پچھلے لیکچرز میں طلباء کو خوش آمدید کہتے ہیں ہم میٹرکس کی ایپلی
کیشنز کو دیکھ رہے ہیں خاص طور پر اس کے استعمال پر جو اس لیکچر میں قطار میں کمی کی گئی ایکیلون میٹرکس کے نام سے جانا جاتا ہے ہم
اس قطار کو کم کرنے والے ایکیلون میٹرکس کا استعمال کریں گے اور ایک نظام کو حل کرنے کی کوشش کریں گے۔ لکیری مساوات
nxn جمع ایک 2 2 x ایک جمع ایک دو دو x ایک ایک دو b برابر nxn تو آئیے اس کے ساتھ شروع کریں لکیری مساوات کا نظام ہے جمع ایک
کے برابر ہے bm برابر amnxn تک am 2 x 2 جمع am 1 x 1 تک b 2 برابر
نامعلوم کے ساتھ صحیح n نامعلوم کے ساتھ نہیں n مساوات کا ایک نظام ہے m تو یہ
مساوات کا ایک نظام ہے اب ایک نظام دیا گیا ہے کہ کیسے حل کیا جائے۔ اس سے پہلے کہ m نامعلوم میں n تو آپ کے پاس جو ہے ہمارے یہاں
ہم اسے حل کرنے کے لیے آگے بڑھیں یہاں کچھ حقائق ہیں جن کا مشاہدہ کرنا پڑے گا لہذا درحقیقت تین امکانات ہیں جو ایک نظام کے پیش نظر پیدا
دیے گئے نظام کو مطمئن xn 2 x تک 1 x ہوتے ہیں کہ وہ سب سے پہلے کیا ہیں کوئی حل نہیں ہوسکتا ہے کہ آپ حل تلاش نہ کرسکیں۔
کرنے والا دوسرا منفرد حل اور آخر میں ایک سے زیادہ حل درحقیقت جب آپ کہتے ہیں کہ یہ ایک سے زیادہ حل ہے
تو یہ ایک لامحدود حل ہونے جا رہا ہے لامحدود حل کا سیٹ
،تو آئیے ہم یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ اس قطار کو کیسے استعمال کیا جائے مساوات کے دیے گئے نظام کو حل کرنے کے لیے میٹرکس
مائنس تین x برابر پانچ چار z مائنس ٹو y برابر ہے نو تین z پلس فور y مائنس دو x تو آئیے ایک مثال دیتے ہیں کہ دیا گیا نظام مائنس تین
برابر سات کے برابر سسٹم ہمیں میٹرکس مائنس تھری مائنس دو چار صفر 3 مائنس 2 4 مائنس 3 2 کی شکل میں لکھنے کی z جمع دو y
پر اندازہ کرتے ہیں کہ ہمیں جو ملتا ہے وہ نو پانچ سات صحیح ہے xyz کوشش کرتے ہیں اور
تو ان نو پانچ سات کو مستقل اصطلاحات کہا جاتا ہے۔ مساوات اور یہ میٹرکس جو ہمارے یہاں موجود ہے یہ وہی ہے جو کوفیشینٹ میٹرکس کے
نامعلوم ہیں xyz نام سے جانا جاتا ہے اور یہ
جو سسٹم ہم نے میٹرکس کے لحاظ سے صحیح لکھا ur تو یہ گتانک میٹرکس ہے یہ نامعلوم ہیں اور یہ مستقل اصطلاحات ہیں جو اب دی گئی ہیں
ہے اب آئیے ہم اس شکل میں لکھنے کی کوشش کریں جس کی ہمیں ضرورت ہے لہذا ہم جو کرنے جا رہے ہیں وہ ہے عدد میٹرکس لکھیں اور پھر
اسے میٹرکس رائٹ مائنس تھری کے مستقل کے ساتھ بڑھا دیں۔ مائنس دو چار صفر تین مائنس دو چار منفی تین دو ہم اسے مستقل میٹرکس کے ساتھ
بڑھانے جا رہے ہیں ہم اس بڑھے ہوئے میٹرکس کو استعمال کرکے سسٹم کو حل کرنے جا رہے ہیں لہذا پہلے حل کرنے کی کوشش کرنے سے
میں تبدیل کرنے کی کوشش کریں۔ دیے گئے گتانک میٹرکس کو قطار میں تبدیل کرنے کی کوشش کریں ایکیلون میٹرکس let us پہلے آئیے اسے
مائنس تین is میں سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا پڑے گا کہ لیڈنگ گتانک یا پہلا نان زیرو کوفیشینٹ تلاش کریں لہذا پہلی نان زیرو گتانک پہلی قطار
ہے
تو آئیے بناتے ہیں۔ اس کو ایک میں
