم نے اسے cd ہے اور cd ہے جو rho 2 تو ہمارے پاس
یا ہم اسے کر سکتے ہیں ایک bc تعین کرنے والوں کا حساب لگاتے ہیں کہ اس کا تعین کن کن ہے پہلے کی طرح دو بائی دو میٹرکس ایڈ مائنس
قطار کے ساتھ پھیلنا اور کوفیکٹرز کو تلاش کرنا
ہے لہذا یہ c ہے یہاں پھر فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس یہاں قطار کے ایک کالم میں پہلی اندراج bc تو یہ اشتہار مائنس
کے سوا کچھ نہیں ہیں لہذا اگر ہم نشان کا bc مائنس اشتہار ہے اور اگر آپ دیکھیں یہ دونوں اصطلاحات مائنس آف ایڈ مائنس cb دراصل
موازنہ کریں
تو ان دونوں کے درمیان نشان بالکل ٹھیک بدل جاتا ہے لہذا اگر آپ ایک قطار کو تبدیل کرتے ہیں یا ہم اسے کالم کے لئے یکساں طور پر کرسکتے ہیں

کے لیے تین ah میٹرکس n by n تو ہم اسے دو بہ دو میٹرکس کے لئے کرسکتے ہیں۔ کہ ہم نے یہاں دیکھا ہے کہ ہم اسے عام طور پر ایک
بائی تین چار بائے چار کے لیے کر سکتے ہیں، ہم یہاں قائم کر سکتے ہیں ہم نے ابھی تصدیق کی ہے لیکن زیادہ رسمی طور پر یہ بھی کہا جا سکتا
ہے کہ اگر آپ صرف قطاروں کو تبدیل کرتے ہیں کالم پھر تعین کنندہ کا نشان بدلنے والا ہے مطلق قدر وہی ہوگی لیکن نشان بالکل بدل جائے گا
کا کہنا ہے کہ t تو یہ پراپرٹی ہے فی آہ اگلی پراپرٹی دلچسپ ہے یہ ثابت کرنے کے لیے اس خاص خاصیت کا استعمال کرتی ہے لیکن کیا میں
اگر آپ کے پاس اب دو قطاریں ہیں جو ایک جیسی ہیں
تو تعین کنندہ کی قیمت بھی صفر ہے آہ صرف آہ بہت ہی قابل ذکر قسم کی خاصیت ہے اور خاص طور پر جب ہم اسے دیکھتے ہیں

تو اس کا ثبوت بھی بہت دلکش ہے اور یہ بیان صرف ایک قطار تک محدود نہیں ہے جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے کہ ہم قطار کے بارے میں جو کچھ بھی کہتے ہیں زیادہ تر معاملات میں ہم کالم کے بارے میں بھی کہہ سکتے ہیں اور بیان یہ ہوگا کہ اگر دو کالم ایک جیسے ہیں
تو اس میٹرکس کا تعین کنندہ بھی 0 ہے۔
تو آئیے ذرا اس پر غور کریں
تو پراپرٹی چھ یہ ہے کہ اگر میٹرکس کی دو قطاریں یا کالم ایک جیسے ہوں
تو یکساں یعنی ایک جیسے ہوں
تو اس کے تعین کنندہ کی قدر صفر ہے ٹھیک ہے
تو اگر میٹرکس کی دو قطاریں یا کالم ایک جیسے ہوں۔ یکساں پھر اس کے تعین کنندہ کی قدر صفر ہے
تو درست ہے لیکن ہم اسے کیسے ظاہر کریں یقیناً ہم کچھ مثالوں کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں لیکن مزید دلچسپ بات یہ ہے کہ ہم ایک پراپرٹی پانچ کا یقین ہے phi اگر آپ کو پراپرٹی a اسکوائر میٹرکس neral استعمال کر سکتے ہیں کہ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہمارے پاس ایک جی ہے

