

ریاضی کے مسائل حل کرنے کے سیشن میں خوش آمدید یہ آج کے لیکچر میں لیکچر نمبر چار ہے پہلے میں میٹرک سے iit pam بیلو طلباء کو متعلق ایک مسئلہ پر کام کروں گا پھر میں لکیری مساوات کا نظام شروع کروں گا جس کے لیے میں بہت اچھا پس منظر پیش کروں گا اور پھر میں کام کروں گا۔ لکیری مساوات کے نظام پر مبنی کچھ دلچسپ مسائل ٹھیک ہے

ایک اور 3 کر اس 3 میٹرکس ہے جو  $p_2$  برابر ہے  $p_1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2$  تو آئیے مسئلے کے سوال کے ساتھ شروع کرتے ہیں  $p_5 \ 0$  ہے  $p_4 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$  کے ذریعہ دیا گیا ہے۔  $p_3$  ہے  $p_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$  اور  $p_6$  ہے  $0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$ ۔ چھ میٹرکس ہیں  $p_6$  اور  $p_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$  تو یہاں اگر آپ ہر قطار میں دیکھتے ہیں اور ایک کالم میں بالکل ایک ایک اور دو صفر ٹھیک ہے

ٹھیک ہے اوہ وہاں ہے  $x$  تو آئیے مندرجہ ذیل کو دکھاتے ہیں پھر حصہ ایک ٹھیک ہے میں اسے دوسرے صفحے پر لکھتا ہوں پھر حصہ ہے اگر کیا سوال میں کچھ اور چیز ہے ٹھیک ہے

میں  $pk \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2$  کے ذریعہ دیا جاتا ہے 1 سے 6  $k$  ایک اور میٹرکس جو  $s$  تھے۔  $xi$  تو ہمارے پاس یہ چھ میٹرکس اور الفا اوقات  $1 \ 1 \ 1$  کے برابر ہے  $x$  کے برابر ہوتا ہے ٹھیک ہے پھر حصہ ہے اگر  $1 \ 1 \ 1$  کا  $pk$  invertible ایک  $i$  مائنس  $30$  کے لیے  $c$  میٹرکس ہے  $x \ x$  symmetric اس لیے ہے کہ  $b$  تو الفا کے برابر ہے  $30$  حصہ میٹرکس نہیں ہے ٹھیک ہے

تو آئیے اس مسئلے کو حل کرتے ہیں ٹھیک ہے کی نشاندہی کرتے ہیں  $1 \ 3 \ 1 \ 2$  کے برابر ہے مجھے صرف پہلی قطار 2 ہے  $1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1$  ٹھیک ہے  $b$  تو ہم صرف اس میٹرکس ہم اینگی میٹرکس ہے ٹھیک ہے  $b$  کے برابر ہے لہذا  $b$  ٹرانسپوز  $b$  تو یہ واضح ہے کہ برابر ہے  $k \ 6 \ 2 \ 1$  کے برابر ہے  $x$  تو پارٹی ٹھیک ہے آئیے پارٹی کو حل کرتے ہیں ٹھیک ہے لہذا ہم اس میٹرکس کو ٹھیک کریں گے پھر  $pkbpk$  ٹرانسپوز ٹھیک ہے