ایک پر بدل دیں r کو ایک سے ایک کو مائنس تین گنا r تو ہم کیا کرنے جا رہے ہیں
تو ہمارے پاس جو ہوگا وہ ہے ایک دو بائی تین مائنس فور بائی تھری پر آپریشن کے ایک ہی سیٹ کا اطلاق کریں میٹرک کا مستقل بھی اس لیے آپ
کے پاس مائنس تھری ہوگا جب آپ مائنس ون بائے تھری لگاتے ہیں
تو آپ اسے مائنس تھری صفر تین مائنس دو پانچ چار مائنس تھری دو سات حاصل کرتے ہیں اگلی چیز اس کالم کے دیگر عناصر کو صفر کرنا ہے
جس کا مطلب ہے کہ ہمارے پاس یہاں ایک ہے لہذا ان میں سے ایک صفر ہے
ایک صفر صفر سے بدل دے گا r تین منفی چار گنا r تین اسے r تو ہمیں اس چار کو صفر میں تبدیل کرنا چاہئے
تو ہمارے پاس ایک ہی چیز ہوگی دو بائی تین منفی چار ضرب تین تین مائنس ٹو کو کرنا پڑے گا
تو ہم نے اسے صفر کر دیا ہے اسی طرح اس ایک کو دو کو تین سے ضرب دیں منفی چار سے
تو آپ کے پاس مائنس آٹھ سے تین آہ مائنس تین مائنس آٹھ سے تین اور اسی طرح دو جمع 16 بذریعہ 3 آپ کے پاس مائنس 3 5 ہے 7 جمع بارہ
اور اس کے نتیجے میں جو میٹرکس ہمارے یہاں ہے وہ ہے ایک دو ضرب تین مائنس چار ضرب تین بڑھا ہوا مائنس تین صفر تین مائنس دو پانچ صفر
مائنس سترہ ضرب تین بائیس ضرب تین انیس اب آئیے ہم اس ذیلی میٹرکس کو دیکھتے ہیں جو ہمارے پاس ہے یا پہلے کالم اور پہلی قطار کو چھوڑ
کر باقی دو بائی دو ذیلی میٹرکس کو یہاں ایک بار پھر لیڈنگ گتانک کو دیکھتے ہیں جو کہ تین ہے اس کا دوبارہ نان صفر ہمیں بنانا ہوگا۔ ان کو ایک میں
بدل دیں
دو ایک دو سے تین منفی چار سے تین اور پھر آپ کے پاس ہوگا منفی تین صفر ایک مائنس دو بائی تین پانچ بائی r دو کو ایک سے تین گنا r تو ہم
تین صفر مائنس سترہ ضرب تین بائیس بائی تین اور نوے اب اس کو دیکھتے ہوئے آئیے دوسرے کالم کے اس کے دوسرے عناصر کو صفر میں
تین جمع r تین کو r دو سے بدل دیا جاتا ہے اور اسی طرح دوسرے ایک کے لئے r ایک منفی تین سے دو گنا r ایک کو r تبدیل کرتے ہیں
تین سے بدل دیا جاتا ہے۔ سترہ بار معذرت یہ دو بہ تین آہ دو بہ تین اور یہاں جمع سترہ بہ تین گنا ر دو
تو ہمارے پاس ایک صفر صفر ہے اور یہاں ہم دو کو تین سے دو کو تین سے ضرب دے رہے ہیں
نائن اور پھر یہاں ہم اسے مائنس تھری مائنس دس بائی تھری کے ساتھ بڑھا by جمع 4 ur by three ہے fo تو آپ کے پاس صفر منفی
رہے ہیں اور پھر ہمارے پاس ایک مائنس ٹو بائی تھری پانچ بائی تھری ہے یہاں یہ صفر بائیس بائی تین مائنس چونتیس بائی نو ہو جائے گا اور آخر
کار ہمارے پاس انیس جمع پچاسی ضرب نو ہے ابھی ہم فائنل میٹرکس لکھتے ہیں کہ ہمارے پاس جو کچھ ہے وہ ہے ایک صفر صفر صفر ایک صفر
ہمارے پاس مائنس فور بائی تین جمع چار بائی نو ہے
تو نتیجہ نکلے گا ہمارے پاس جو ہے وہ مائنس آٹھ ضرب نو مائنس دو بائی تین ہے اور اسی طرح ہمارے پاس چھیاسٹھ منفی تینتیس چھ چھ مائنس
چونتیس ہو جائے گا دو تین بتیس بائے نو اور اسی طرح دوسرے کے لیے مائنس 19 بائی 3 5 بائی 3 181 معذرت 171 جمع 85
تو آپ کے پاس 6 صحیح ہے 171 جمع 85 6 7 جمع 8 یہ 15 1 ہونے جا رہا ہے
تو 256 پر نو اور آخر کار ہمارے پاس یہ ایک رہ گیا ہے
تو آئیے اسے ایک میں تبدیل کریں