تو ہمارے پاس یہ ہے کہ اگر ہم کسی بھی دو قطاروں یا کالموں کو آپس میں تبدیل کرتے ہیں
تو تعین کنندہ کا نشان ٹھیک ہونا چاہئے لیکن اگر دو قطاریں ایک جیسی ہیں اگر آپ ان کا تبادلہ کریں گے
تو میٹرکس خود تبدیل نہیں ہوگا لیکن تعین کنندہ کا نشان بدل جائے گا لہذا یہ صرف اس صورت میں ممکن ہے جب تعین کنندہ کی قدر خود 0 ہو۔
تو میں اسے لکھ دیتا ہوں تاکہ ثبوت ہو اس لیے مربع میٹرکس کو ایک حق سمجھیں جس میں دو ایک جیسی قطاروں کے ساتھ ایک جیسی قطاریں ہوں ri اور rj ri آئیے کال کریں وہ قطاریں
ملے گا لیکن پچھلی خاصیت سے تعین کن تبدیلیوں کی علامت a کو تبدیل کرنے سے ایک ہی میٹرکس rirj توانائی ہم جانتے ہیں کہ قطاروں کے کے انٹرچینج کی قدر کو rj اور ri کا تعین کنندہ آپ نے قطاروں a if میٹرکس a تھا determinant یہ ہے کہ اگر آپ کے پاس تبدیل کیا
تو تعین کنندہ کا نشان اس کا مائنس ہوگا
r اور ri کا تبادلہ ہوتا ہے لیکن چونکہ rj اور ri جہاں نشانی قطاروں rix a تو اس کا تعین کرنے والا چٹائی کا تعین کرنے والا ہوگا۔ کے ڈیٹرمیننٹ کے a کا مائنس ڈیٹرمیننٹ a اس لیے ہم ایک ایسی صورت حال میں آتے ہیں جہاں a ایک جیسے ہیں یہ میٹرکس کچھ نہیں بلکہ کا تعین کنندہ ہو۔ صفر بالکل ٹھیک ہے a برابر ہے جو صرف اس صورت میں ممکن ہے جب
تو پچھلی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے ہم یہاں یہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر آپ کے پاس مربع میٹرکس ہے جس میں ایک جیسی قطاریں دو ایک جیسی قطاریں ہیں یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو ایک جیسے کالموں کے لیے ایک ہی دلیل ہے
تو اس تعین کنندہ کی قدر ہوگی صفر ٹھیک ہے
تو یہ بھی ایک دلچسپ خاصیت ہے کیونکہ اس میں بہت سے اثرات ہیں یا بہت سے نقائص ہیں جنہیں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ان میں سے ایک دلچسپ ہے لہذا مجھے صرف اس کا ایک نوٹ کرنے دیں اور یہ ایک تعین کنندہ کی تعریف پر واپس چلا جاتا ہے لہذا اگر آپ سوچتے ہیں ایک تعین کنندہ کی تعریف کے بارے میں یہ کہتا ہے کہ ایک تعین کنندہ کچھ نہیں ہے لیکن ایک قطار یا کالم کے اندراجات کی قطاروں کی پیداوار اور ان کے متعلقہ کوفیکٹرز کے مجموعہ کے علاوہ کیا ہوتا ہے اگر آپ دوسری قطار کے کوفیکٹرز کے ساتھ ایک قطار کے اندراجات کے مصنوع کا مجموعہ لیں جو میں کہہ رہا ہوں وہ یہ ہے کہ آئیے تین بائی تھری میٹرکس کو دیکھیں اور ہم یہ کہتے ہیں کہ ہمارے پاس تین بائی تین میٹرکس ہے تین بائے تین پر کے طور پر پہلے کی طرح ہم استعمال کرتے ہیں ایک ایک ایک دو آہ ایک تین دو ایک دو دو تین تین تین تین دو ah غور کریں ۔ تین میٹرکس اور تین تین بالکل ٹھیک ہے
