خوش آمدید طلباء کا خیرمقدم میٹرکس پر لیکچرز کی سیریز کے آخری لیکچر میں ہم نے دیکھا جسے ایلیمنٹری قطار آپریشنز کے نام سے جانا جاتا
کے نام سے row reduced echelon matrix ہے اور ہم نے دیکھا کہ اس کو حاصل کرنے کے لیے کس طرح استعمال کیا جائے جو کہ
جانا جاتا ہے۔ پچھلے لیکچر کے آخر میں ہم نے ایک مثال دیکھی اب ایک اور مثال دیتے ہیں میٹرکس کو برابر کرتے ہیں 0 0 0 3 0 1 0 0 4
صفر صفر صفر صفر چار دو صفر یہ وہ میٹرکس ہے جو ہمارے پاس پہلے ہے آپ کو جس چیز پر غور کرنا پڑے گا وہ یہ ہے کہ 0 0 0 0 1
ہمارے پاس صفر کی قطار ہے

کے ساتھ تبدیل کیا جائے گا جو ہمارے پاس ہوگا وہ ہے 0 3 0 1 0 0 4 1 0 4 2 0 0 r4 کو r3 تو آئیے اسے آخری ایک پر دھکیلیں
ہم پہلی غیر صفر کال قطار کو دیکھیں جو کہ پہلی ہے اور پہلا غیر صفر عنصر یہ تین ہے 0 0 0

ایک سے تبدیل کیا جائے گا جو ہمارے پاس صفر ہوگا بذریعہ تین صفر r میں تبدیل کرنے کی کوشش کریں ایک سے تین گنا r تو آئیے ایک
دوسرا عنصر جو اسی کالم میں ہے جو چار e معذرت صفر ایک صفر ایک سے تین دوسری قطاریں غیر تبدیل شدہ ہیں اب آئیے تبدیل کرتے ہیں
ہے ایک پہلی قطار میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی صفر ایک صفر ایک سے تین دوسری r تین مائنس چار بار r تین ہے اس کی جگہ r میں صفر
قطار دوبارہ برقرار رہتی ہے صفر صفر چار ایک تیسری قطار ہم بنا رہے ہیں ایک تبدیلی صفر مائنس چار گنا صفر جو صفر ہے چار مائنس چار گنا
ایک جو صفر ہے دوبارہ دو منفی چار گنا صفر جو دو صفر ہے مائنس چار گنا ایک از تین آپ کے پاس مائنس چار ضرب تین ہے آخری قطار میں
کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اور پھر اگلی قطار آئیے ہم اس ذیلی میٹرکس کو اس حصے کو دیکھتے ہیں

تو پہلی ایک غیر صفر قطار ہے اور غیر صفر عنصر چار ہے

دو صفر ایک صفر ایک سے تین صفر صفر ایک ایک بذریعہ چار صفر صفر دو مائنس r تو آئیے اسے ایک آر دو میں تبدیل کریں ایک سے چار گنا
دو ہے AZ چار بذریعہ تین صفر صفر صفر صفر اب آپ کے پاس

دو صفر ایک صفر ایک سے r تین مائنس دو گنا r تھری کی جگہ r تو آئیے اس دو کو صفر میں تبدیل کرنے کی کوشش کریں thr ee
دو جو نصف صفر r تین منفی چار ضرب تین مائنس دو بار r صفر صفر ایک ایک ضرب صفر صفر دو مائنس دو گنا ایک جو دوبارہ صفر ہے
صفر صفر صفر ہے اور اس طرح نتیجہ میں میٹرکس یہاں صفر ایک صفر ایک صفر تین صفر ہے صفر ایک بذریعہ چار صفر صفر صفر
تو مائنس فور بائی تھری مائنس نصف جو کہ مائنس گیارہ ضرب چھ آخر میں آپ کے پاس ہے لہذا آپ کو اس حصے پر غور کرنا ہوگا آپ کے پاس
ایک غیر صفر قوت غیر صفر عنصر ہے کیا یہ گیارہ ضرب چھ مائنس الیون کو تبدیل کرے گا سکس اس کو ایک آر تھری میں بدل دے گا مائنس
تین صفر ایک صفر ایک صفر ایک تین صفر صفر ایک ایک سے چار صفر صفر صفر ایک باقی چیزیں صفر ہونے والی ہیں اور r سکس سے گیارہ گنا
ایک مائنس ایک سے تین r ایک کی جگہ r پھر اب میرے پاس ایک سے چار ہے اور ایک سے تین یہاں مجھے انہیں صفر میں تبدیل کرنا پڑے گا
غیر تبدیل شدہ صرف ایک چیز یہ ہے r تین صفر ایک صفر تینوں چیزیں r دو مائنس ایک سے چار گنا r دو کو r تین اور اسی طرح r گنا
کہ ایک سے تین منفی ایک سے تین گنا ایک جو صفر ہے اسی طرح اگلا ایک صفر صفر ایک ایک بذریعہ چار صفر صفر صفر ایک معذرت یہ صفر ہے
یہ ایک سے چار نہیں ہے آپ کے پاس صفر صفر صفر صفر صفر ہے