تین آپ کے پاس ایک صفر مائنس آٹھ ضرب نو ضرب آٹھ ضرب نو مائنس انیس بائی r تین کو تبدیل کرنے جا رہے ہیں۔ نو سے بتیس بار r تو ہم
تین صفر ایک مائنس دو بائی تین پانچ بائی تین صفر صفر ایک اور پھر ہمارے پاس بتیس پر دو چھپن ہوں گے اب آئیے باقی دو عناصر بناتے ہیں۔
تین جمع r دو سے دو سے تین گنا r ایک اور اسی طرح r تین جمع r ایک کو آٹھ سے بدل کر نو گنا r تیسرے کالم میں صفر میں اس طرح
کو ہم یہاں ختم کریں گے صرف شناختی میٹرکس ہے لیکن اگر آپ دیکھیں گے دوسرے سرے پر ہمارے پاس صرف 3 7 اور 8 ہوں گے۔ اور r
اس لیے اب ہم آخری کو لکھنے کی کوشش کریں کہ ہمارے پاس کیا ہے
برابر اور اس طرح فائنل ہم جس حل کی z برابر 7 اور y برابر 3 x تو
کے برابر b توقع کرتے ہیں وہ تین سات آٹھ ہے درحقیقت یہ دیے گئے نظام کا حل ہے لہذا فطری سوال کو مساوات کا ایک نظام دیا گیا ہے لہذا

قطار کی ary ایک نظام کا محور دیا گیا ہے لہذا اس کو لاگو کرنے پر اب لکیری مساوات کا دیا ہوا نظام ہو گا۔ قطار ہی عنصر کو جانے دیں۔
کے b سے b tilde اور rho کے a ڈیش یا ٹلڈ سے ڈینیوٹ کرنے دیں a پر کی جاتی ہیں اب مجھے لیٹ b اور a کارروائیاں جو
کے نام سے جانا جاتا ہے b tilde کے برابر tilde x کو ظاہر کرنے دیں کہ میرے پاس ایک نیا سسٹم ہے جسے rho
کے b tilde برابر a tilde x تو یہ نیا حاصل کردہ نظام ہے جس میں دیا گیا نظام ب کے برابر کلہاڑی ہے اور میرے پاس نیا نظام ہے
سے صرف ایلیمنٹری قطار a حاصل کر سکتے ہیں tilde کے برابر ہے یعنی آپ a is rho tilde ساتھ میرا واحد تعلق یہ ہے کہ
صرف سے حاصل کیا جاتا a tilde ہے a جو کہ b tilde right برابر ہے b rho کی کارروائیوں کو لاگو کر کے اور اسی طرح
سے ab ڈیلٹا b رائٹ کے لیے اسی طرح سے قطار کی ابتدائی کارروائیوں کو لاگو کر کے اس طرح b tilde اور b ہے اسی طرح
پر a حاصل کیا جاتا ہے۔ صرف قطار کی ابتدائی کارروائیوں کو لاگو کرنے سے یہاں صرف ایک چیز یہ ہے کہ آپریشنز کا وہی سیٹ جو آپ
a tilde x اور ax equal to b سسٹم ax equal to b well پر بھی لاگو ہوتا ہے اب دعویٰ یہ ہے کہ b لگاتے ہیں وہ
کے پاس ہے حل کے ایک ہی سیٹ کو اچھی طرح سے اس حقیقت کو کیسے ثابت کیا جائے کہ اس کے ثبوت میں جانے سے tilde برابر
پہلے یہاں ایک چیز کا مشاہدہ کرنا پڑے گا
ہے rho ah تو آئیے کچھ آسان خصوصیات کا مشاہدہ کرنے کی کوشش کریں کہ اگر
اسے آسانی سے دیکھا جا rho e کے برابر کا rho اوقات کے i ایک ابتدائی ہے قطار کا آپریشن یہ صرف ایک آپریشن ہے پھر rho تو
سکتا ہے صرف تینوں ابتدائی کارروائیوں کو لاگو کر کے اسے صرف ایک پر لاگو کرنے سے کم از کم تین سے تین تک اس کی تصدیق ہو سکتی ہے۔
میٹرکس کے لیے مشکل نہیں ہے لیکن تین بائی تھری میٹرکس کے لیے آسان ہونا چاہیے بس اسے تین بائی تھری n by n میٹرکس اگرچہ عام
میٹرکس اے پر لگائیں اور اسی طرح شناختی میٹرکس پر اسی ایلیمنٹری قطار کے عمل کو لاگو کریں اور اسے اس سے ضرب دیں کہ یہ دونوں ایک
ہیں اور ایک جیسے ہیں اور اس کی وجہ سے جو کوئی فوری طور پر دیکھ سکتا ہے وہ درج ذیل ہے درحقیقت مندرجہ ذیل نتائج ہیں پہلا یہ ہے کہ
