

विद्यार्थ्यांचे स्वागत आहे मॅट्रिक्सवरील व्याख्यानांच्या मालिकेतील शेवटच्या व्याख्यानात आम्ही पाहिले की प्राथमिक पंक्ती ऑपरेशन्स म्हणून ओळखले जाते आणि आम्ही ते कसे वापरायचे ते पाहिले ज्याला पंक्ती कमी केलेले एकेलॉन मॅट्रिक्स म्हणून ओळखले जाते. शेवटच्या लेक्चरच्या शेवटी आपण एक उदाहरण पाहिले आता आपण आणखी एक उदाहरण करू या मॅट्रिक्सला  $0003010041000004100$  शून्य शून्य शून्य चार दोन शून्य हे मॅट्रिक्स आहे जे आपल्याकडे पहिले आहे.

तुमच्या लक्षात आलेली गोंधळ म्हणजे आमच्याकडे शून्य पंक्ती आहे, म्हणून आपण ती शेवटच्या एकापर्यंत ढकलू या  $r_3$  ची  $r_4$  बरोबर बदलून घेतली आहे  $0301000410420000$  आम्ही प्रथम शून्य नसलेल्या कॉल पंक्तीसाठी पहा जे पहिले आहे आणि पहिले शून्य नसलेले घटक हे तीन आहेत, म्हणून आपण एक  $r$  मध्ये रूपांतरित करण्याचा प्रयत्न करूया एका  $r$  एक ने तीन गुणा  $r$  एक ने बदलला तर आपल्याकडे शून्य असेल तीन शून्य क्षमस्व शून्य एक शून्य एक एक करून तीन इतर पंक्ती अपरिवर्तित राहिल्या आता आपण थ रूपांतर करूया  $e$  त्याच स्तंभातील इतर घटक जो चार मध्ये शून्य  $r$  तीन आहे तो  $r$  तीन वजा चार पट  $r$  ने बदलला आहे एक पहिली पंक्ती अपरिवर्तित राहते शून्य एक शून्य एक करून तीन दुसरी पंक्ती पुन्हा अपरिवर्तित शून्य शून्य चार एक तिसरी पंक्ती आम्ही बनवत आहोत एक बदल शून्य वजा चार पट शून्य जो शून्य चार वजा चार पट एक जो शून्य पुन्हा दोन वजा चार पट शून्य जो दोन शून्य वजा चार पट एक तीन बाय तीन तुमच्याकडे वजा चार बाय तीन शेवटची पंक्ती अपरिवर्तित राहते आणि नंतर पुढील एक आपण या सबमॅट्रिक्सचा हा भाग पाहू या म्हणजे पहिला शून्य नसलेला पंक्ती आहे आणि शून्य नसलेला घटक चार आहे तर आपण त्याचे रूपांतर एक  $r$  दोन मध्ये करू या  $r$  दोन शून्य एक शून्य एकाने तीन शून्य शून्य एक एक करून चार शून्य शून्य दोन वजा चार बाय तीन शून्य शून्य शून्य शून्य आता तुमच्याकडे  $az$  दोन आहे तर या दोनचे शून्य  $r$  तीन मध्ये रूपांतर करण्याचा प्रयत्न करू या  $r$  तीन वजा दोन वेळा  $r$  दोन शून्य एक शून्य एक करून  $thr$   $ee$  शून्य शून्य एक एक बाय चार शून्य शून्य दोन वजा दोन गुणिले एक जे पुन्हा शून्य आहे  $r$  तीन वजा चार बाय तीन वजा दोन पट  $r$  दोन जे अर्धा शून्य शून्य शून्य शून्य आहे आणि

त्यामुळे येथे परिणामी मॅट्रिक्स शून्य एक शून्य एक शून्य तीन शून्य आहे शून्य एक बाय चार शून्य शून्य शून्य म्हणजे उणे चार बाय तीन उणे अर्धा म्हणजे उणे अकरा बाय सहा शेवटी तुमच्याकडे आहे म्हणून तुमच्याकडे हा भाग विचारात घ्यावा लागेल तुमच्याकडे शून्य नसलेले बल आहे हे अकरा बाय सहा म्हणजे उणे अकरा बाय सहा हे रूपांतर होईल सहा हे एक आर तीन मध्ये रूपांतरीत करेल वजा सहा ने अकरा गुणिले  $r$  तीन शून्य एक शून्य एक शून्य एक तीन शून्य शून्य एक एक चार शून्य शून्य शून्य एक उर्वरित गोष्टी शून्य होणार आहेत आणि नंतर आता माझ्याकडे एक बाय चार आहे आणि येथे एक एक करून तीन मला त्याचे शून्यात रूपांतर करावे लागेल  $r$  एक  $r$  एक वजा एक ने तीन वेळा  $r$  तीन आणि त्याचप्रमाणे  $r$  दोन च्या ऐवजी  $r$  दोन वजा एक ने चार वेळा  $r$  तीन शून्य एक शून्य सर्व तीन गोष्टी  $r$  फक्त एक गोंधळ अपरिवर्तित आहे ती म्हणजे एक बाय तीन वजा एक बाय तीन गुणा एक जे शून्य आहे त्याचप्रमाणे पुढील एक शून्य शून्य एक एक चार शून्य शून्य शून्य एक माफ करा हे शून्य आहे हे चार बाय चार नाही तुमच्याकडे शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य आहे तर अशा प्रकारे पंक्ती प्राथमिक क्रिया लागू करून मिळवलेले पंक्ती कमी केलेले एकेलॉन