تو یہ ہے اس طرح قطار کی ابتدائی کارروائیوں کو لاگو کرنے سے حاصل کی گئی قطار میں کمی کا ایکیلون میٹرکس درج ذیل میٹرکس ہے 0 1 0
مائنس 2 3 1 ab اور آخری قطار ہے 0 0 0 0 اب آئیے ایک اور کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر میٹرکس 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
میں تبدیل کرنے کی کوشش کریں rre مائنس 4 دو پانچ آئیے ہم اسے اس کے

تو پہلی قطار غیر صفر ہے اور پہلا عنصر غیر صفر عنصر ایک ہے لہذا ہمیں پریشان نہ کریں کہ ہمارے پاس کیا ہوگا اس مائنس چار کو صفر میں
تبدیل کرنا ہے

ایک سے بدل دیں گے r دو جمع چار گنا r ٹو کو r تو

1 r تو پہلی قطار میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی 1 مائنس 2 3 دوسری قطار مائنس 4 جمع 4 گنا

تو مائنس 4 جمع 4 گنا 1 جو ہے 0 2 جمع چار گنا مائنس دو

تو یہاں آپ کے پاس جو ہوگا وہ مائنس ہے۔ چھ آخری ایک پانچ جمع چار گنا تین جس کا مطلب ہے پانچ جمع بارہ

تو میں سترہ کے ساتھ ختم ہو جاؤں گا اب آئیے اگلی قطار کو دیکھتے ہیں

تو غیر صفر ایک کے آگے یہ مائنس چھ سترہ ہے جو کہ ایک بائے دو میٹرکس ہے

دو سے بدل دیا جاتا ہے پہلی قطار میں کوئی r تو ہمارے پاس ہوگا اس مائنس سکس کو ایک آر ٹو میں تبدیل کرنے کے لیے مائنس ون سے چھ گنا
تبدیلی نہیں ہوتی ایک مائنس دو تین صفر ایک مائنس سترہ بائی چھ ہمارا اگلا مقصد یہ ہے کہ ہمارا یہ مائنس ٹو ہے جسے ہمیں تبدیل کرنا پڑے گا۔
یہ صفر میں ہے

تو آئیے یہ کریں

دو مجھے اگلے سال میں ایک صفر ہوگا مجھے یہاں 0 r ایک جمع دو گنا r دو سے بدل دوں گا معذرت r ایک کو r تو میں کیا کروں گا میں
جس کا مطلب ہے 3 منفی 17 بہ 3 اور میرے پاس مائنس سترہ ضرب چھ ہو گا 2 r ہوگا جمع 2 ضرب 1 r چاہیے اور میرے پاس میرا 1

تو تین منفی سترہ ضرب تین کیا ہے جو نو منفی سترہ ضرب تین ہے

تو نو مائنس سترہ آپ کے پاس آٹھ ہوں گے

تو مائنس آٹھ

تو یہ ختم ہو جائے گا ایک صفر مائنس آٹھ بائی تین صفر کے ساتھ اوپر ای مائنس سترہ بائی سکس یہ وہ میٹرکس ہے جس کے ساتھ ساتھ فائنل ایچ
نے ایچیلون میٹرکس فائن کو کم کر دیا ہے جس کے بارے میں کہا گیا ہے کہ کس طرح کمپیوٹنگ کیسے کی جائے قطار میں کمی آئی ایپسیلون
میٹرکس آئیے اس کی کچھ ایپلی کیشنز تلاش کرنے کی کوشش کریں یا اس کے کچھ ایپلی کیشنز کو دیکھیں۔ پہلی ایپلی کیشن جو ہمارے پاس ہوگی
وہ یہ ہے کہ میٹرکس کی رینک کے نام سے جانے والی چیز کو تلاش کرنا ہے کہ کوئی میٹرکس کے رینک کی وضاحت کیسے کرتا ہے لہذا میٹرکس
اکیلے میٹرکس کو کم کرتے ہیں۔ ایک قطار h کے رینک کو اس کی قطار میں غیر صفر قطاروں کی تعداد کے طور پر بیان کیا جاتا ہے جس سے آپ
میٹرکس تک گھٹا کر غیر صفر قطاروں کی تعداد کو دیکھتا ہے اور یہ میٹرکس کا درجہ ہے اب سوال یہ ہے کہ ایک hlr میں دیا گیا میٹرکس
میٹرکس کو دیا گیا ہے کہ کتنی قطار میں کمی کی گئی ایکیلون میٹرکس ممکن ہیں اگر یہ منفرد ہے