تک ایلیمنٹری قطار کی کارروائیوں کا ایک محدود سیٹ ہونے دیں دائیں rho s آگے بڑھنے سے پہلے میں یہ کہوں کہ قطار ایک قطار دو کو
میٹرکس ہونے دیں پھر آپ ابتدائی قطار کی کارروائیوں کے ان تمام n by n کو ایک a میرے پاس قطار کے آپریشنز کا ایک محدود سیٹ ہے
محدود سیٹ کو ایک ایک کرکے لاگو کریں پچھلے والے کی وجہ سے کوئی آسانی سے پہچان سکتا ہے کہ یہ صف کے ابتدائی آپریشنز کے ایک ہی
رائٹ سے ضرب ہوتا ہے لہذا یہ صرف میٹرکس ضرب ہے a سیٹ جیسا ہوگا جو پہلے شناختی میٹرکس پر لاگو ہوتا ہے اور پھر صرف میٹرکس
قطار کے ابتدائی آپریشنز کو شناختی میٹرکس پر ایک ایک کر کے لاگو کر رہے ہیں اور پھر آپ اسے میٹرکس s اور یہاں سب سے پہلے آپ ان
کے ساتھ ضرب دے رہے ہیں دوسری چیز جو آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر آپ قطار کے ایک ہی سیٹ کو لاگو کرنے جا رہے
ہیں۔ میٹرکس اے پر ایک ایک کر کے ابتدائی آپریشنز ایک جیسے ہوں گے جیسا کہ آپ شناختی میٹرکس پر ہر قطار کے ابتدائی آپریشن کو اسی ترتیب
پر لاگو کرتے ہیں a کو rho 1 جب آپ l میں لاگو کرتے ہیں اور آخر میں ای ویل کے ساتھ ضرب کرتے ہیں۔
شناخت کے اوقات پر قطار 2 کا rho 1 اور اب جب آپ rho 1 بار کی شناخت کے برابر ہو گا لہذا شناخت کے اوقات کا rho 1 تو یہ
اطلاق کرنے جا رہے ہیں
جو شناخت کے اوقات میں a پر rho 1 کا شناخت کا وقت rho 2 کا ہے شناخت کے اوقات میں rho 1 تو آپ کو کیا ملے گا جو آپ کو
کے برابر ہوتا ہے لہذا صرف انڈکشن کے ذریعہ کوئی بھی باقی چیزوں کو ان دو چیزوں کے ساتھ درست ثابت کرسکتا ہے اب ایک چھوٹا rho 1
m از n میٹرکس کے لئے بھی رکھتا ہے بھی m از n سا مشاہدہ یا ایک نوٹ جو میں صرف یہاں بیان کروں گا۔ کہ اسی طرح کا ورژن بھی
میٹرکس کے لئے بھی رکھتا ہے پہلی چیز جس کا صحیح مشاہدہ کرنا پڑے گا ایک بار جب آپ اس حقیقت کا مشاہدہ کر لیں گے اب ایک چیز جو آسانی
کوئی دو ہیں اگر قطاریں کوئی بھی قطار ایک b اور a سے محسوس کر سکتی ہے وہ یہ ہے کہ ایک آسان چیز دوبارہ کوئی دیکھ سکتا ہے کہ اگر
کوئی بھی دو میٹرکس ہیں جن کو ضرب کیا جاسکتا ہے b اور a ابتدائی قطار کا عمل ہے اور اگر
ٹھیک ہے یہ a times b کے برابر ہے۔ ab rho کیا ہے؟ rho تو ایک سادہ سی چیز جس کا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے وہ یہ ہے کہ اس کا
کی شناخت کے اوقات کی rho کی یہ ab افسوس کی قطار a times b کا استعمال کریں rho کیسے فالو کرتا ہے صرف پچھلے والے
کی طرح ہوگی لیکن شناخت کی قطار یہ دوبارہ ایک میٹرکس ہے اور ہم جانتے ہیں یہ کہ میٹرکس ضرب ہم آہنگی ab قطار کی شناخت کے اوقات
ہے
کے برابر ہے لیکن اس حقیقت کو استعمال کریں کہ میٹرکس rho کے ab تو آئیے اب ان تمام چیزوں کو استعمال کریں جو کہ شناختی اوقات
کے ساتھ ضرب b ہے اور پھر آپ اسے میٹرکس rho کا a اوقات i صرف ایک میٹرکس ہے لہذا یہ rho phi ضرب ہم آہنگی ہے اور
rho s rho s معاف کریں اگر rho s ہے اور اس لیے اگر b گنا rho a یہ صرف rho کا a اوقات i دیں جو ایک جیسا ہے لیکن
rho s ابتدائی قطار کی کارروائیوں کا ایک محدود مجموعہ ہے۔ پھر وہی نتیجہ نکالا جو ہم نے پہلے کہا تھا کہ rho 2 rho 1 مائنس 1