मॅट्रिक्स खालील मॅट्रिक्स आहे  $01000001000001$  आणि शेवटची पंक्ती  $0000$  आहे आता आपण आणखी एक करूया उदाहरणार्थ मॅट्रिक्स  $ab$   $1$  उणे  $23$  वजा  $4$  दोन पाच हे त्याचे  $rre$  मध्ये रूपांतरित करण्याचा प्रयत्न करू या म्हणजे पहिली पंक्ती शून्य नसलेली आहे आणि पहिला घटक शून्य नसलेला घटक एक आहे म्हणून आपण त्रास देऊ नये म्हणून आपल्याकडे काय असेल.

या वजा चारचे शून्यात रूपांतर करणे म्हणजे  $r$  दोन ची जागा  $r$  दोन अधिक चार पट  $r$  एक होईल

त्यामुळे पहिली पंक्ती अपरिवर्तित राहते  $1$  वजा  $23$  दुसरी पंक्ती वजा  $4$  अधिक  $4$  पट  $r$   $1$

त्यामुळे वजा  $4$  अधिक  $4$  पट  $1$  म्हणजे  $02$  अधिक चार वेळा वजा दोन म्हणजे तुमच्याकडे जे असेल ते उणे आहे सहा शेवटचे एक पाच अधिक चार गुणिले तीन म्हणजे पाच अधिक बारा म्हणजे मी सतरा संपेल आता आपण पुढील पंक्ती पाहू म्हणजे शून्य नसलेल्या एकाच्या पुढे हे उणे सहा सतरा आहे जे एक बाय दोन मॅट्रिक्स आहे.

या उणे सहाचे एक आर टू मध्ये रूपांतर करण्यासाठी वजा एक बाय सहा गुणिले  $r$  दोन ने बदलले जाते पहिली पंक्ती अपरिवर्तित राहते एक वजा दोन तीन शून्य एक वजा सतरा बाय सहा येथे आमचे पुढील उद्दिष्ट आहे की हे वजा दोन आहे जे आपल्याला रूपांतरित करावे लागेल हे शून्यात करू तर आपण हे करूया मग मी काय करू मी  $r$  एक  $r$  दोनने बदलेन माफ करा  $r$  एक अधिक दोन पट  $r$  दोन मला पुढील वर्षी एक शून्य असेल मला येथे  $0$  पाहिजे आणि माझ्याकडे माझे  $1r$   $1$  असेल अधिक  $2$  गुणिले  $r$   $2$  म्हणजे  $3$  वजा  $17$  बाय  $3$  आणि माझ्याकडे वजा सतरा बाय सहा असेल तर तीन वजा सतरा बाय तीन म्हणजे नऊ वजा सतरा बाय तीन म्हणजे नऊ वजा सतरा तुमच्याकडे आठ असेल तर उणे आठ म्हणजे हे संपेल वर एक शून्य उणे आठ बाय तीन शून्य  $e$  उणे सतरा बाय सहा हे मॅट्रिक्स आहे जे अंतिम  $h$  बरोबर  $\rho$  कमी केले  $echelon$   $matrix$   $fine$  ची गणना कशी करायची हे सांगून

पंक्ती कमी केलेल्या एक्सलॉन मॅट्रिक्सची गणना कशी करायची हे सांगून त्याचे काही ऍप्लिकेशन्स शोधण्याचा प्रयत्न करूया किंवा त्यातील काही ऍप्लिकेशन्स पाहू या मॅट्रिक्सची रँक म्हणून ओळखली जाणारी पहिली ऍप्लिकेशन म्हणजे मॅट्रिक्सची रँक कशी परिभाषित केली जाते,

त्यामुळे मॅट्रिक्सची रँक

त्याच्या पंक्तीमधील शून्य नसलेल्या पंक्तींची संख्या म्हणून परिभाषित केली जाते  $h$  एकटे मॅट्रिक्स कमी केले.