تو یہ درجہ بناتا ہے احساس پھر جو تعریف ہم نے دی ہے وہ معنی رکھتی ہے اگر یہ منفرد نہیں ہے

تو کیا کریں اگر آپ کے پاس دو ہونے جا رہے ہیں

تو میں کس پر غور کروں یہ تمام مسائل درحقیقت پیش آتے ہیں لہذا مجھے صرف ایک نوٹ کرنے دیں۔ اور میں اس کی تفصیلات پر نہیں جاؤں گا
یقیناً یہ نوٹ بدیہی طور پر واضح ہو جائے گا کہ یہ سچ کیوں ہے

تو مجھے صرف تبصرہ کرنے دیں یا ایک نوٹ بنانے دیں کہ ایک میٹرکس کو دیا گیا

کے ساتھ منسلک ایکیلون میٹرکس کی قطار منفرد ہے جس کا مطلب ہے ایک میٹرکس کو دیا جائے a تو پھر

تو اس کے ساتھ منسلک صرف ایک قطار میں کمی کی گئی ایپیلون میٹرکس ہے یہ وہ طریقہ کار ہے جو ہم نے صرف چند منٹ پہلے دائیں طرف دیا
کے ساتھ منسلک قطار کو کم کیا ہوا ایکیلون میٹرکس دیتا ہے اور اس a ہے جو آپ کو منفرد قطار کم کرنے والا میٹرکس دیتا ہے یا اس میٹرکس