کا کوفیکٹر ہے aij اندراج a میٹرکس کے اندراجات کا تعین کرتے ہیں اور ہم یہ کہتے ہیں کہ کیپیٹل a تو یہ چھوٹے کچھ بھی نہیں ہے لیکن ہم یہ کہتے ہیں کہ اگر آپ ایک کے ساتھ پھیلائیں گے determinant تو
ایک ہو جائے گا ایک ایک گنا ایک ایک جمع ایک دو گنا ایک دو ایک کے علاوہ ایک تین بار ایک تین ابھی سوال یہ ہے کہ اگر آپ ان determinant تو کوفیکٹرز کو ان دیگر عناصر کے کوفیکٹرز سے بدل دیں
تو کیا ہوگا دوسرے الفاظ میں اگر میں مندرجہ ذیل کروں
تین wo دو دو جمع ایک تین بار a تو کیا ہوگا ایک ایک دو ایک جمع ایک دو بار
تو یہ قدر کیا ہے اور عام طور پر ہم اس سے قطاروں یا کالموں کی دوسری توسیع کے لیے پوچھ سکتے ہیں کہ یہاں کیا ہوتا ہے اچھی طرح سے خیال ہے یا جواب یہ ہے کہ یہ 0 ہونے والا ہے اور اسے دیکھنے کا ایک آسان طریقہ ہو گا۔ مصنوعات کے اس مجموعے سے اس میٹرکس کی طرف واپس جانے کی کوشش کریں جس کا تعین اس اظہار سے کیا گیا ہے یہ پتہ چلے گا کہ اس میٹرکس کی دو ایک جیسی قطاریں ہیں اور صرف پچھلی خاصیت سے کہ ہم نے دیکھا کہ اگر آپ کے پاس کوئی ایسی چیز ہے جس کی دو ایک جیسی قطاریں ہیں
تو وہ میٹرکس کا تعین کنندہ 0 ہونے والا ہے میں اسے لکھ دیتا ہوں تاکہ اظہار ایک 1 1 بار 2 1 جمع ایک دو بار دو دو جمع ایک تین گنا دو تین کیا ہے اب ہم صرف آہ ایک دو کو پھیلاتے ہیں ایک یہ ایک ہے ایک دو ایک عنصر ایک دو ایک کے کوفیکٹر کے علاوہ کچھ نہیں ہے لہذا وہاں ہمارے پاس اور کالم پر مشتمل پوری قطار کو حذف کرکے حاصل کیا گیا ہے لہذا یہ ہے اے a21 مائنس ون پاور ٹو پلس ایک گنا میٹرکس کا تعین کنندہ ہے جو مائنس 1 پاور 2 پلس 2 بار میٹرکس کا تعین کنندہ پوری قطار کو تبدیل کر کے یا 2 1 a ٹھیک ہے جمع 3 3 a 2 3 a اے 13 اور پھر 12 دو دو کی پوری قطار اور کالم کو حذف کر کے حاصل کیا جائے تاکہ ایک ایک ایک ایک ہو تین ایک تین ایک تین تین اور اسی طرح آخری ٹرم ایک تین مائنس ایک پاور دو جمع تین بار ایک ایک ایک دو تین ایک تین دو ٹھیک ہے
تو یہ اصطلاح مائنس ایک ہے یہ اصطلاح جمع ایک ہے اور یہ اصطلاح مائنس ون ہے اس لیے اگر میں باہر سے مائنس ون لیتا ہوں
تو اگر میں اسے لکھتا ہوں