تو ٹھیک ہے ٹرانسپوز  $1 \ 1 \ 1$  ٹھیک ہے  $pkbpk$  کے برابر 1 سے 6  $k$  تو آئیے ایکس ایک کے برابر ہے ٹرانسپوز ون ون کیا ہے  $pk$  تو  $ly$  ٹرانسپوز پی 6 تک ٹرانسپوز یہاں پر ہر ایک قطار میں بالکل درست ہے۔  $p_3$  ٹرانسپوز  $p_2$  ٹرانسپوز کو دیکھیں  $p_1$  تو اگر آپ ان تمام ایک ایک اور دو 0 ہیں ٹرانسپوز  $pk \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$  کے سوا کچھ نہیں ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ  $pkb \ 1 \ 1 \ 1$  ٹرانسپوز  $pk \ 6 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$  کے برابر ہے ٹھیک ہے وہ میٹرکس ہے جو اوپر دیا گیا ہے  $b$  کیا ہے؟  $b \ 1 \ 1$  تو ہے اور 6 ٹھیک ہے ٹھیک ہے  $b \ 1 \ 1 \ 6 \ 3$  اور  $pk$  برابر ہے 1 سے 6  $k$  کچھ نہیں ہے لیکن  $b \ 1 \ 1$  تو اور یہ 6 3 6 ٹھیک ہے  $p \ 6$  جمع  $p \ 5$  جمع  $p \ 4$  جمع  $p \ 3$  جمع  $p \ 2$  جمع  $p \ 1$  کچھ نہیں ہوگا مگر  $x$  تو اگر آپ ان تمام میٹرکس کو شامل کرتے ہیں تو ہمیں 2 گنا  $1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$  اور یہ 6 3 6 ہے ٹھیک ہے اوقات ہے  $1 \ 1 \ 1$  ٹھیک ہے ہم پچھلی سلائڈ میں چیک کر سکتے ہیں ہاں ٹھیک ہے  $x$  نہیں ہے یہ  $x$  تو ٹھیک ہے ہاں یہ اصل میں تو یہ کیا ہے یہ کچھ نہیں ہے 2 گنا  $15 \ 15 \ 15$  ٹھیک ہے یہ 30 گنا کے برابر ہے  $1 \ 1 \ 1$  ٹھیک ہے الفا اوقات  $1 \ 1 \ 1$  ضرب  $30 \ 1 \ 1 \ 1$  ضرب  $x \ 1 \ 1 \ 1$  ضرب  $1 \ 1 \ 1$  کے برابر ہے اور سوال میں  $30 \ 1 \ 1 \ 1$   $x$  کا مطلب ہے  $1 \ 1$  تو کے برابر ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ الفا مائنس  $30$  ضرب  $1 \ 1 \ 1$  0 ہیں کے برابر ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ الفا  $30$  کے برابر ہے  $1 \ 1$  تو یہ وہی ہے جو ہم ٹھیک ثابت کرنا چاہتے تھے  $x$  symmetric کو ظاہر کرنے کی ضرورت ہے  $x$  ہمیں دکھانے کی ضرورت ہے  $b$  تو آئیے حصہ 2 کی طرف چلتے ہیں جو حصہ لیں گے  $x$  transpose میٹرکس ٹھیک ہے اس کے لئے ہم برابر ہے  $6 \ 2 \ 1$  اور یہ  $k$  ٹرانسپوز  $pkbpk$  ٹھیک ہے ہم نے اشارہ کیا کہ میٹرکس بذریعہ  $pk$  ہے  $x$  جہاں  $x$  transpose ٹرانسپوز ہے