Prutor@IITK

طرح میٹرکس کے رینک کی تعریف سمجھ میں آتی ہے اب ہم میٹرکس کے رینک کا حساب لگانے کے لیے آگے بڑھتے ہیں آئیے ہم ان دونوں مثالوں
کو دیکھتے ہیں جو ہم نے پہلی مثال دیکھی تھی جو ہمارے پاس صرف چند منٹ پہلے تھی
تو آئیے ذرا اس پر نظر ڈالیں۔ پہلی مثال جو ہمارے پاس تھی وہ ہے صفر صفر 4 1 0 3 0 1 0 0 0 0 0 0 4 2 0 یہ وہ میٹرکس تھا
جو ہمارے پاس ہے اور اس سے rix کہے گا یہ چٹائی ہے۔ rre right رائٹ کو کم کر دیا گیا اسے صرف rre جو ہمارے پاس تھا اور
قطار میں غیر rre ہے 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 اور 0 0 0 0 یہ وہ میٹرکس تھا جو ہمارے پاس ہے اس لیے rre مماثل
صرف تین ہے آئیے اگلی مثال دیکھیں کہ ہمارے a تین ہے لہذا میٹرکس کا درجہ a صفر قطاروں کی تعداد نے ایپسیلون میٹرکس کو کم کر دیا
یا قطار اس کے rre پاس دوسری مثال تھی ہمارا میٹرکس یہ تھا ایک مائنس دو تین منفی چار دو اور پانچ یہ میٹرکس تھا جو ہمارے پاس تھا اور
میں غیر صفر rre تھا جو ہمارے پاس تھا لہذا اس rre مطابق ایک صفر مائنس آٹھ ضرب تین صفر ایک اور مائنس سترہ ضرب چھ یہ وہ
کا درجہ ہے اب ہم ایک اور کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم ایک کو دو تین چار پانچ دو ایک کے طور پر منتخب a قطاروں کی تعداد دو ہے لہذا
میں تبدیل کرنے کی کوشش کی ہے اگر آپ اس میٹرکس کو دیکھیں rre کرتے ہیں یہ وہ میٹرکس ہے جسے ہم نے اب اس کے
تو کوئی صفر قطاریں نہیں ہیں لہذا ہمیں اس کی فکر نہ کریں۔ پہلے ہم غیر صفر کال کو دیکھتے ہیں پہلے این زیرو کالم پر پہلا نان زیرو کالم
خود پہلا کالم ہے اور اس پہلے کالم میں پہلا نان زیرو کور عنصر وہ پہلا عنصر ہے جو خود پہلی قطار میں ظاہر ہوا تھا اور جو دو ہے اب ہم
اسے ایک میں بناتے ہیں
کے نصف سے بدل دیا گیا ہے آپ کے r ایک کو r کے نصف سے تبدیل کرنے دو میں اسے یہاں لکھتا ہوں r ایک کو r تو ہم جا رہے ہیں۔
پاس ایک تین سے دو چار پانچ دو ایک اگلی چیز جو آپ کو کرنی ہوگی وہ یہ ہے کہ اسے چار اور دو میں تبدیل کرنا پڑے گا۔ صفر
ایک کے پاس ایک اور تین سے دو کو تبدیل r تین سے مائنس دو گنا r تین کو r ایک اور r دو جمع مائنس کو چار گنا r ٹو کو r تو مجھے
کرنا پڑے گا مجھے ان دو کو صفر میں تبدیل کرنا پڑے گا لہذا یہ دونوں آپریشنز ہو چکے ہیں
تو اب ہم حساب کرتے ہیں باقی پانچ جمع مائنس چار میں تین بائے دو
تو مائنس چار میں تین بائی دو جو مائنس چھ ہے
تو پانچ مائنس چھ یہ مائنس ون ہے اگلا ایک جمع مائنس دو میں تین بائی دو
تو مائنس دو میں تین سے دو جو کہ کم سے کم ہے۔ ہم تین
تو ایک مائنس تھری جو مائنس ٹو رائٹ ہے
تو آئیے میں پہلی قطار اور پہلا کالم حذف کرتا ہوں جس کے ساتھ میں ختم کروں گا یہ سب میٹرکس ٹو بائی ون سب میٹرکس ہے جو بذات خود ایک
غیر صفر ہے غیر صفر ہے کوئی غیر نہیں ہے۔ صفر قطار ہے اور کوئی نہیں ہے اور آپ کے پاس قوت نہیں ہے پہلے والے میں غیر صفر
عنصر ظاہر ہوتا ہے
دو میں تبدیل کر دیا گیا ہے ایک تین سے دو r دو کو مائنس ون سے r دو کی جگہ ہے معذرت r ٹو میں r تو میں پہلے یہ بناتا ہوں کہ ایک
ایک جمع مائنس تین سے دو بار r ایک کو r صفر ایک صفر مائنس دو میرے پاس یہ ہے پھر مجھے باقی دو عناصر کو صفر میں بنانا پڑے گا میں
دو صحیح ہیں r تین جمع دو بار سے بدل دیا جائے گا۔ r تین کو r دو میں بدل دوں گا اور اسی طرح r
قطار میں غیر rre تو یہ دونوں غیر تبدیل ہونے والے ہیں اور میرے پاس صفر ہوگا ایک دیکھیں یہ ایپسیلون فارم ہے جو میرے پاس ہے اور اس
صفر عناصر کی غیر صفر قطاروں کی تعداد کم ہوئی ایکیلون میٹرکس دو ہے لہذا دی گئی درجہ بندی میٹرکس اے آئیے ایک اور امتحان کرتے ہیں۔