تو یہ ایک بار ایک دو ایک تین تین دو تین تین مائنس ایک دو میں ایک ایک ایک ہو جائے گا۔ تین ایک تین ایک تین تین دائیں جمع اس اصطلاح کی آخری اصطلاح جو ایک تین بار ایک ایک دو تین ایک تین دو ٹھیک ہے اور پھر میں بریکٹ بند کرتا ہوں لہذا اگر آپ ابھی صرف اس کا معائنہ کریں اگر میں صرف یہ کہوں کہ یہ o کی تعریف کو الٹنے جارہے ہیں s تو اس سے کچھ نہیں ہوگا ایک میٹرکس کا تعین کنندہ اس لیے ہم ایک متعین ایک دو ایک تین اور تین ایک تین دو تین تین جس سے یہ مرحلہ a 1 1 a 1 2 a 1 3 a 1 2 a 1 1 a ایک میٹرکس کا تعین کنندہ ہے تھا۔ یہاں سے یہاں تک صرف اس قطار کو پھیلانے سے تھا اور جو ہم یہاں دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ دو ایک جیسی اصطلاحات ہیں اور صرف پچھلی خاصیت سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطلب ہے کہ یہ تعین کنندہ 0 ہے۔ لہذا یہ ہمیں کیا بتا رہا ہے اگر میں کر سکتا ہوں صرف اس بڑے تیر کے ساتھ ضرب کرنے کے لیے cofactors کو یہاں کھینچیں کہ ایک قطار کے اندراج کی پیداوار کا اندازہ لگانے اور اسے دوسری قطار کے اس رقم کی قدر صفر ہونے والی ہے لہذا یہ ایک دلچسپ خاصیت ہے اس لیے میرا مطلب ہے کہ اگر آپ ایک قطار کے اندراجات اور ان کے کوفیکٹرز کے مصنوع کا مجموعہ جو کہ تعین کنندہ ہے لیکن اگر اب آپ ان کے اپنے کوفیکٹرز کو مختلف قطار کے کوفیکٹرز سے بدلتے ہیں

تو اس کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے اور اسے اس خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے دکھایا جا سکتا ہے۔ اب یہ وہی ہے جو ہم کرنا چاہتے ہیں۔ لہذا
یہ تین خصوصیات کا اگلا مجموعہ ہے جہاں ہم نے اس بارے میں بات کی ہے کہ اگر آپ قطاروں کو تبدیل کرتے ہیں
تو کیا ہوتا ہے اگر آپ کالموں میں قطاروں کو تبدیل کرتے ہیں
تو کیا ہوتا ہے اگر کوئی چیز ایک جیسی قطار یا کالم ہے
تو پھر ہم نے سادہ سا لے کر آئے ہیں۔ یہ بتانے کے طریقے کہ اس میٹرکس کا تعین کنندہ کس طرح تبدیل ہوتا ہے اور ایک پریکٹس کے ساتھ یہ
خصوصیات دوسری نوعیت کی بن جاتی ہیں لہذا آپ کچھ آپریشن دیکھ سکتے ہیں اور دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیٹرمیننٹ کی قدر کا کیا ہوتا ہے اب تین
خصوصیات کا اگلا مجموعہ بھی دلچسپ ہے۔ اس کے ساتھ کیا ہوتا ہے اگر آپ میٹرکس کے اندراجات میں سے کچھ رقم یا مصنوعات لیتے ہیں
تو کیا ہوتا ہے اگر مثال کے طور پر آپ میٹرکس کی پوری آہ قطار کو کچھ نمبر کے ساتھ ضرب دیں
تو فیصلہ کن کیسے بدل جاتا ہے یا اگر ہم دو قطاروں کا مجموعہ کرتے ہیں میٹرکس کا میٹرکس صحیح کیسے بدلتا ہے
تو یہ وہ چیزیں ہیں جن کو ہم آگے دیکھیں گے یہ پراپرٹیز کا اگلا سیٹ ہے لہذا فوری اگلا سیٹ پراپرٹی 7 اے ہے۔ اور یہ کہتا ہے کہ اگر ہم