ٹرانسپوز ٹھیک ہے اور دیا ہوا  $pk$  ٹرانسپوز  $pkb$  نہیں  $pk$  ٹرانسپوز  $b$  ٹرانسپوز  $pk$  ہے  $6 \ 2 \ 1$   $k$  تو یہ کیا ہے یہ کچھ نہیں ہے بلکہ کے سوا کچھ  $x$  ٹرانسپوز کے برابر ہے اور یہ  $pkbpk$  میں دیکھا ہے لہذا یہ  $a \ 6$  ایک ہم اینگی میٹرکس ہے یہ وہی ہے جو ہم نے حصہ  $b$  ایک الٹے والا میٹرکس نہیں ہے ٹھیک ہے  $i$  مائنس  $30$   $x$  ہمیں یہ ظاہر کرنے کی ضرورت ہے کہ  $c$  پر چلتے ہیں۔ حصہ  $c$  تو آئیے حصہ ایک ایک ہے تیس گنا ایک کے برابر ہے ٹھیک ہے  $x$  سے ہمارے پاس  $a$  لہذا حصہ مائنس  $x$  غیر معمولی حل ہے  $e$  برابر ہے  $0$  سے۔ ٹھیک ہے اس کا مطلب ایک پر ہے۔  $i \ 1 \ 1 \ 1$  مائنس  $30$   $x$  تو یہ کچھ نہیں ہے مگر میں  $0$  کے برابر ہے ٹھیک ہے  $y$  کا  $30 \ i$  الٹا ہے  $i$  مائنس  $30$   $x$  الٹا نہیں ہے کیونکہ اگر  $i$  مائنس  $30$   $x$  تو اس کا مطلب یہ ہے کہ برابر ہے  $0$  کے پاس صرف  $0$  ہے حل لیکن اس معاملے میں ہمارے پاس ایک غیر صفر حل ہے جو  $1 \ 1 \ 1$  ٹھیک ہے  $iy$  مائنس  $30$   $x$  تو ایک الٹا میٹرکس نہیں ہے ٹھیک ہے طلباء  $i$  مائنس  $30$   $x$  تو یہی وجہ ہے کہ تو آئیے ایک نیا موضوع شروع کرتے ہیں جو لکیری کا نظام ہے۔ مساوات میں اس موضوع پر مختصر پس منظر پیش کروں گا جس سے آپ کو لکیری مساوات کے نظام سے متعلق مسائل کو حل کرنے میں مدد ملے گی، لہذا آئیے لکیری مساوات کے نظام سے متعلق مسائل کو حل کرنے سے  $n$  اور  $n$  matrix  $xb$  کر اس  $abnn$  پہلے پس منظر کے نظام سے شروع کرتے ہیں۔ اس موضوع پر ایک مختصر پس منظر پیش کریں لہذا  $ax$  میں ایک مساوات لکیری مساوات کا نظام لکھا جا سکتا ہے کیونکہ  $x$  کر اس ایک ویکٹر ٹھیک ہے پھر متغیر  $n$  اور  $bbn$  کر اس 1 ویکٹر اور جو 1 کو پورا کرتا ہے اسے لکیری مساوات کے نظام کا حل کہا جاتا ہے بالکل ٹھیک ہے لہذا  $x$  لہذا کوئی بھی  $is \ equals \ to \ b$  لکیری مساوات کے نظام کا منفرد حل ہوسکتا ہے اس کے لامحدود بہت سارے حل ہوسکتے ہیں اور اس کا کوئی حل بھی نہیں ہوسکتا ہے میرے پاس کوئی حل نہیں ہے ٹھیک ہے

تو آئیے کچھ مثالیں دیکھتے ہیں کہ مساوات کے نظام کو دو مساوا دو کے برابر ہے  $x \ 2$  ایک جمع دو  $x$  دو چار سے  $x$  ایک جمع دو  $x$  توں پر غور کریں جو نامعلوم کے ذریعہ دیا گیا ہے منفرد  $uni$  کے برابر ہے 2 کے برابر ہے منفرد حل ہے  $x_1 \ x_2$  کے برابر ہے اور  $x_1 \ 0$  تو یہ مساوات کا نظام ہے لہذا یہ دیکھنا آسان ہے جمع  $x \ 1 \ 2$  کے برابر ہے  $x \ 2 \ 2 \ 2$  جمع  $x \ 1$  حل میں ایک کا حقیقی حل سب ٹھیک ہے آئیے ایک اور مثال دیکھتے ہیں مثال کے طور پر اس کے برابر ہے ٹھیک ہے اگر آپ مساوات کے اس نظام پر غور کریں  $x \ 2 \ 4$

تو یہ دیکھنا آسان ہے کہ دوسری مساوات کو پہلی مساوات کو دو سے ضرب دے کر حاصل کیا جا سکتا ہے اس طرح مساوات کے اس نظام میں کوئی حل الفا اور 2 مائٹس الفا جہاں الفا حقیقی نمبر کے لحاظ سے کسی حقیقی نمبر سے تعلق رکھتا ہے ایک حل دو کا حل ہے جو دو لامحدود بہت سے حل ہے ٹھیک ہے