چوتھی مثال ہو سکتی ہے ایک دو صفر صفر صفر صفر صفر صفر صفر ایک تین یہ وہ میٹرکس ہے جو میرے پاس ہے mple
تو آپ کے پاس تین بائی چار میٹرکس ہے آئیے ہم اس میٹرکس کی رینک کا حساب لگانے کی کوشش کریں جس میں آپ کے پاس ایک صفر قطار ہے
دوسری قطار ہے جو ایک غیر صفر قطار سے اوپر ہے
تھری کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے R تو آئیے اسے آخری کی طرف دھکیلتے ہیں
تو میرے پاس کیا ہوگا ایک دو صفر صفر صفر ایک تین صفر صفر صفر صفر صفر صفر صفر صفر پہلا غیر صفر کالم یہ ہے آپ پہلا غیر
صفر کالم ہے اور پہلا غیر صفر عنصر بذات خود ایک ہے اس لیے مجھے اس کی کوئی فکر نہیں ہے اور یہ بھی ایک ہے اس لیے میں پریشان نہیں
ہوں اور اس کالم کے دوسرے عناصر بھی صفر ہیں
تو صرف ایک چیز کہ میں کروں گا۔ باقی چیزوں کو دیکھنا ہے مجھے باقی کو حذف کرنے دیں اور مجھے باقی سب میٹرکس دیکھنے دیں جو کہ دو
بائی تین میٹرکس ہے اور اب یہاں پہلا غیر صفر کالم نظر آتا ہے جو ایک اور صفر ہے اور دوبارہ اگر آپ اس کو دیکھو یہ ایک اور صفر یہ ایک اور
یہاں ہو رہا ہے ایک اور صفر یہ ایک یہ ایک اور صفر یہ پہلا غیر صفر کالم ہے اور پہلی اندراج خود ایک ہے اور دوسری t صفر کیا ہے؟
اندراج اس کالم میں ہے یا اس کالم یا صفر میں دیگر اندراجات ہیں لہذا میں پہلے کو ہٹا دیتا ہوں۔ اور دوسرا پہلا کالم اور پہلی قطار اور بقیہ صرف
صفر ہے لہذا میں نے آخر میں صرف تبادلہ کرکے میں نے ایک قطار کو کم کیا ایکیلون میٹرکس کے ساتھ ختم کیا ہے لہذا یہ دی گئی میٹرکس سے
دو ہے اس لیے میٹرکس کی رینک rre حاصل کردہ قطار میں کمی والی ایکیلون میٹرکس ہے غیر صفر قطاروں کی تعداد اس میٹرکس میں اور یہ
کہا جاتا invertibility جی ہاں رینک کے بارے میں کہا کہ اگلی اگلی ایپلی کیشن جسے ہم دیکھیں گے کہ وہ کیا ہے جسے میٹرکس کی
کو الٹا کہا جاتا ہے۔ اگر دوبارہ موجود ہو a ہے اس لیے مربع میٹرکس
کے برابر شناختی میٹرکس کے دائیں اگر آپ ba کے برابر ab کے آرڈر کے برابر اس طرح کہ b کے ساتھ b تو ایک مربع میٹرکس میٹرکس
کے ساتھ ضرب دیں b یا b کو a صرف
حاصل کر سکتے ہیں b تو یہ آپ کو شناخت دے گا۔ اسی ترتیب کا ٹائٹی میٹرکس پھر اگر آپ ایسا میٹرکس
ہے یا نہیں اور invertible ہے اب اس بات کی تصدیق کیسے کی جائے کہ آیا میٹرکس a invertible تو آپ کہتے ہیں کہ میٹرکس
ایلیمنٹری آپریشنز کہا جاتا ہے۔ row اسے استعمال کر کے کیا جا سکتا ہے جسے
تو درحقیقت یہ کیسے حاصل کیا جائے
کم ہوا ایکیلون میٹرکس دیئے گئے میٹرکس سے حاصل کیا گیا rs the rre matrix rho تو میں صرف ایک نتیجہ بتاتا ہوں فرض کریں کہ
شناخت ہو میٹرکس یہ r میٹرکس rre صرف اس صورت میں ہے جب a invertible fn مربع میٹرکس مجھے یہ کہنے دیں پھر
ارے r کا پتہ لگائیں جب آپ کو معلوم ہو جائے کہ آپ نے آخر کار جو rre کیسے چیک کریں کہ آیا میٹرکس الٹا ہے یا نہیں صرف اس کے
حاصل کیا ہے وہ صرف شناخت ہے
کا الٹا کہا جاتا ہے۔ سوال یہ ہے کہ یہ ایک میٹرکس کا الٹا ہے انوکھا میٹرکس کا الٹا e کو b تو ایسے میٹرکس کو الٹا ہونا ضروری ہے میٹرکس
جو ses وہاں الٹا ہے c اور b ہے درحقیقت اس کا جواب ہاں میں ہے اور یہ کیسے ثابت کیا جائے کہ فرض کریں کہ ایک الٹا میٹرکس ہے
c کے برابر i کے برابر ac کے برابر اور ba برابر i کے برابر ہے so ab
بار aa تو میں پہلے والے کو ایک اور دوسرے کو کہتا ہوں جیسا کہ اب ہم ایک سادہ چیز کا مشاہدہ کرتے ہیں جس میں کسی بھی مربع میٹرکس
میں جا رہا ہوں صرف ایک کیوں ہے
کے برابر ہونے دیں اور میں اسے لکھنے دیتا ہوں جیسا کہ میں اسے بیج لکھنے دو اور یہ بیج کیا ہیں جو ایک a aj تو آئیے ہم اسے ثابت کریں