ضرب کرتے ہیں اگر کسی قطار یا کالم کے ہر عنصر کو مستقل سے ضرب دیا جائے
کہتے ہیں k تو ہم اسے
سے یا کالم کے لیے k سے ضرب دیا جاتا ہے لہذا خیال یہ ہے کہ اگر آپ لیں پوری قطار ہر قطار کے عنصر کو k تو عامل کی قدر کو بھی
کی قدر ہم اسے کیسے دکھاتے ہیں determinant کے ساتھ ضرب کرنے والے um اور k ضرب دے کر اپنی قدر کو تبدیل کرتی ہے پھر
کی تعریف دیکھ کر لہذا آپ اس قطار کے ساتھ پھیلنے پر غور کریں جو کہ ضرب سے پہلے اور بعد میں قطار determinant تو صرف ایک
کے عنصر سے اضافہ ہوا ہے اور اس طرح ہم اس عنصر کو باہر نکال سکتے ہیں اور پھر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ تعین کنندہ k کے ہر اندراج میں
کہتے ہیں ah سے بڑھ گیا ہے۔ لہٰذا ہم ایک کو دیکھ سکتے ہیں کہ کیس کو دیکھنے کے لیے ہم دو بہ دو میٹرکس مثال k خود
جاتا ہے k times r one ok جاتا ہے r one the row r one کہتے ہیں اور یہ عنصر abcd تو اگر ہم ایک میٹرکس
وہی ہوتا ہے جو ان کے تعین کرنے والوں کے ساتھ ہوتا ہے لہذا یہاں پر تعین کنندہ اور tion بن جاتا ہے۔ سوالات kb اور ka تو میٹرکس
کو دیکھنے کے بجائے آئیے اسے صرف ایک بار کے طور پر لکھیں اس کا کوفیکٹر جو کچھ بھی ہے ہم جانتے ہیں bc اگر فارمولہ اشتہار مائنس
ہے لیکن آئیے اسے لکھتے ہیں c بار اس کا کوفیکٹر ہم جانتے ہیں کہ یہ مائنس b ہے لیکن آئیے اسے پلس لکھ دیں۔ d کہ یہ
ہونا چاہئے لیکن ہم واقعی c ہونا چاہئے اور یہ مائنس d ہونا چاہئے لیکن ہمیں افسوس نہیں ہے لہذا یہ c تو یہ رقم ٹھیک ہے لہذا یہاں اصل میں
کے ساتھ ساتھ یہاں بڑھا دیا ہے اگر ہم پہلی قطار کو ab کرتے ہیں اس کے بارے میں زیادہ فکر نہ کریں اصل خیال یہ ہے کہ آپ نے اب قطار
بھی پھیلاتے ہیں
کو تبدیل نہیں c اوقات کو تبدیل نہیں کرتا ہے۔ کوفیکٹر جو دوبارہ مائنس kb تو فیصلہ کن کیا ہے یہ کا ٹائمز کوفیکٹر ہوگا جو اس کے ڈی پلس
کو صرف نکالا جا سکتا ہے k کرتا ہے لہذا یہاں اس
یہاں ہے اور آپ دیکھیں گے کہ یہاں کے تاثرات ایک t یہاں c مائنس cofactors گنا ہو گا جو بھی b بار ایک بار اس پلس k تو یہ
کے ذریعہ طے کرنے والے پیمانے کو اوپر جاتا ہے لہذا یہ k ہے لہذا عامل فیکٹر k جیسے ہیں جیسا کہ یہ دونوں ہیں صرف ایک ہی چیز
صرف اس صورت میں ہے جب آپ پوری قطار کی کچھ اسکیلر ضرب کرتے ہیں اور ہم یہ کالم کے لئے بھی کرسکتے ہیں جو ہم دیکھیں گے وہ یہ
ہے کہ کی قدر ڈیٹرمیننٹ ایک فیکٹر کے حساب سے تبدیل یا پیمانہ کرنے والا ہے ٹھیک ہے