کے ساتھ ہے اگر یہ اس پر عمل کرتا ہے اگر یہ ابتدائی قطار rho one مائنس دو قطار کے ساتھ مرکب ہے rho s مائنس ون پر مشتمل ہے
پر عمل کرتی ہے ab کی کارروائی اگر یہ
ایک صرف اس میٹرکس to rho two rho مائنس ٹو nus one rho s پر مشتمل ہے۔ rho s rho s mi تو یہ ویسا ہی ہوگا۔
سے ضرب کریں ایک بار جب ہمارے پاس یہ ہو جائے s پر عمل کرنے دیں صرف
کے برابر دیا ہوا نظام ہے b تو اب کوئی آسانی سے دکھا سکتا ہے کہ ان دونوں کا حل ایک ہی ہوگا یہ کیسے ممکن ہے کہ اتنا کلہاڑی دکھائے
نظام کا حل ہے درحقیقت اوپر والے نظام کا x اب فرض کریں کہ
ہے کوئی بھی ابتدائی قطار کا آپریشن ہمارے پاس ہے اور اس لیے ایک بار ہمارے rho a کے برابر ہے جہاں rho کے b rho کا ax تو
لہٰذا پچھلے اشارے میں ہم rho کے t مساوی rho of a times x پاس یہ ہے لیکن استعمال کریں پچھلا یہ کہنے کے مترادف ہے کہ
ہے جو ہمارے پاس تھا سسٹم x کے برابر ہے جو حل b tilde کے برابر tilde x نے صرف چند منٹ پہلے استعمال کیا تھا یہ ایک
اب اس حقیقت کو استعمال کریں کہ ایلیمنٹری قطار b tilde مساوی a tilde x کے برابر بھی سسٹم کے لیے حل ہے b ایکس کے لیے
کے برابر a tilde x b tilde ان سسٹم کا حل ہے x کی کارروائیاں الٹی ہوتی ہیں اور اس لیے ہمارے پاس جو ہے وہ یہ ہے کہ اگر
کے برابر ہے لہذا ہم نے جو کچھ کیا وہ صرف ایک ابتدائی قطار کے آپریشن کے لیے ہے اور b سسٹم کے محور کا حل o ہے۔ x als پھر
اب ہم جانتے ہیں کہ ایک جیسی چیز ایلیمنٹری قطار کی کارروائیوں کی ایک محدود ترتیب کے لیے بھی ہوتی ہے جب مکمل طور پر لاگو ہوتا ہے اور
کا ایک ہی حل ہے لہذا ہم نے جو کچھ بھی کہا ہے اس b tilde مساوی a tilde x کے برابر اور سسٹم b اس لیے سسٹم کا محور
حاصل ہو جائے tilde کے حل کا ایک ہی سیٹ ہے اگر a tilde x کے برابر b tilde اور ax کے برابر سسٹم b طرح
حاصل کیے جاتے ہیں صرف ابتدائی قطار کی کارروائیوں کے ایک محدود b tilde اور tilde سے b اور a تو معذرت اگر بالترتیب
b برابر tilde x سیٹ کو لاگو کر کے صرف قطار کی کارروائیوں کے ایک محدود سیٹ کو لاگو کر کے ایک نیا نظام حاصل کر سکتے ہیں ایک
کے حل کا b tilde کے برابر a tilde x کے برابر ہے اور سسٹم b کے ہم نے ابھی نتیجہ اخذ کیا ہے کہ سسٹم ایکس برابر tilde
y مائنس پانچ x برابر ایک آٹھ y جمع دو x برابر مائنس اکیس تین y مائنس تین x ایک ہی سیٹ ہے اب آئیے ایک اور مسئلہ کرتے ہیں دو
برابر مائنس انتالیس کے برابر ہے کوئی دیکھ سکتا ہے کہ یہ متعین نظام پر مساوات کا ایک حد سے زیادہ طے شدہ سیٹ ہے، یہ اوور ڈیڈڈڈ ہے ہم

لیکن ہمارے پاس تین مساواتیں ہیں اب ہم y اور x اسے اوور ڈیٹڈڈ سسٹم کیوں کہتے ہیں کیونکہ ہمارے پاس جو ہے وہ صرف دو ہے متغیرات
سسٹم کو حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں آئیے پہلے بڑھا ہوا میٹرکس لکھیں یا اس سے پہلے پہلے میٹرکس کی شکل 2 مائنس 3 3 2 آٹھ مائنس
پر ہمیں مائنس بیس دینا چاہئے ایک ایک اور مائنس چودہ یہ وہ نظام ہے جو ہم نے اب بڑھا ہوا میٹرکس دو تین آٹھ منفی تین دو مائنس xy پانچ لکھیں