صفر کے برابر ہو j ہو جائیں گے اگر میں
کے برابر نہیں یہ وہی ہے جو آپ کے پاس ہے j تو
کی k ہونے جا رہا ہے جو میٹرکس ضرب کے خلاصہ aij times bij ضرب i اس طرح a اور i تو اب آئیے ضرب کریں a
تک چل رہا ہے n تعریف کے مطابق ایک سے
میٹرکس an n by n ہے a تو آئیے فرض کریں کہ میٹرکس
k یہ شناختی میٹرکس کے اندراجات ہیں اور اس لئے یہ صرف ایک ہے اگر bkjs تک چل رہا ہے اب naikbkj سے k 1 تو آپ کے پاس
ایک ہیں اور ایک ہیں j اور
باقی bjj well کے برابر نہ ہو یہ صحیح ہے صفر ہونے جا رہا ہے لہذا واحد اصطلاح جو زندہ رہتی ہے وہ ہے k j تو جب تک کہ میرا
صفر ہونے والے ہیں te rms تمام
ایک ہے bjj صحیح ہے اور aijbjg تو میرے پاس جو ہوگا وہ صرف
ہے اور اسی طرح میرے پاس کیا ہوگا a کے ساتھ ختم کروں گا یہ صرف میٹرکس aij تو میں صرف
ہے a بھی a اوقات i ہے. میں اسے صرف 3 کے طور پر نشان زد کرتا ہوں اسی طرح a صرف ai تو مجھے صرف لکھنے دیں لہذا
کے برابر ہے بار ای میٹرکس ضرب کی ہم آہنگی کے لحاظ سے پہلے جو ہم نے b سے شروع کرتا ہوں bb جسے ہم چار کہتے ہیں لہذا میں
استعمال کیا وہ مساوات تین ہے دوسرا جو ہم نے استعمال کیا وہ مساوات دو ہے اور آخر میں جو ہم نے استعمال کیا ہے وہ میٹرکس ضرب کی ہم
سے اس کے cc ٹائم i یہ cc اوقات i لیکن c گنا ii آہنگی ہے لیکن مساوات ایک سے جو میرے پاس ہوگا میرے پاس بی اے ہوگا صرف
کے جو ہم نے دکھایا ہے کہ میٹرکس کا الٹا اگر یہ بالکل موجود ہے c برابر b بعد آتا ہے یہ مساوات چار سے آتا ہے اس طرح
a کے معکوس کے لیے ایسک کی خاصیت b اور a تو یہ منفرد ہوگا آئیے تصدیق کریں ایک میٹر ایک ہی ترتیب کے کسی بھی دو مربع میٹرک
اور b کی invertibility کا مطلب ہے ab کی invertibility اور ab کی inverse b کے برابر ہے inverse a
inverse right
تو منفرد معکوس جو ہم نے حاصل کیا
الٹا رائٹ ہے a تو ایک بار آپ جان لیں کہ ایک میٹرکس
پاور my ab پاور کا الٹا ہے ab تو آپ جانتے ہیں کہ الٹا انوکھا ہے پھر ہم اس الٹا کو ایک پاور مائنس ون سے ظاہر کریں گے جو ہمارے پاس
مائنس 1 رائٹ ہے اور یہ اس کے ذریعہ دیا گیا ہے. اب آئیے اس ثبوت کے ساتھ چلتے ہیں کہ کس طرح اس بات کی تصدیق کی جائے کہ کوئی
چیز معکوس ہے
شناخت ہے اور b inverse a inverse اوقات ab الٹا ہے اچھی طرح سے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ b کا معکوس ab تو
شناخت ہے اور انفرادیت کے لحاظ سے یہ ای بی کی شناخت ہونی چاہئے معذرت کے ساتھ یہ ab معکوس اوقات b inverse a اسی طرح
الٹا ایک الٹا جو ایک بار کے برابر ہے بی بی الٹا اوقات ایک الٹا لیکن بی بی الٹا صرف شناخت ہے b اباب اوقات کے لئے الٹا ہونا چاہئے
تو یہ ایک اوقات کی شناخت کے اوقات ایک الٹا کے طور پر ہے لیکن ایک وقت کی شناخت صرف ایک بار ایک معکوس ہے جو شناخت ہونے جا رہی
شناخت ہے اس لیے a کے برابر ہے اور ایک الٹا b الٹا ایک الٹا ایک بار b کے برابر ہے جو ab الٹا ایک معکوس اوقات b ہے اسی طرح
ہے b صرف b بار i لیکن b اوقات i ہوگا الٹا اوقات b میرے پاس
کی طرح ہے جو شناخت ہونے والا ہے b الٹا b تو یہ
کے ذریعہ دیا گیا الٹا ایک الٹا اب یہ سب کہنے کے بعد آئیے اب اس سے پہلے قطار کے b مکمل الٹا ہے جو ہے ab کا الٹا وہ ہے جو ab تو
ابتدائی آپریشن کا استعمال کرتے ہوئے میٹرکس کے الٹا کی گنتی کرتے ہیں