تو یہ ضرب کے حوالے سے ایک خاصیت ہے اور اب ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے اگر آپ کے پاس میٹرکس میں کوئی رقم شامل ہے
تو تعین کنندہ کے ساتھ کیا ہوتا ہے تاکہ آپ مخصوص ہو میٹرکس کی ایک خاصیت کو دیکھتے ہوئے کہ اگر ہر اندراج کو دو عناصر کے مجموعہ
کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے
تو اگر قطار کے ہر اندراج کو دو عناصر کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے
تو تعین کنندہ کو میٹرکس کے تعین کنندہ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جو رقم کو الگ کر کے پایا گیا ہے
تو میں اسے لکھ دیتا ہوں کہ یہ زیادہ واضح ہو سکتا ہے لہذا پراپرٹی سٹیٹمنٹ یہ ہے کہ اگر قطار یا کالم کے کچھ یا تمام عناصر کو دو
اصطلاحات کے مجموعہ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے
کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے اور determinants مجموعی طور پر تعین کنندہ کو determinant تو
کا یہ مجموعہ میٹرکس کا ہوتا ہے جو اس اصلی میٹرکس کو الگ کر کے اصل میٹرکس کو الگ کر کے حاصل کیا جاتا ہے اس determinants
کا کیا مطلب ہے
جمع b ہے ہم کہتے ہیں اور x جمع a تو آئیے ایک سادہ سی مثال کو دوبارہ دیکھیں ایک دو دو مثالیں فرض کریں کہ ہمارے پاس ایک میٹرکس y
اور c ٹھیک ہے اور پھر d
ہے کیونکہ یہ رقم یا تمام x تو اس کنویں کا تعین کرنے والا کیا ہے ہم یہ کہنے کی کوشش کر سکتے ہیں کہ ٹھیک ہے مجھے یہ بتانا چاہئے کہ یہ
بھی کہتا ہے اگر آپ اسے رقم کے طور پر نہیں لکھ سکتے ہیں
صرف آہ صفر ہوسکتا ہے لہذا ایسا نہیں ہے کہ ہمیں ان سب کو جمع کے طور پر لکھنے کی ضرورت ہے جو رقم اس x تو کچھ معاملات میں یہ
طرح ہوسکتی ہے کہ دوسری سڑن جمع کے لحاظ سے ہوسکتی ہے۔ مثال کے طور پر صفر
تو ہم جو کہنا چاہتے ہیں وہ یہ ہے کہ اس کا گہرائی کا تعین کرنے والا ایک میٹرکس کے تعین کے برابر ہے جس سے حاصل کیا گیا ہے
ٹھیک ہے plus xycd تو یہ وہ سڑن ہے جس کے بارے میں ہم بات کر رہے ہیں
ہے ایک تعین کنندہ کو دو تعین کنندگان کے مجموعے میں صرف اس لیے کہ ایک قطار کے عناصر دو عناصر decompo تو اس طرح ہمارے پاس
میں گلنے کے قابل تھے، اس لیے بیان سے ہمارا مطلب یہی ہے اور ہم اسے کیسے دکھاتے ہیں ہم اسے دوبارہ دکھا سکتے ہیں۔ دوبارہ تعریف جیسا
کے ساتھ ah کہ ہم نے پہلے قطار
توسیع کرتے ہوئے کیا ہے اور کیونکہ اب جب آپ رقم کو دیکھتے ہیں
یا اس طرح کی کوئی چیز ہوگی y جمع b یا x تو ہر ایک پروڈکٹ میں ایک جمع
تو ہم صرف ان کو تقسیم کرتے ہیں اور پھر جو کچھ بھی ہم باقی رہ گئے ہیں دونوں پروڈکٹس اپنے طے کرنے والوں کے اپنے آہ سیٹ پر واپس جا