दिलेला मॅट्रिक्स एका पंक्तीमध्ये  $h1r$  मॅट्रिक्समध्ये कमी केला जातो आणि शून्य नसलेल्या पंक्तींची संख्या पाहता ती मॅट्रिक्सची रँक असते आता प्रश्न मॅट्रिक्सला दिलेला आहे की किती पंक्ती कमी केलेले एकेलॉन मॅट्रिक्स शक्य आहेत जर ते अद्वितीय असेल तर ही रँक बनवते अर्थ नंतर आम्ही दिलेली व्याख्या अर्थपूर्ण आहे जर ती अद्वितीय नसेल तर काय करावे जर तुमच्याकडे दोन असतील तर मी कोणता विचार करावा या सर्व समस्या प्रत्यक्षात उद्भवतात म्हणून मला फक्त एक नोंद करू द्या आणि मी याच्या तपशिलांकडे जाणार नाही , अर्थातच ही नोट अंतर्ज्ञानाने स्पष्ट होईल की ते खरे का आहे, म्हणून मी फक्त टिप्पणी करू दे किंवा एक नोंद करू दे की मॅट्रिक्स  $a$  दिल्यास,  $a$  शी संबंधित रो कमी केलेले एकेलॉन मॅट्रिक्स अद्वितीय आहे याचा अर्थ मॅट्रिक्स दिल्यास याच्याशी संबंधित फक्त एक पंक्ती कमी केलेले एक्सलॉन मॅट्रिक्स आहे ही प्रक्रिया आहे जी आम्ही काही मिनिटांपूर्वी उजवीकडे दिली आहे जी तुम्हाला या मॅट्रिक्स  $a$  शी संबंधित अनन्य रो रिझ्यूड मॅट्रिक्स किंवा रो कमी केलेले एकेलॉन मॅट्रिक्स देते आणि अशा प्रकारे मॅट्रिक्सचा रँकच्या व्याख्येला अर्थ आहे

आता आपण मॅट्रिक्सच्या रॅकची गणना करण्यासाठी पुढे जाऊ या दोन दोन्ही उदाहरणे पाहू ज्याचे पहिले उदाहरण आपण काही मिनिटे आधी पाहिले होते म्हणून आपण फक्त पाहू या आमच्याकडे असलेले पहिले उदाहरण म्हणजे शून्य शून्य  $4 \ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0$  हे आमच्याकडे असलेले मॅट्रिक्स होते आणि  $rre$  उजवीकडे कमी केलेली पंक्ती त्याला  $rre$  राईट असे म्हणेल ही मॅट्रिक्स आहे आमच्याकडे असलेले  $rix$  आणि याशी संबंधित  $rre$  आहे  $0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1$  आणि  $0 \ 0 \ 0 \ 0$  हे आमच्याकडे असलेले मॅट्रिक्स होते त्यामुळे  $rre$  पंक्तीमधील शून्य नसलेल्या पंक्तींची संख्या कमी झाली आहे.

$a$  तीन आहे म्हणून मॅट्रिक्सची रॅक  $a$  फक्त तीन आहे आपण पुढचे उदाहरण पाहू या की आपल्याकडे दुसरे उदाहरण होते आपले मॅट्रिक्स हे एक वजा दोन तीन वजा चार दोन आणि पाच हे मॅट्रिक्स होते जे आपल्याकडे होते आणि  $rre$  किंवा पंक्ती कमी केलेले एक्सिलॉन मॅट्रिक्स याच्याशी संबंधित होते एक शून्य वजा आठ बाय तीन शून्य एक आणि उणे सतरा बाय सहा हा  $rre$  होता त्यामुळे या  $rre$  मध्ये शून्य नसलेल्या पंक्तींची संख्या दोन आहे म्हणून  $a$  ची रॅक आहे आता आणखी एक करूया उदाहरण म्हणून आपण दोन तीन चार पाच दोन एक म्हणून निवडू या हे मॅट्रिक्स आहे जे आपण आता त्याच्या  $rre$  मध्ये रूपांतरित करण्याचा प्रयत्न करू या जर आपण या मॅट्रिक्सकडे पाहिले तर शून्य पंक्ती नाहीत म्हणून आपण याबद्दल काळजी करू नये.

प्रथम आपण शून्य नसलेला कॉल प्रथम  $n$  पाहू शून्य कॉलमवर पहिला नॉन-झिरो कॉलम हा पहिला कॉलम आहे आणि त्या पहिल्या कॉलममधील पहिला नॉन झिरो कोअर एलिमेंट हा पहिला घटक आहे जो पहिल्या रांगेत दिसला होता आणि जो दोन आहे आता आपण याला एक बनवू या.

$r$  एक  $r$  च्या अर्ध्याने बदला मी ते येथे लिहू द्या  $r$  एक  $r$  च्या अर्ध्याने बदलला आहे तुमच्याकडे एक आहे तीन बाय दोन चार पाच दोन एक पुढील गोष्ट तुम्हाला करावी लागेल ती म्हणजे हे चार आणि दोन मध्ये रूपांतरित करावे लागेल शून्य म्हणजे मला  $r$  दोन ने  $r$  दोन अधिक वजा चार वेळा  $r$  एक आणि  $r$  तीन ने  $r$  तीन अधिक वजा दोन वेळा  $r$  एक माझ्याकडे एक आहे आणि तीन बाय दोन मला या दोनचे शून्यात रूपांतर करावे लागेल म्हणून या दोन ऑपरेशन्स केल्या आहेत म्हणून आता उरलेले पाच अधिक वजा चार ते तीन बाय दोन म्हणजे उणे चार ते तीन बाय दोन म्हणजे वजा सहा म्हणजे पाच वजा सहा ते वजा एक पुढील एक अधिक वजा दोन ते तीन बाय दोन अशी गणना करू.