تو آئیے صرف یہ دیکھتے ہیں کہ اس کی گنتی کیسے کی جائے جو ہم نے مشاہدہ کیا وہ درج ذیل ہے کہ ہم نے کیا مشاہدہ کیا ہے فرض کریں کہ آپ
کے پاس ایک میٹرکس اے ہے جو الٹا ہے پھر اس میٹرکس اے کے ساتھ منسلک قطار میں کمی کی گئی ایکیلون میٹرکس شناختی میٹرکس ہے
تو بہت کم مشاہدات کیا ہے
تمام میٹرکس کے سیٹ پر ایک ابتدائی قطار کا عمل ہے rho تو اگر
ہے دونوں ایک ایک اور ایک دو دائیں ہیں جس کا مطلب ہے کہ آپ کو ایک rho ایک فنکشن کے طور پر جو کہ i s invertible تو قطار
جو کہ میٹرکس کی جگہ پر شناخت کے برابر ہے حقیقت میں آخری rho گنا g برابر ہے g اوقات rho اور فنکشن جی ملتا ہے جیسے کہ
سیٹ سیٹوں اور فنکشنز پر لیکچرز کے بارے میں ہم نے مشاہدہ کیا کہ اگر آپ کے پاس کوئی فنکشن ہے جو ایک ہے اور اس پر
تو اس طرح کے فنکشن کو انتا ہی الٹا کیا جا سکتا ہے
تو یہاں بھی وہی ہو رہا ہے کہ ہر قطار کے ابتدائی آپریشن کو اصل میں الٹا کیا جا سکتا ہے
تو اگر آپ پہلی قطار کے ابتدائی آپریشن کا مشاہدہ کریں جو کہ دو قطاروں کی آہ کا تبادلہ ہے جو کہ ایک الٹنے والا آپریشن ہے کیونکہ اس کا الٹا
دوبارہ قطاروں کے ایک ہی سیٹ کو تبدیل کر رہا ہے دوسری قطار کو ضرب دے کر آٹھویں قطار کو اسکیلر الفا سے کہو اسکیلر لیمبڈا یا الفا پھر الٹا
آپریشن اسی طرح کو ضرب دے رہا ہے جس میں اسکیلر ایک پر پھینکا جاتا ہے اس اسکیلر میں لیمبڈا یا الفا رائٹ کہتے ہیں اسی طرح تیسرے
قطار اس وقت دوبارہ r ah jth سے بدل دیا جاتا ہے. قطار کے علاوہ اسکیلر اوقات اسکیلر لیمبڈا اوقات ith قطار کو ith آپریشن میں
ایک الٹی میٹرکس پر میٹرکس پر کی جانے والی ابتدائی کارروائیاں ہیں یا ایلیمنٹری rho m ایک قطار دو وغیرہ وغیرہ rho الٹی ہے لہذا اگر
قطار کے آپریشنز ایلیمنٹری آپریشنز ہیں جو ایک پر کئے گئے انورٹیبل میٹرکس اے شناختی میٹرکس حاصل کرنے کے بجائے اس سے شروع کریں
اگر فرض کریں یا شناختی میٹرکس حاصل کرنے کے لیے الٹا میٹرکس اے پر ابتدائی آپریشنز کیے گئے ہیں
جب یہ ایک پر کیا جاتا ہے جو rho 1 مائنس ون لکھوں گا rho m rho m میں کنواں ہے میں اسے rho one تو پھر میرے پاس کیا ہے
ٹو پر مشتمل ہوتا ہے جب آپ rho مائنس ون سے rho m مائنس ون کے ساتھ rho m آپ کو ملتا ہے وہ شناختی میٹرکس ہوتا ہے اس طرح
اسے شناخت پر لاگو کرتے ہیں اور اس میٹرکس سے ضرب کرتے ہیں جو آپ حاصل کرتے ہیں. شناخت کا میٹرکس ہے
کا استعمال کیا گیا ہے جو شناخت پر لاگو ہوتا rho 1 مائنس ون rho m ہے جس پر rho m کا الٹا a تو اس کا مطلب یہ ہوگا کہ میٹرکس
ہے الٹا ہے
a تو کیسے ایک میٹرکس کا الٹا حاصل کریں صرف ابتدائی کارروائیوں کے وہی سیٹ لاگو کریں جو آپ نے شناختی میٹرکس حاصل کرنے کے لیے
کا الٹا اب ہمیں ایک مثال دیتے ہیں. a 1 1 1 1 پر اپلائی کیا ہے وہی آپریشنز کے سیٹ کو شناخت پر لاگو کریں جس کے ساتھ آپ ختم کریں گے
2 1 1 2 3 کے برابر یہ وہ میٹرکس ہے جو ہمارے پاس ہے
تو آئیے اس کا الٹا تلاش کرنے کی کوشش کریں
لکھیں اور اس کے ساتھ ساتھ شناخت لکھیں. میٹرکس اب آئیے ہم اس حصے کو شناختی میٹرکس میں تبدیل a تو ہمیں کیا کرنا پڑے گا میٹرکس
کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو کہ ایک سے مماثل ہے شناختی میٹرکس پر بیک وقت وہی آپریشنز لاگو کرتے ہوئے جب آپ کو معلوم ہو جائے کہ یہ
حصہ شناختی میٹرکس میں تبدیل ہو گیا ہے