سکتے ہیں لہذا مجھے صرف وہی لکھنے دیں جو میں نے ابھی کہا ہے آئیڈیا مندرجہ ذیل ہے لہذا اگر آپ فیصلہ کن کو یہاں دیکھنے کے بجائے
ہم یہ کہتے ہیں کہ ہم اس قطار کے ساتھ پھیل رہے ہیں y جمع b بار c اوقات یہ مائنس x جمع a آخری مثال کی طرح دیکھیں فارمولے پر
کے علاوہ کچھ نہیں ہے اور یہ d گنا ہے اس کا کوفیکٹر ہم جانتے ہیں کہ یہ y جمع b گنا اس کا کوفیکٹر جمع x اور ہمارے پاس ایک جمع
مائنس سی کے سوا کچھ نہیں ہے لیکن عام طور پر ہم نہیں جانتے ہیں اور یہ کہ آہ
تو عام طور پر ہمیں یہ جاننے کی ضرورت نہیں ہے کہ وہ کیا ہیں کیونکہ ہم صرف
توسیع کر رہے ہیں اور ہم ان شرائط کے ساتھ
کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ پلس بی ٹائم مائنس سی پلس d توجہ مرکوز کر رہے ہیں لہذا اسے اوقات

اب اگر آپ ان کو دیکھیں c گنا مائنس y تو یہ اصطلاحات کا ایک مجموعہ ہے جمع ایکس ٹائم ڈی پلس
تو یہ کچھ نہیں ہے لیکن پہلا کچھ نہیں ہے مگر اس اصطلاح کا تعین کرنے والا اور دوسرا کچھ نہیں ہے اس اصطلاح کا
حق کا تعین کرنے والا ہے لہذا ہم نے دو تعین xycd کا تعین کرنے والا ہے اور میٹرکس abcd تو یہ دو عاملوں کا مجموعہ ہے جو میٹرکس
کنندگان کے مجموعے میں سے ایک عامل کا اظہار کیا ہے جس کا مطلب ہے تعین کنندگان کے اس معنی سے ٹھیک ہے
تو یہ وہ خاصیت ہے جس کو دوبارہ بتانا ہے کہ اگر آپ قطار کے مجموعوں کو یہاں ہم نے غور کیا ہے بلکہ ایک کالم کو بھی دو اصطلاحات کے
مجموعہ کے لحاظ سے تحلیل کر سکتے ہیں
اور پھر اگلی پراپرٹی جو اس سیریز میں essed ok ah تو تعین کنندہ کو ختم کیا جا سکتا ہے۔ دو تعین کنندگان کے مجموعے کے طور پر
آخری ہے جس کے بارے میں ہم بات کرنے جا رہے ہیں کسی لحاظ سے اس کے برعکس ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر آپ کسی میٹرکس کو
دیکھیں جس میں ایک مخصوص ڈیٹرمیننٹ اور اگر آپ میٹرکس کی دو قطاریں جوڑتے ہیں اور ان میں سے ایک قطار کو بدل دیتے ہیں
تو ڈیٹرمیننٹ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی اور اس کا استعمال یہ ظاہر کرنے کے لیے ہو گا کہ ہم اس پراپرٹی کو استعمال کرتے ہیں اور اس پراپرٹی
کو بھی جو ہم نے دیکھی تھی۔ اس سے پہلے دو ایک جیسی قطاروں کا مطلب یہ ہے کہ تعین کنندہ صفر ہے اور جو کچھ ہم قطاروں کے بارے میں
کہتے ہیں وہ کالموں کے لیے بھی رکھتا ہے
تو آئیے دیکھتے ہیں کہ وہ پراپرٹی کیا ہے
تو یہ پراپرٹی نائن ہے اور پراپرٹی نو یہ ہے کہ اگر ہمارے پاس ہر ایک عنصر ہے ایک قطار یا کالم کو اس عنصر کے مجموعہ اور دوسری قطار