کے برابر ہے لہذا مساوات کے اس نظام کا  $x_2 = 3$  کے برابر ہے جمع  $x_1 = 2$  جمع  $x_1 = 2$  اور مثال پر غور کریں  $x_1$  کوئی حل نہیں ہے یہ بہت واضح ہے کیونکہ مجھے صرف اسے حذف کرنے دیں ٹھیک ہے لہذا اس سسٹم کا کوئی حل نہیں ہے کیونکہ اگر  $x_2 = 2$  جمع

ہوگا 4 نہیں 3.  $x_2$  جمع  $x_1 = 2$  تو 2

تو اس سسٹم کا کوئی حل نہیں ہے ٹھیک ہے

تو ٹھیک ہے

تو ہم نے ایسی مثالیں دیکھی ہیں جہاں سسٹم کا انوکھا حل ہوتا ہے جہاں ایک سسٹم کا لامحدود حل ہوتا ہے جہاں سسٹم کا کوئی حل نہیں ہوتا اب سوال یہ ہے کہ ہم کیسے فیصلہ کرتے ہیں کہ ہم کیسے فیصلہ کرتے ہیں ہم اس کے بارے میں فیصلہ کرتے ہیں کہ ہم لکیری مساوات کے نظام جمع  $n$  بھی  $b$  کراس 1 ویکٹر  $n$  ہے  $x$  میٹرکس  $n$  جمع  $n$  کے برابر ہے جہاں  $b$  کے حل کے بارے میں کیسے فیصلہ کرتے ہیں محور ویکٹر ٹھیک ہے 1

تو ہم اسے کیسے طے کریں گے

جو کہ میٹرکس کے درجے کے لحاظ سے دیے گئے ہیں تاکہ یہ فیصلہ کرے کہ سسٹم کے پاس ایک منفرد  $n \times n$  سسٹم میں  $n$  سسٹم کے پاس لامحدود بہت سے حل ہیں یا سسٹم کے پاس کوئی حل نہیں ہے

تو آئیے دیکھتے ہیں کہ وہ شرائط کیا ہیں پہلے ایک ہے ٹھیک ہے

کے برابر ہے  $n$  کا درجہ بڑھا ہوا میٹرکس کی درجہ بندی کے برابر ہے  $a$  تو اگر

کا درجہ بڑھا ہوا  $a$  کا تعین کنندہ صفر کے برابر نہیں ہے دوسری شرط یہ ہے کہ اگر  $a$  تو مساوات کے نظام کا منفرد حل ہے اس معاملے میں پھر سسٹم میں لامحدود ڈیمانڈنگ حل ہے بالکل  $n$  سے کم  $m$  کے برابر ہے  $ab$  matrix augmented matrix کا درجہ بندی کے برابر ہے کہ اگر  $a$  ٹھیک حل نہیں ہونے کی شرط یہ ہے کہ اگر

تو پھر مساوات کے نظام کا کوئی حل نہیں ہے

تو ٹھیک ہے مجھے رینک کی تعریف یاد ہے لہذا ہر قرض کے فارم پر ابتدائی قطار کے آپریشن کا استعمال کرتے ہوئے میٹرکس  $a$  کو کم کر کے کا درجہ حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں غیر صفر قطاروں کی تعداد میٹرکس ہر لمبی شکل میں میٹرکس کا درجہ دیتا ہے ٹھیک ہے  $a$

تو آئیے اس درجہ کی کچھ مثالیں دیتے ہیں میرا مطلب ہے کہ ہر ایک میٹرکس کے لیے سیکھتا ہے مثال ایک دو تین صفر دو پانچ صفر صفر مائٹس ایک ہے

تو یہ میٹرکس جزیرے کی شکل میں ہے کیونکہ اگر آپ دیکھیں صفر بڑھتے ہوئے ترتیب میں ہیں اگر دوسری قطار میں ایک صفر ہے