Draft@IITK

میٹرکس جو ہم نے hlr تو ہم جانتے ہیں کہ یہ الٹا ہے اور پھر ایک جو آپ نے دوسرے سرے پر حاصل کیا ہے وہ اس کا الٹا ہے اور آخری قطار
حاصل کیا ہے اگر یہ شناختی میٹرکس نہیں ہے
h تو ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ میٹرکس الٹا نہیں ہے اچھی طرح سے ہم کنکشن کرنے کی کوشش کریں اس کو قطار میں تبدیل کریں
میں تبدیل کریں لہذا آپ کے پاس پہلی غیر صفر قطار پہلی ہے اور پہلا غیر صفر عنصر ایک ہے لہذا rre میٹرکس کو اس کے echelon
ہمیں پریشان نہ کریں آئیے ہم دوسرے کو تلاش کرتے ہیں دوسرے ہم ایک ہے اور ایک ہے
دو r ایک پہلی قطار میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی دوسری قطار r تین مائنس r ایک اور r دو مائنس r تو آئیے ہم انہیں صفر میں تبدیل کریں
ایک ایک مائنس ایک جو صفر دو مائنس ایک ہے جو ایک ایک مائنس ون ہے جو ہے صفر صفر مائنس ایک مائنس ایک مائنس ون ایک صفر r مائنس
ایک ایک مائنس ایک جو صفر ہے دو مائنس ایک جو ایک تین مائنس ایک ہے جو دو صفر مائنس ایک مائنس r تین مائنس r مائنس صفر صفر دوبارہ
ایک صفر مائنس صفر صفر ایک مائنس صفر ہے جو ایک ہے اب ہم اگلی غیر صفر قطار کو دیکھتے ہیں جو دوسری ہے اور اب ہم اس کو دیکھنے کی
کوشش کرتے ہیں کہ آپ کے پاس صفر ایک صفر ہے
تو ہم کیا کریں گے اس کے بجائے ہمیں اسے ایک میں تبدیل کرنا پڑے گا۔ پہلے سے ہی ایک ہے لہذا زحمت نہ ہونے دیں تبدیل کرنے کی کوشش
ٹو ایک مائنس صفر ہے r ایک مائنس r ٹو r تھری مائنس r تھری کی جگہ r دو r ایک مائنس r ایک میں r کریں۔ یہ ایک اور ایک صفر
جو ایک ایک مائنس ون ہے جو صفر ایک مائنس صفر ہے جو ایک ہے دوسرا حصہ ایک مائنس مائنس ون جو دو صفر ہے مائنس ایک جو مائنس ایک
صفر ہے مائنس صفر ہے جو صفر ہے دوسری قطار برقرار ہے صفر ایک صفر مائنس ایک ایک صفر تیسرا ایک آر تھری مائنس آر دو صفر مائنس
صفر جو صفر ایک مائنس صفر ہے صفر دو مائنس صفر ہے جو دو مائنس ایک مائنس مائنس ون ہے جو صفر صفر ہے مائنس ون ہے جو مائنس ون
ایک مائنس صفر ہے بس ایک آخر میں آپ کے پاس دو ہیں آئیے ہم اس دو کو ایک آر تھری میں تبدیل کرتے ہیں آر تھری کے نصف سے بدل دیا جاتا
ہے ایک صفر ایک دو مائنس ایک صفر صفر ایک صفر مائنس ایک ایک صفر صفر صفر ایک صفر مائنس ایک معذرت صفر مائنس آدھا اور آدھا
ایک مائنس آر ہے تین ایک صفر صفر آر ایک ایم انوس آر r تو اب آپ کے پاس جو ہوگا ہمیں اسے صفر آر میں تبدیل کرنا پڑے گا ایک کی جگہ
تھری دو مائنس صفر جو دو مائنس ایک مائنس مائنس نصف ہے
تو جو مائنس ایک جمع آدھا ہے
تو آپ کے پاس مائنس آدھا صفر مائنس آدھا ہے آپ کے پاس پھر مائنس آدھا ہے باقی چیزیں بدس
اکیلے rho h کا a تور صفر مائنس نصف اور نصف ہیں اس طرح ہم نے کیا حاصل کیا ہے شناختی میٹرکس ہے جو کہ دیے گئے میٹرکس
کو کم کیا گیا ایکیلون میٹرکس ہے اور اس لیے دیا گیا میٹرکس الٹا ہے اور ایک بار جب آپ کو معلوم ہو جائے کہ یہ الٹنے والا rho میٹرکس
میٹرکس ہے جو آپ نے دائیں ہاتھ سے حاصل کیا ہے اس کا الٹا ہے۔ اس طرح ایک الٹا برابر دو مائنس ایک بائے دو مائنس آدھا مائنس ایک صفر صفر
منفی آدھا اور آدھا اس کے ساتھ یہ لیکچر اگلے لیکچر میں رک جائے گا ہم کچھ اور ایپلی کیشنز قطار کی ابتدائی کارروائیوں کو دیکھیں گے خاص
طور پر مساوات کے نظام کو حل کرنے پر آپ کا شکریہ

Prutor@IITK