پانچ کو لکھنے کی کوشش کرتے ہیں آئیے اسے میٹرکس مائنس اکیس مائنس انتالیس کے مستقل کے ساتھ بڑھاتے ہیں یہ دیا ہوا بڑھا ہوا ہے۔
میٹرکس میں لکھ دیا ہے سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا پڑے گا کہ Augmented میٹرکس یا یہ سسٹم ہے اور ہم نے سسٹم دیا ہے ہم نے بطور
لیڈنگ گتانک ہے اور ہمیں اسے ایک میں تبدیل کرنا پڑے گا s لیڈنگ گتانک تلاش کریں۔
ایک سے بدل دیا جائے r ایک سے دو بار r ایک کو r تو آئیے یہ کرتے ہیں کہ
تو آپ کے پاس جو ہوگا وہ ایک مائنس تھری بائی ٹو ہے ہم اسے مائنس بیس کے ساتھ بڑھا رہے ہیں۔ ایک دو کرکے
تو آئیے دوسری چیزیں بھی رکھتے ہیں کیونکہ یہ تین دو ایک آٹھ منفی پانچ منفی انتالیس ہے لہذا اگلا کام جو کرنا پڑے گا وہ یہ ہے کہ پہلے کالم
تین سے مائنس آٹھ r تین کو r ایک اور اسی طرح r دو مائنس تین گنا r ٹو کی جگہ r تین یا r کے باقی عناصر کو صفر میں تبدیل کریں
i ایک مائنس تین سے دو کو بڑھاتے ہیں آئیے اسے مائنس اکیس بائی دو سے بڑھاتے ہیں پہلا ایک سیکنڈ ایک ہمارے پاس صفر ہے r دو r گنا
مائنس ہے have 2 دوبارہ صفر ہے یہاں ہم کیا کریں گے
جمع 3 بار اس کا جو کہ اڑسٹھ سے دو اور پھر مائنس پانچ ہے ہم اسے آٹھ جمع چوبیس کو دو سے ضرب دے رہے ہیں اور by 2 1 تو جمع 9
یہاں آپ کے پاس مائنس انتالیس جمع اکیس ہو گا آٹھ ایک سے اب تک 62 آئیے کوشش کریں۔ فائنل کو لکھنے کے لیے اس لیے جو میٹرکس ہم آخر
میں یہاں سٹیج میں حاصل کرتے ہیں وہ ہے ایک صفر صفر مائنس تھری بائی دو تیرہ بائی دو چودہ بائی دو بڑھا ہوا مائنس اکیس بائی دو ساٹھ پانچ
ضرب دو اسی ایک ایک پچاس سوری ایک تیس جی ہاں کیونکہ ایک باسٹھ بائی دو جو کہ اکیاسی ایک سو اکیاسی ہے ایک سو انتالیس ٹھیک ٹھیک اکیاسی
مائنس انتالیس جو ہمیں گیارہ مائنس نو دے گا جو کہ بارہ سات منفی چار تین ہے
تو ہمارے پاس بتیس ٹھیک ہوں گے اس میں تیس ہوں گے دو اب اگلی ایک جس کو دیکھنا ہو گا یہ اصطلاح ہے جسے ہمیں صفر میں تبدیل کرنا پڑے
شروع کرتے ہیں conv گا اگر آپ
دو ایک صفر صفر مائنس تین بائی r ٹو میں تبدیل کرنا پڑے گا اس کی جگہ دو سے دو تیرہ گنا r تو ہمیں آپ کے لیے کیا کرنا پڑے گا اسے ایک
دو آپ کے پاس ایک ہوگا
تو باقی قطاریں اچھوتی ہیں آپ کے پاس اکیس بائی دو ہیں جو کہ پانچ بتیس ہیں مجھے باقی چیزوں کو صفر میں تبدیل کرنا پڑے گا
دو r تین کو مائنس چودہ سے دو گنا r ایک سے بدل دیا جاتا ہے اور اسی طرح r دو جمع r ایک کو تین سے دو بار r تو میں کیا کروں گا
تھری سے بدل دیا جاتا ہے میرے پاس ایک صفر صفر ایک صفر ہوگا اور پھر مجھے یہاں کام کرنا پڑے گا مائنس اکیس بائی دو رائٹ r جمع
پانچ میں تین بائی دو جو پندرہ بائی دو مائنس اکیس بائی دو ہے اور اسی طرح میرے یہاں پانچ ہوں گے اور آخری ایک بتیس مائنس ستر بائی دو جو
پینتیس ہے ہاں یہ پینتیس ہونا چاہئے بالکل ہاں وہ پینتیس ہونا چاہئے ہاں
تو پچھلا یہ ایک اڑسٹھ ہونا چاہئے تاکہ آپ اسے چوراسی جمع تین کے طور پر حاصل کریں
تو یہ پینتیس ہونے والا ہے ہاں