दोन ते तीन बाय दोन म्हणजे मि  $us$  श्री म्हणजे एक वजा तीन जे वजा दोन बरोबर आहे, तर मी पहिली पंक्ती आणि पहिला स्तंभ हटवतो ज्याचा शेवट मी करेन हे सब मॅट्रिक्स दोन बाय वन सब मॅट्रिक्स आहे जे स्वतः एक शून्य शून्य आहे आणि शून्य नाही आहे.

शून्य पंक्ती आहे आणि नाही आहे आणि तुमच्याकडे बल नाही आहे शून्य नसलेला घटक पहिल्यामध्ये दिसतो, म्हणून मी प्रथम बनवतो की एक  $r$  दोन मध्ये  $r$  दोन बदलले आहे क्षमस्व  $r$  दोन वजा एक मध्ये  $r$  दोन एक तीन द्वारे दोन शून्य एक शून्य वजा दोन माझ्याकडे हे आहे मग मला इतर दोन घटकांना शून्यात बनवावे लागेल मी  $r$  एक ने  $r$  एक अधिक वजा तीन च्या दोन वेळा  $r$  दोन मध्ये बदलेल आणि त्याचप्रमाणे  $r$  तीन च्या जागी  $r$  तीन अधिक दोन वेळा येईल  $r$  दोन बरोबर त्यामुळे हे दोन अपरिवर्तित राहणार आहेत आणि माझ्याकडे शून्य असेल एक पाहा हा माझ्याकडे असलेला एक्सिलॉन फॉर्म आहे आणि या  $rre$  row मधील शून्य नसलेल्या घटकांची संख्या

कमी केलेली echelon matrix ही दोन आहे

म्हणून दिलेली रॅक matrix  $a$  म्हणजे आणखी एक  $exa$  करूया  $mple$  हे चौथे उदाहरण असू शकते एक दोन शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य एक तीन हे मॅट्रिक्स आहे जे माझ्याकडे आहे

त्यामुळे तुमच्याकडे तीन बाय चार मॅट्रिक्स आहे चला या मॅट्रिक्सची रॅक काढण्याचा प्रयत्न करू या तुमच्याकडे शून्य पंक्ती आहे जी दुसरी पंक्ती आहे जी शून्य नसलेल्या पंक्तीच्या वर आहे, तर आपण ती शेवटच्या क्रमांकावर ढकलू या ती  $r$  तीन ने बदलली आहे, तर माझ्याकडे एक दोन शून्य शून्य शून्य शून्य एक तीन शून्य शून्य शून्य शून्य शून्य असेल तर पहिला नॉन-झिरो कॉलम हा तुम्ही आहात पहिला नॉन-झिरो कॉलम आहे आणि पहिला नॉन-झिरो एलिमेंट स्वतः एक आहे,

त्यामुळे मला याचा त्रास होत नाही आणि तो सुद्धा एक आहे

त्यामुळे मला त्रास होत नाही आणि त्या कॉलममधील इतर घटकही शून्य आहेत,

त्यामुळे मी फक्त एक गोष्ट करेन.

बाकीच्या गोष्टी बघायच्या आहेत मला उरलेला एक डिलीट करू द्या आणि मला उरलेले सब मॅट्रिक्स बघू द्या जे दोन बाय तीन मॅट्रिक्स आहे आणि आता इथे पहिला नॉन-झिरो कॉलम दिसेल जो एक आणि शून्य आहे आणि पुन्हा जर तुम्ही हे बघा एक आणि शून्य हे एक आणि शून्य काय काय  $t$  इथे घडत आहे एक आणि शून्य हा एक हा एक आणि शून्य हा पहिला नॉन-झिरो कॉलम आहे आणि पहिली एंट्री स्वतः एक आहे आणि दुसरी एंट्री त्या कॉलममध्ये आहे किंवा त्या कॉलममधील इतर नोंदी किंवा शून्य आहे, म्हणून मी पहिला काढून टाकतो.

आणि दुसरा पहिला कॉलम आणि पहिली पंक्ती आणि उरलेली एक फक्त शून्य आहे म्हणून मी शेवटी फक्त स्वॅप करून मी एक पंक्ती कमी केलेल्या एकेलॉन मॅट्रिक्ससह समाप्त केले आहे, म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्समधून शून्य नसलेल्या पंक्तींची संख्या मिळवलेली ही रो कमी केलेली एकेलॉन मॅट्रिक्स आहे या मॅट्रिक्समध्ये आणि हा  $rre$  दोन आहे म्हणून मॅट्रिक्सची रॅक होय, रॅकबद्दल म्हटल्यावर पुढील पुढील एंजलिकेशन जे आपण पाहणार आहोत ते मॅट्रिक्सची इन्व्हर्टिबिलिटी म्हणून ओळखले जाते

त्यामुळे स्केअर मॅट्रिक्स  $a$  इन्व्हर्टेबल असल्याचे म्हटले जाते.