تو تیسری قطار میں 2  $\theta$  ٹھیک ہے

تو یہاں کا درجہ اس میٹرکس کا درجہ 3 ہے کیونکہ آپ کے پاس تمام قطاریں غیر صفر ہیں دوسری مثال یہ ہے کہ یہ میٹرکس 1 3 ہے  $\theta \theta \theta$  صفر صفر یہاں بھی دیکھیں دوسری قطار میں دو صفر ہیں  $\theta \theta \theta$

تو تیسری قطار میں تین صفر ہیں اس درجہ کے لیے دو ہے کیونکہ آخری قطار ایک صفر کی قطار ہے اور غیر صفر قطاروں کی تعداد دو ہے۔

کیونکہ غیر صفر قواعد کی تعداد دو ٹھیک ہے لہذا میرا مطلب یہ ہے لہذا ہم میٹرکس کو اس لمبی شکل میں کم کرنے کے لیے ایلیمنٹری قطار آپریشن کا استعمال کرتے ہیں تاکہ میٹرکس کی درجہ بندی کا حساب لگایا جا سکے۔ اس سسٹم پر ضروری پس منظر کے ساتھ لکیری مساوات کی

تو اب ہم ان تصورات کی بنیاد پر کچھ مثالیں حل کریں گے

سے ہے جو حقیقی اعداد کا سیٹ ہے  $\mathbb{R}$  کا تعلق  $\mu$  تو آئیے لکیری مساوات کے نظام سے متعلق کچھ مسائل کو حل کرتے ہیں کہ الفا لیمبڈا

کی کن اقدار کے لیے  $\mu$  کیا لیمبڈا ٹھیک ہے لکیری مساوات کے نظام میں الفا لیمبڈا  $\mu$  لکیری مساوات کے نظام پر غور کریں الفا ایکس پلس 2 پر ایک شرط اخذ کرنے کی  $\mu$  سوالات کا ایک منفرد حل منفرد حل ہے لامحدود بہت سے حل اور آخری حصہ نامعلوم حل ہے لہذا ہمیں الفا لیمبڈا ضرورت ہے جس کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب اس کا ایک انوکھا حل ہوگا جب ہمارے پاس لامحدود بہت سے حل ہوں گے اور جب اس کا

کوئی حل نہیں ہوگا

تو ٹھیک ہے

تو آئیے اس مسئلے کو ٹھیک کرتے ہیں لہذا لکیری مساوات کے اس نظام کے لئے ہمارے پاس یہ میٹرکس  $a$  ہے جو الفا 2 3 مائٹس 2 ہی کے

ٹھیک ہے  $\lambda \mu$  ذریعہ دیا گیا ہے۔ کیا

تو آئیے پہلا حصہ حل کریں

$a$  کا درجہ برابر ہے  $b$  جو ایک بڑھا ہوا  $s$  ہے۔  $a$  کا تعین کنندہ  $\theta$  کے برابر نہیں ہے اور کون سا  $a$  تو منفرد حل کے لیے شرط یہ ہے کہ کا درجہ 2 کے برابر ہے لہذا یہ دونوں ٹرانزیشن بالکل برابر ہیں

کا تعین کرتے ہیں جو مائٹس 2 الفا مائٹس 6 کے علاوہ کچھ نہیں ہے اور یہ نہیں ہے  $\theta$  کے برابر ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ الفا  $a$  تو آئیے پر کوئی شرط نہیں ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\mu$  برابر نہیں ہے 3 مائٹس کے 3 الفا 3- کے برابر نہیں ہے لہذا یہاں ہمارے پاس لیمبڈا اور کسی بھی حقیقی نمبر کے نظام سے تعلق رکھتا ہے کسی بھی  $\lambda \mu$  اس کے لیے الفا کے برابر ہے مائٹس 3 کے برابر نہیں ہے اور

حقیقی نمبر کے نظام کا منفرد حل ہوگا ٹھیک ہے

تو آئیے دوسرے حصے کو حل کریں

پر ایک شرط اخذ کرنے کی ضرورت ہے جس کے لیے  $\mu$  ہے لہذا ہمیں الفا لیمبڈا  $\lambda \mu$  ہے  $b$  تو ایک میٹرکس الفا 2 3 مائٹس 2