کے عنصر سے تبدیل کیا جاتا ہے لہذا خیال یہ ہے کہ ہر قطار جو پہلے سے ہی اس عنصر کے مجموعہ اور دوسری قطاروں کے عنصر سے بدل
دی جائے گی۔ اسی دوسری قطار کو سمجھا جاتا ہے یا کالم پھر کے تعین کنندہ کی قدر ایک ہی رہتی ہے
کو r1 ہے اور ہم پہلی قطار abcd تو آئیے اس کی وضاحت کے لیے ایک دو بہ دو مثال دیکھتے ہیں فرض کریں کہ ہمارے پاس ایک میٹرکس
r1 پلس r2 میٹرکس d اور c اور d جمع b کو b اور c جمع a کی جگہ a دینے جا رہا ہے لہذا ہم a سے بدل دیتے ہیں۔ یہ ایک میٹرکس
سے بدل رہے ہیں
تو ایک اور سوال یہ ہے کہ اس کا تعین کرنے والا کیا ہے اور اس کا تعین کرنے والا کیا ہے؟ یہاں اشتہار مائنس بی سی کا تعین کرنے والا ہے
یہاں یہ ہے کہ ہم اس اچھی طرح کے تعین کنندہ کو کیسے تلاش کرتے ہیں جیسا کہ ہم نے پچھلی خاصیت میں دیکھا تھا کہ اس میٹرکس کے تعین
رائٹ کا پلس ڈیٹرمیننٹ ہے cdcd حق کے تعین کنندہ کے طور پر تبدیل کیا جاسکتا ہے کیونکہ یہ دو آہ رقم ہیں لہذا ہم abcd کنندہ کو میٹرکس

تو یہ پچھلی پراپرٹی سے ہے اور اگر آپ صرف اس میٹرکس کو دیکھیں
تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں قطاریں ایک جیسی ہیں اور اس لیے یہ ڈیٹرمیننٹ 0 پر چلا جاتا ہے اور جو ہمارے پاس رہ جاتا ہے وہ کچھ بھی نہیں
جو کہ یہاں ایک جیسا ہے اور یہ ہم ایک دو بہ دو میٹرکس کے لیے دیکھتے ہیں لیکن عام طور پر ایک جنرل abcd کا t determinant ہے۔
بائنڈ میٹرکس کے لیے درست ہے n
تو اس کے ساتھ ہم نے تعین کرنے والوں کی نو خصوصیات ختم کر دی ہیں جن کی ہم وضاحت کرنا چاہتے تھے۔ ان میں سے ہر ایک کو ہم نے کچھ
مثالوں پر غور کیا ہے کہ ہم کیا کریں گے کچھ مسائل کو دیکھیں گے جو اس پراپرٹی کو لیکچر کے اگلے سیٹ میں استعمال کرتے ہیں لیکن ان
خصوصیات کو دیکھنے کا خیال یہ ہے کہ ٹھیک ہے ہمیں کچھ تعین کرنے والوں کا اندازہ کرنا پڑے گا۔ براہ راست تعریف کا استعمال کر سکتے ہیں
لیکن ہم یہاں کیا کر رہے ہیں کچھ سادہ تعین کرنے والے حسابات اور کچھ خصوصیات کو نوٹ کر کے ہم نسبتاً پیچیدہ میٹرکس کے تعین کرنے والوں
کو ایک سادہ انداز میں جوڑ سکتے ہیں تاکہ ہم نسبتاً پیچیدہ میٹرکس کے تعین کرنے والوں کو حاصل کر سکیں اور یہ آسان بنانے والا خیال ان
پراپرٹیز کو دیکھنے کا مقصد ہے اس لیے میں آپ کی
توجہ کا شکریہ ادا کرتا ہوں اور امید کرتا ہوں کہ یہ پراپرٹیز مزید بڑھ جائیں گی۔ تعین کنندگان کے بارے میں آپ کی سمجھ کے لیے ایک مختلف
پرت کا نقطہ نظر آپ کا شکریہ