जर पुन्हा एक चौरस मॅट्रिक्स मॅट्रिक्स  $b$  असेल तर  $b$  च्या क्रमाने  $b$  च्या बरोबरीचा क्रम असेल की  $ab$  बरोबर  $ba$  समान ओळख मॅट्रिक्स बरोबर तुम्ही फक्त  $a$  ला  $b$  किंवा  $b$  सह  $a$  चा गुणाकार केला तर तो तुम्हाला ओळख देईल त्याच क्रमाचे टायटी मॅट्रिक्स मग जर तुम्हाला असा मॅट्रिक्स  $b$  मिळवता आला तर तुम्ही म्हणता की मॅट्रिक्स  $a$  इन्व्हर्टेबल आहे आता मॅट्रिक्स इन्व्हर्टेबल आहे की नाही हे कसे पडताळायचे आणि हे पंक्ती प्राथमिक ऑपरेशन्स म्हणून ओळखले जाणारे वापरून केले जाऊ शकते.

तर हे प्रत्यक्षात कसे मिळवायचे म्हणून मी फक्त एक परिणाम सांगतो समजा  $rs$  the  $rre$  matrix  $\rho$  कमी केलेले एकेलॉन

मॅट्रिक्स दिलेल्या मॅट्रिक्स मधून मिळालेले स्केअर मॅट्रिक्स, मला हे सांगू द्या

तर  $rre$  मॅट्रिक्स  $r$  ही ओळख असेल तरच  $a$  invertible fn आहे मॅट्रिक्स मॅट्रिक्स इन्व्हर्टेबल आहे की नाही हे कसे तपासायचे फक्त एकदाच त्याचा  $rre$  शोधून काढा की तुम्हाला शेवटी मिळालेला  $r$  अरे ही फक्त ओळख आहे, मग अशा मॅट्रिक्सला इन्व्हर्टेबल असणे आवश्यक आहे, मॅट्रिक्स  $b$  ला  $e$  चा व्यस्त असे म्हणतात.

प्रश्न असा आहे की हा मॅट्रिक्सचा व्युत्क्रम आहे अनन्य मॅट्रिक्सचा व्यस्त आहे खरं तर उत्तर होय आहे आणि हे कसे सिद्ध करायचे की समजा  $a$  एक इन्व्हर्टेबल मॅट्रिक्स आहे  $b$  आणि  $c$  तेथे इन्व्हर असू द्या  $ses$  म्हणजे

$so ab is equal to i equal to ba$  आणि  $ac$  बरोबर  $i$  इकल टू  $c$  म्हणून मी पहिल्याला एक म्हणू आणि आता दुसऱ्याला एक असे म्हणू या, आता आपण एका साध्या गोष्टीचे निरीक्षण करू या फक्त ए का आहे म्हणून आपण ते सिद्ध करू या  $a_{ij}$  च्या बरोबरीने द्या आणि मी ते मला लिहू द्या  $i$   $ah$  म्हणून मला ते  $b_{ij}$  म्हणून लिहू द्या आणि हे  $b_{ijsb_{ij}}$  काय आहेत जे एक असेल तर मी  $j$  शून्य असेल तर  $j$  च्या बरोबरीचे नाही हे तुमच्याकडे आहे म्हणून आता  $a$  आणि  $i$  चा गुणाकार करू या  $i i i$  गुणाकार  $b_{ij}$  होणार आहे जे मॅट्रिक्स गुणाकार बेरीज  $k$  च्या व्याख्येनुसार एक ते  $n$  पर्यंत चालत आहे म्हणून आपण असे गृहीत धरू की मॅट्रिक्स  $a$  आहे  $an n by n$  मॅट्रिक्स म्हणून तुमच्याकडे  $k 1$  ते  $naikbkj$  पर्यंत चालत आहे आता  $bkjs$  या ओळख मॅट्रिक्सच्या नोंदी आहेत आणि म्हणून  $k$  आणि  $j$  एकच असतील तरच हे एक आहे, म्हणून जोपर्यंत माझे  $k j$  च्या बरोबरीचे होत नाही तोपर्यंत हे आहे शून्य होणार आहे

त्यामुळे फक्त एकच पद टिकेल ते म्हणजे  $bjj$  तसेच इतर सर्व ते  $rms$  शून्य होणार आहेत