تو ہمارے پاس حتمی نتیجہ والا میٹرکس یہ ہے حتمی نتیجہ والا میٹرکس ایک صفر صفر ایک صفر ایک صفر صفر اور پھر آپ کے پاس جو ہوگا وہ ہے مائنس
تین پانچ صفر
نہیں ہے معذرت ٹھیک ہے z برابر افسوس ہے کوئی z برابر پانچ اور y برابر مائنس تین x تو آئیے اب ہم لکھتے ہیں مساوات کا آخری سیٹ
اب سسٹم کا حل ہے اگر آپ اس کو دیکھتے ہیں s تو تھی
تو آخری قطار مکمل طور پر صفر ہو جاتی ہے اب اگر کوئی سسٹم موجود ہے
تو کوئی ایسا سسٹم ہے جس میں جب آپ میٹرکس کو اس کی قطار کی شکل میں کم کرتے ہیں۔ قطار کو کم کیا ایکیلون فارم اور اگر آخری قطار صفر
نکلتی ہے لیکن اگر آپ قطار کی ابتدائی کارروائیوں کے ایک ہی سیٹ کو مستقل میٹرکس پر لاگو کرتے ہیں اور نوٹس کرتے ہیں کہ آخری اصطلاح یا
جو کچھ بھی ہو جہاں بھی ہو یہاں صفر ترتیب دیں اور اگر آپ کو ایک غیر صفر کی اصطلاح
تو کوئی آسانی سے یہ نتیجہ اخذ کر سکتا ہے کہ اس طرح کے نظام کا کوئی حل نہیں ہے یا ہم صرف درجہ بندی کے لحاظ سے ایک نوٹ کرتے
بڑھا a کے برابر ہو میٹرکس کا درجہ a ہیں کہ لکیری مساوات کے نظام کا ایک حل ہوتا ہے اگر دیے گئے میٹرکس کی رینک یا عددی میٹرکس
اگر یہ دونوں ان دو میٹرکس کے درجات ایک دوسرے سے ملتے ہیں b کے ساتھ مستقل میٹرکس b ہوا
تو آپ کہتے ہیں کہ فلاں سسٹم کا حل ہے اگر ان کے پاس نہیں ہے
y جمع x برابر تیرہ تین z جمع دو y مائنس تین x ایک اور مثال دیتے ہیں دو n ow تو ہم کہتے ہیں کہ فلاں سسٹم کا کوئی حل نہیں ہے
برابر ایک یہ دیا ہوا نظام ہے اب پہلے ہم لکھنے کی کوشش کریں اس دو مائنس تھری دو z مائنس تین y مائنس چار x برابر دو تین z مائنس
پر لاگو ہوتا ہے xyz تین ایک مائنس ایک تین مائنس چار مائنس تھری کا میٹرکس فارم جب سسٹم پر لاگو ہوتا ہے جب نامعلوم
تو مجھے تیرہ دو اور ایک دینا چاہئے اب ہمیشہ کی طرح پہلے ہم بڑھا ہوا میٹرکس دو تین تین لکھیں مائنس تھری ایک مائنس چار دو مائنس ایک مائنس
تھری بڑھا ہوا تیرہ دو عددی میٹرکس کے ساتھ جب ہم میٹرکس کے مستقل کو عددی میٹرکس کے ساتھ جوڑتے ہیں
تو ہم اسے بڑھا ہوا میٹرکس کہتے ہیں ہم سب سے پہلے غیر صفر قطاروں کو تلاش کرتے ہیں اور کوئی غیر صفر قطاریں نہیں ہوتیں۔ اس معاملے
میں اور اس وجہ سے ہمیں جو ملتا ہے وہ یہ ہے کہ ہم چوتھی غیر صفر عدد کو تلاش کرتے ہیں پہلی قطار جو صرف دو ہونے والی ہے ہم اسے
بقیہ قطاریں اچھوتی ہیں مائنس تھری بائی ٹو ایک ایک es r one ایک سے دو ٹم ہوتا ہے۔ r ایک کی جگہ r میں تبدیل کرتے ہیں r ایک
مائنس ایک مائنس چار مائنس تھری اور پھر یہاں یہ مائنس تھری ہے معذرت تیرہ بائی دو دو ایک اب ہمیں پہلے کالم کے دیگر عناصر کو صفر میں
بدل دے گا r تین سے مائنس آدھا گنا r تین کو r دو اور r ایک جمع تین کو دو بار r ایک سے r تبدیل کرنا ہو گا۔ آئیے ہم کرتے ہیں کہ یہ

تو ہمارے پاس کیا ہوگا
ون کی گنتی کرتے ہیں جو ایک r ایک r تو پہلے کالم میں ایک صفر صفر ہوگا دوسرا کالم پھر ہمارے پاس ہوگا صفر ایک صفر اب ہم تیسرا ایک
جمع تین ضرب دو ہے
تو جس کا مائنس آٹھ ضرب مائنس آہ ہوگا
تو ہمارے پاس بارہ ضرب گیارہ دوسری قطار برقرار رہے گی مائنس آٹھ ضرب گیارہ تیسری قطار آر تین مائنس چھ ھ جمع مائنس نصف ضرب آٹھ