سسٹم ایک سسٹم کے پاس لامحدود طور پر بہت سارے حل ہیں اس کے لئے آئیے بڑھے ہوئے میٹرکس پر غور کریں ٹھیک ہے

تو یہ الفا 2 کے علاوہ کچھ نہیں ہے ہم اس ویکٹر وی ہی کو یہاں بھی شامل کرتے ہیں اور تین مائٹس دو بالکل ٹھیک ہے

تو یہاں اگر میں قطار آپریشن کو لاگو کرتا ہوں

پھر ہمیں الفا 2 ملتا ہے اور یہاں یہ لیمبڈا ہے اور پھر آپ کو 3 جمع الفا  $\theta$  ملتا ہے اور  $r_1$  جمع 2  $r$  کو تبدیل کر دیا جاتا ہے۔  $r_2$  تو

ہوگا  $\mu$  مجھے لگتا ہے کہ مجھے اسے ختم کرنے کی ضرورت ہے ٹھیک ہے یہاں یہ لیمبڈا پلس

تو یہ یہ ہے یہ بڑھے ہوئے میٹرکس کی گھٹی ہوئی شکل ہے۔ ٹھیک ہے

کے برابر ہونا چاہیے اور یہ  $a$  کا درجہ  $ab$  میٹرکس Augmented تو اب لامحدود بہت سے حلوں کے لیے لامحدود بہت سے حل کے لیے سے کم ہونا چاہیے بالکل ٹھیک ہے 2

تو ٹھیک ہے

کے برابر ہے یعنی الفا مائٹس 3 کے برابر ہے اور لیمبڈا مائٹس کے برابر ہے  $\mu = \theta$  تو یہاں اگر الفا جمع 3  $\theta$  کے برابر ہے اور لیمبڈا پلس



تو چلو اسے مزید کم کرتے ہیں ٹھیک ہے  
کے سوا کچھ نہیں ہے  $r_3$  سے  $r_2$  پلس  $r_3$  تو اب میں یہاں کروں گا جو میں کروں گا میں بس ٹھیک ہے میں یہاں اپلائی کروں گا۔ تبدیلی جو  
مائنس 1 میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے  $k$  تو اس تبدیلی کے بعد ہمیں 1 مائنس 2 3 مائنس 1 ملتا ہے دوسری قطار 1  
ٹھیک ہے پھر یہ 0 ہو جاتا ہے اور یہ یہ 0 ہو جاتا ہے  $r$  ہونا چاہیے مائنس 3  $r$  تو یہ 0 بن جاتا ہے، مجھے افسوس ہے کہ نہیں پلس اسے  
ٹھیک ہے  $k$  سب ٹھیک ہے اور پھر یہ 3 ہو جائے گا مائنس

تو یہ ہے

کا درجہ بہر حال دو ہے ٹھیک ہے  $a$  تو اب یہاں ایک کا درجہ کیا ہے

تو اگر آپ چاہیں

تو سسٹم کے پاس کوئی حل نہیں ہے

برابر 3 کے برابر نہیں ہے  $k$  تو سسٹم کے لیے کوئی حل نہ ہونے کے لیے ہمیں اگمینٹڈ میٹرکس کی رینک 3 کی ضرورت ہے اس کا مطلب ہے کہ

کے برابر نہیں ہے 3  $k$  اس لیے اگر

کے برابر  $k$  یعنی  $impl$  تو اگمینٹڈ میٹرکس کی آخری قطار 0 نہیں ہے اور ہی اس میٹرکس میں دلیل کی درجہ بندی 3 بالکل ٹھیک ہے لہذا یہ

نہیں 3 سسٹم کا کوئی حل نہیں ہوگا

تو یہ حتمی جواب ہے ٹھیک ہے طلباء میں اب یہیں رک جاؤں گا اگلے سیشن میں اس سیشن میں شرکت کا شکریہ میں لکیری مساوات کے نظام کی  
بنیاد پر کچھ اور دلچسپ مسائل حل کروں گا شکریہ تم تم