त्यामुळे माझ्याकडे जे असेल ते फक्त  $a_{ijbjj}$

बरोबर आहे आणि  $bjj$  एक आहे म्हणून मी फक्त  $a_{ij}$  ने समाप्त करेन हे फक्त मॅट्रिक्स  $a$  आहे आणि त्याचप्रमाणे माझ्याकडे काय असेल तर मला फक्त लिहू द्या म्हणून  $a_i$  फक्त  $a$  आहे मी त्याला फक्त 3 म्हणून चिन्हांकित करू या त्याचप्रमाणे  $i$  गुणा  $a$  देखील  $a$  आहे आपण त्याला चार म्हणतो म्हणून मी  $bb$  ने सुरुवात करू या बरोबर  $b$  गुणा  $i$  हे तीन पासून आहे पण  $i b$  गुणिले  $ace$  आहे बरोबर हे दोन पासून येते जे  $ba$  सारखे आहे वेळा  $e$  मॅट्रिक्स गुणाकाराच्या संगतीने प्रथम आपण वापरलेले समीकरण तीन दुसरे म्हणजे आपण वापरलेले समीकरण दोन आणि शेवटी आपण जे वापरले ते मॅट्रिक्स गुणाकाराची संगतता आहे परंतु समीकरणातून माझ्याकडे जे असेल ते  $b$  आहे फक्त  $ii$  गुणिले  $c$  पण  $i$  वेळा  $cc$  हे  $i$  टाइम  $cc$  वरून येते हे समीकरण चार वरून येते अशा प्रकारे  $b$  समान  $c$  बरोबर आपण जे दाखवले आहे ते म्हणजे मॅट्रिक्सचा व्युत्क्रम जर अस्तित्वात असेल तर तो अद्वितीय असेल याची पडताळणी करूया एक मी एकाच क्रमाच्या  $a$  आणि  $b$  च्या कोणत्याही दोन स्केअर मॅट्रिक्ससाठी व्युत्क्रमासाठी धातूची गुणधर्म  $a$  आणि  $b$  ची अपरिवर्तनीयता सूचित करते  $ab$  ची अपरिवर्तनीयता आणि  $ab$  ची व्युत्क्रमाता  $b$  च्या व्युत्क्रम एक व्युत्क्रम उजवीकडे असते त्यामुळे आम्हाला मिळालेला अद्वितीय व्युत्क्रम मॅट्रिक्स  $a$  हे इन्व्हर्टेबल राईट आहे हे जाणून घ्या मग तुम्हाला माहीत आहे की व्युत्क्रम अनन्य आहे मग आपण तो व्युत्क्रम एका घात वजा एक द्वारे दर्शवू म्हणजे आपल्याकडे  $ab$  पॉवरचा व्यस्त आहे माय  $ab$  पॉवर वजा 1 उजवा आणि तो द्वारे दिला जातो  $b$  inverse  $a$  व्युत्क्रम आता आपण याच्या पुराव्यासह जाऊ या की काहीतरी व्युत्क्रम आहे हे कसे पडताळायचे

त्यामुळे  $ab$  चा व्युत्क्रम  $b$  inverse  $a$  व्युत्क्रम आहे हे तपासून पाहू या की  $ab$  गुणा  $b$  व्युत्क्रम  $a$  व्युत्क्रम ही ओळख आहे आणि त्याचप्रमाणे  $b$  व्युत्क्रम  $a$  आहे.

व्युत्क्रम वेळा  $ab$  ही ओळख आहे आणि विशिष्टतेनुसार ही  $eb$  ची ओळख असावी माफ करा ही अबब वेळा  $b$  साठी व्युत्क्रम असावी जी एक गुणा  $bb$  व्युत्क्रम गुणा व्युत्क्रम आहे परंतु  $bb$  व्युत्क्रम ही फक्त ओळख आहे म्हणून ही वेळा ओळख गुणा व्युत्क्रम सारखीच आहे परंतु वेळा ओळख फक्त एक गुणा व्यस्त आहे जी ओळख होणार आहे त्याचप्रमाणे  $b$  व्युत्क्रम एक व्यस्त गुणा  $ab$  जो  $b$  व्युत्क्रम एक व्यस्त गुणा  $b$  च्या समान आहे आणि एक व्युत्क्रम  $a$  ही ओळख आहे

त्यामुळे माझ्याकडे  $b$  च्या व्यस्त गुणा  $i$  गुणा  $b$  असेल पण  $i$  गुणा  $b$  फक्त  $b$  आहे

त्यामुळे हे  $b$  व्युत्क्रम  $b$  सारखे आहे जे ओळख होणार आहे

त्यामुळे  $ab$  चा व्यस्त आहे जो  $ab$  संपूर्ण व्यस्त आहे जो आहे  $b$  ने दिलेला एक व्युत्क्रम आता हे सर्व म्हटल्यावर आता आपण त्याआधी पंक्ती प्राथमिक ऑपरेशन वापरून मॅट्रिक्सच्या व्यस्ततेची गणना करूया, तर आपण जे निरीक्षण केले आहे ते खाली कसे मोजायचे ते पाहू या.