ضرب گیارہ
تو جمع چار ضرب گیارہ کے ساتھ بڑھا ہوا آخری کالم تیرہ ضرب دو جمع تین ضرب دو بار مائنس پینتیس ضرب گیارہ
ایک غیر تبدیل شدہ تیسرا ایک مائنس سینتیس بائی دو جمع پینتیس nd تو آپ کے پاس اتنا ہوگا مائنس ایک صفر پانچ پر گیارہ دوسری قطار سیکو
ضرب بائیس ہے
تو اس صورت میں نتیجہ میٹرکس ایک صفر صفر صفر ایک صفر ایک مائنس بارہ ضرب گیارہ ہے لہذا آپ کے پاس مائنس ایک ضرب گیارہ مائنس آٹھ

ضرب گیارہ سیکنڈ ایک مائنس ہے بیس مائنس چھیاسٹھ جمع چار بائی گیارہ جمع چار
تو آپ کے پاس مائنس باسٹھ بائی گیارہ ہو گا آخری کالم میں آپ کے پاس 13 میں 11 ہو گا جو کہ 143 مائنس 105 ہے
تو آپ کے پاس یہ 38 بائی گیارہ ہو جائے گا افسوس مائنس اڑتیس بائیس بائیس دوسرا کوئی تبدیلی نہیں ہے یہ صرف یہ ہے آخری جو آپ کے پاس ہو گا وہ ہے 37 سے 11 جو کہ چار کوئی سات نہیں
تو چار کوئی نہیں سات جمع آہ مائنس چار کوئی نہیں سات جمع پینتیس جو آپ کو تین پچھتر دے گا لہذا یہ ہے آپ کو گیارہ کے بدلے تین پچھتر دیں گے معذرت بائیس پر
تو یہاں آخری عنصر جو کہ مائنس باسٹھ بائی گیارہ ہے ہم اسے ایک میں تبدیل کر دیں گے
تو r تین میں تھری کی جگہ گیارہ مائنس ال ہو جائے گا یہاں تک کہ اڑسٹھ سے
تو ہمارے پاس جو ہوگا وہ ہے ایک صفر صفر صفر ایک صفر مائنس ایک بائی گیارہ مائنس آٹھ ضرب گیارہ ایک آخری کالم اڑتیس بائیس بائیس مائنس پینتیس بائی گیارہ اور یہاں آپ کے پاس آہ ہوگا یہ ہے مجھے مائنس مائنس تھری پچھتر اور مائنس 60 دیں گے مائنس 62 پر جو مجھے صرف 6 by 22 دے گا مجھے آدھا دے گا اور 11
تو میرے پاس صرف 3 ہوگا۔
تو اب ہمیں کیا کرنا ہے اس مائنس ون کو تبدیل کرنا ہے۔ گیارہ اور مائنس آٹھ ضرب گیارہ ایک میں صفر میں معاف کریں
دو جمع آٹھ سے r ٹو کو r تین سے بدل دیا جائے اور اسی طرح r ایک جمع ایک سے گیارہ گنا r ایک کو r تو آئیے اب یہ کرتے ہیں کہ تین سے بدل دیا جائے یہ پہلے اور دوسرے کالم میں ایک صفر صفر صفر ایک صفر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے اور ان حسابات کی r گیارہ گنا بنیاد پر یہ ایک بار پھر واضح ہوتا ہے کہ آخری کالم دوبارہ صفر صفر ہے، آئیے ہم حتمی کالم کی گنتی کرتے ہیں جو بڑھا ہوا ہے جو ہمارے پاس دو r تین جو کہ تین ضرب گیارہ ہے دوسرا ایک r جمع ایک از گیارہ ضرب nty2 دو سے ایک اڑتیس r ہوگا وہ ہے
تین r تو مائنس پینتیس ضرب گیارہ جمع آٹھ ضرب گیارہ ضرب
تو جو چوبیس ضرب گیارہ ہے اور آخری اصطلاح صرف تین ہے
تو نتیجہ کا میٹرکس یہ ہے ایک صفر صفر صفر ایک صفر صفر صفر ایک
تو اڑتیس جمع اڑتیس جمع چھ جو مجھے 44444 بائی بائیس دے گا مجھے صرف دو ملے گا باقی ایک مائنس پینتیس جمع چوبیس جو صرف مائنس گیارہ پر ہے گیارہ
تو میرے پاس صرف ایک ہوگا اور آخری صرف تین ہے لہذا حل دو منفی ایک تین ہے اس کے ساتھ ضروری حل ہے اس کے ساتھ اس لیکچر کو روکتے ہیں اگلے لیکچر میں ہم لکیری مساوات کے نظام کو حل کرنے پر کچھ اور مثالیں دیکھیں گے۔ خاص طور پر ان سسٹمز پر جن کا کوئی eq حل نہیں ہے اور جن کے پاس لاتعداد حل موجود ہیں آپ سب کا شکریہ

Pruthvi@IITK