तुमच्याकडे मॅट्रिक्स  $a$  आहे जो इन्व्हर्टेबल आहे तर त्या मॅट्रिक्स  $a$  शी संबंधित पंक्ती कमी केलेले एकेलॉन मॅट्रिक्स हे ओळख मॅट्रिक्स आहे

त्यामुळे काही निरीक्षणे आहेत की काय आहे म्हणून जर  $\rho$  सर्व मॅट्रिक्सच्या सेटवर प्राथमिक रो ऑपरेशन असेल

तर पंक्ती  $i$   $s$  इन्व्हर्टेबल फंक्शन म्हणून  $\rho$  हे दोन्ही एक एक आणि एक दोन राईट आहे म्हणजे तुम्हाला दुसरे फंक्शन  $g$  मिळेल जसे की  $\rho$  गुणा  $g$  हे  $g$  गुणा  $\rho$  च्या समान आहे जे मॅट्रिक्सच्या जागेवर ओळखीच्या समान आहे खरेतर शेवटचा संच सेट्स आणि फंक्शन्सवरील लेक्चर्सचे आम्ही निरीक्षण केले आहे की जर तुमच्याकडे एखादे फंक्शन असेल जे एक असेल आणि त्यावर असे फंक्शन इतके सारखे उलट केले जाऊ शकते म्हणून येथेही तेच घडत आहे की प्रत्येक पंक्ती प्राथमिक ऑपरेशन प्रत्यक्षात उलट केले जाऊ शकते.

पहिल्या पंक्तीच्या प्राथमिक ऑपरेशनचे निरीक्षण करा जे दोन पंक्तींचे  $ah$  हे अदलाबदल करण्यायोग्य ऑपरेशन आहे कारण त्याचा व्युत्क्रम पुन्हा पंक्तींच्या समान संचाची अदलाबदल करत आहे दुसरी एक दिलेल्या पंक्तीला आठव्या पंक्तीला स्केलर अल्फा द्वारे गुणाकार करत आहे म्हणा स्केलर लॅम्बडा किंवा अल्फा नंतर व्युत्क्रम ऑपरेशन त्याच स्केलरने गुणाकार करत आहे ज्यावर मी फेकतो त्या स्केलरच्या एकावर लॅम्बडा किंवा अल्फा राईट म्हणा त्याचप्रमाणे तिसऱ्या ऑपरेशनमध्ये  $ith$  पंक्ती  $ith$  ने बदलली जाते पंक्ती अधिक स्केलर वेळा स्केलर लॅम्बडा गुणा  $r$   $ah$   $jth$  पंक्ती आता ती पुन्हा उलट करण्यायोग्य आहे म्हणून जर  $\rho$  एक पंक्ती दोन इत्यादि  $\rho m$  ही इन्व्हर्टेबल मॅट्रिक्सवर मॅट्रिक्सवर केल्या जाणाऱ्या प्राथमिक ऑपरेशन्स आहेत किंवा प्राथमिक पंक्ती ऑपरेशन्सवर

केल्या जाणाऱ्या प्राथमिक ऑपरेशन्स आहेत इन्व्हर्टेबल मॅट्रिक्स  $a$  ने ओळख मॅट्रिक्स मिळवण्याऐवजी ओळख मॅट्रिक्स मिळवण्यासाठी समजा किंवा इन्व्हर्टेबल मॅट्रिक्स  $a$  वर प्राथमिक ऑपरेशन्स केल्या गेल्या असतील तर माझ्याकडे  $\rho$  one काय आहे आणि मी ते  $\rho$  m  $\rho$  m वजा एक असे लिहीन  $\rho$  1 जेव्हा ते एखाद्यावर केले जाते तेव्हा तुम्हाला जे मिळते ते ओळख मॅट्रिक्स असते त्यामुळे अशा प्रकारे  $\rho$  m  $\rho$  m वजा एक सह  $\rho$  दोन बनलेला  $\rho$  वन सह बनलेला जेव्हा तुम्ही हे ओळखीवर लागू करता आणि तुम्हाला मिळालेल्या मॅट्रिक्ससह गुणाकार करता आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे म्हणून याचा अर्थ असा होतो की मॅट्रिक्स  $a$  चा व्यस्त  $\rho$  m आहे आणि  $\rho$  m वजा एक  $\rho$  1 आयडेंटिटीवर लागू केला आहे तो व्यस्त आहे तर कसे करावे मॅट्रिक्सचा व्युत्क्रम मिळवा फक्त प्राथमिक ऑपरेशन्सचा तोच संच लागू करा जो तुम्ही आयडेंटिटी मॅट्रिक्स मिळवण्यासाठी  $a$  वर लागू करा, ओळखीवर ऑपरेशन्सचा तोच संच लागू करा ज्याचा तुम्हाला शेवट होईल तो आता एक उदाहरण घेऊ .

1 1 1 1 2 1 1 2 3 च्या बरोबरीचे हे आपल्याजवळ असलेले मॅट्रिक्स आहे

त्यामुळे आपण याचा व्युत्क्रम शोधण्याचा प्रयत्न करूया मग आपल्याला मॅट्रिक्स  $a$  लिहावे लागेल आणि यासोबत ओळख लिहूया.

मॅट्रिक्स आता आपण हा भाग  $a$  शी सुसंगत असलेला भाग ओळख मॅट्रिक्समध्ये रूपांतरित करण्याचा प्रयत्न करू या, त्याच वेळी ओळख मॅट्रिक्सवर समान ऑपरेशन्स लागू करा म्हणजे एकदा आपल्याला कळले की हा भाग आयडेंटिटी मॅट्रिक्समध्ये रूपांतरित झाला आहे हे आपल्याला कळेल की तो इन्व्हर्टेबल आहे आणि नंतर दुसऱ्या टोकाला मिळालेला एक म्हणजे त्याचा व्युत्क्रम आहे आणि अंतिम पंक्ती  $h1r$  मॅट्रिक्स जो आपण प्राप्त केला आहे जर तो ओळख मॅट्रिक्स नसेल तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की मॅट्रिक्स इन्व्हर्टेबल नाही तसेच आपण उलगाडण्याचा प्रयत्न करूया.

याला पंक्तीमध्ये वर्त कर  $h$  echelon matrix ची  $rre$  मध्ये कमी करा म्हणजे तुमच्याकडे पहिली शून्य नसलेली पंक्ती पहिली आहे आणि पहिला शून्य नसलेला घटक एक आहे म्हणून आपण त्रास देऊ नये आपण इतर शोधू या एक आहे आणि एक आहे म्हणून आपण त्यांचे शून्यात रूपांतर करूया  $r$  दोन वजा  $r$  एक आणि  $r$  तीन वजा  $r$  एक पहिली पंक्ती अपरिवर्तित राहते  $r$  दोन वजा  $r$  एक एक वजा एक जो शून्य दोन वजा एक आहे जो एक वजा एक आहे शून्य शून्य वजा एक वजा एक एक वजा एक एक शून्य वजा शून्य शून्य पुन्हा आर तीन वजा आर एक एक वजा एक जो शून्य दोन वजा एक जो एक तीन वजा एक जो दोन शून्य वजा एक वजा एक शून्य शून्य शून्य शून्य एक वजा शून्य कोणती एक आहे आता आपण पुढची शून्य नसलेली पंक्ती पाहूया जी दुसरी आहे आणि आता ही पाहण्याचा प्रयत्न करूया तुमच्याकडे शून्य एक शून्य आहे, तर आपण त्याऐवजी काय करू म्हणजे आपल्याला हे एका मध्ये रूपांतरित करावे लागेल.

आधीच एक आहे म्हणून त्रास देऊ नका रूपांतर करण्याचा प्रयत्न करूया हे एक आणि एक शून्यात  $r$  एक  $r$  एक वजा  $r$  दोन  $r$  तीन च्या ऐवजी  $r$  तीन वजा  $r$  दोन  $r$  एक वजा  $r$  दोन एक वजा शून्य जे एक एक वजा एक आहे जे शून्य एक वजा शून्य आहे जे एक आहे दुसरा भाग एक वजा वजा एक जो दोन शून्य वजा एक जो वजा एक शून्य वजा शून्य जो शून्य दुसरी पंक्ती अपरिवर्तित राहिल शून्य एक शून्य वजा एक एक शून्य तिसरा एक आर तीन वजा आर दोन शून्य वजा शून्य जो शून्य एक वजा शून्य आहे शून्य दोन वजा शून्य आहे जे दोन वजा एक वजा वजा एक आहे जे शून्य शून्य वजा एक आहे जे वजा एक वजा शून्य आहे फक्त एक शेवटी तुमच्याकडे दोन आहेत चला या दोनचे एक आर तीन मध्ये रूपांतर करू या  $r$  तीनच्या अध्याऐवजी एक शून्य आहे एक दोन वजा एक शून्य शून्य एक शून्य वजा एक एक शून्य शून्य शून्य एक शून्य वजा एक एक माफ करा शून्य वजा अर्धा आणि अर्धा

त्यामुळे आता तुमच्याकडे जे असेल ते शून्य  $r$  मध्ये रूपांतरित करावे लागेल.

तीन एक शून्य शून्य आर एक मी  $inus$   $r$  तीन दोन वजा शून्य जे दोन वजा एक वजा वजा अर्धा म्हणजे जे वजा एक अधिक अर्धा आहे त्यामुळे तुमच्याकडे उणे अर्धा शून्य वजा अर्धा आहे तुमच्याकडे पुन्हा वजा अर्धा आहे इतर गोष्टी अपरिवर्तित राहतील शून्य वजा अर्धा आणि अर्धा अशा प्रकारे आम्ही काय मिळवले आहे आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे जो दिलेल्या मॅट्रिक्स  $a$  चा  $\rho$  h एकटा मॅट्रिक्स  $\rho$  कमी केलेला एकेलॉन मॅट्रिक्स आहे आणि म्हणून दिलेला मॅट्रिक्स इन्व्हर्टेबल आहे आणि एकदा तुम्हाला कळले की ते इन्व्हर्टेबल आहे हे तुम्हाला उजव्या बाजूला मिळालेले मॅट्रिक्स आहे.

अशाप्रकारे दोन वजा एक वजा दोन वजा अर्धा वजा एक एक शून्य शून्य वजा अर्धा आणि अर्धा याच्या बरोबरीचा व्युत्क्रम पुढील व्याख्यानात हे व्याख्यान थांबवेल, विशेषतः समीकरणे सोडवण्याच्या प्रणालीवर आणखी काही ऍप्लिकेशन्स पंक्ती प्राथमिक ऑपरेशन्स पाहू.

धन्यवाद.