

معکوس مثلثی افعال پر دوسرے لیکچر میں خوش آمدید کہ پہلے لیکچر میں ہم نے بنیادی مثلثی افعال کے الٹا میں بنیادی کی تعریف کی تھی جیسے اور $\tan^{-1} x$ $\sec^{-1} x$ $\cos^{-1} x$ $\sin^{-1} x$ کے لئے اس لیکچر میں ہم ان معکوس افعال کے درمیان کچھ شناخت $\csc^{-1} x$ اور $\cot^{-1} x$ کے درمیان الجھتے ہیں براہ کرم نوٹ کریں کہ یہ دونوں ایک x اور $\tan^{-1} x$ کے لئے احتیاط کا ایک چھوٹا سا لفظ ہے جو سائن انورس کو برابر لیتے ہیں۔ صفر کے لیے ہم جانتے ہیں کہ صفر کا سائن انورس صفر کے برابر ہے لیکن اُتے ہم x جیسے نہیں ہیں مثال کے طور پر ہم صفر پر ایک ہے جو صفر پر ایک ہے جس h الٹا سائن صفر الٹا ہے جو x کے ساتھ صفر کے برابر سائن x دائیں ہاتھ کی طرف کی گنتی کریں کی وضاحت نہیں کی گئی ہے اور اس لیے یہ ایک اچھی مثال ہے کہ یہ واضح کرنے کے لیے کہ یہ دونوں ایک جیسے نہیں ہیں دوسری چیز یہاں تمام حقیقی ah ایک مثال ہے مائنس مربع کے ٹین کے الٹا کی اصل قدر تلاش کرنا۔ روٹ آف تھری اب ہم جانتے ہیں کہ ٹین انورس فنکشن میں مائنس ah کے درمیان کھلا وقفہ ہے اس خاص مثال کے لیے یہاں $\pi/2$ اور $\pi/2$ نمبرز کا ڈومین ہوتا ہے اور رینج مائنس روٹ اوور کے برابر ہے۔ تین چونکہ ہم جانتے ہیں کہ مائنس ساٹھ ڈگری کا ٹین جو مائنس پانی پانی تھری ہے تو مائنس پانی پانی تھری کا ٹین مائنس جڑ تین کے برابر ہے اور مائنس پانی پانی بڑی تھری اس وقفہ میں مائنس پانی پانی ٹو سے پلس پانی پانی ٹو ہے لہذا ہم کر سکتے ہیں۔ لکھیں کہ تین کے مائنس مربع جڑ کا ٹین الٹا مائنس پانی کے اوپر تین کے برابر ہے ایک اہ بات یہ ہے کہ ہمیں محتاط رہنا ہوگا ہے۔ 3 کی جڑ ہیں لیکن پھر مائنس جڑ تین کا ٹین الٹا اس کے برابر نہیں ہوگا کیونکہ دو پانی $\pi/3$ بھی مائنس $\pi/3$ ہے تو اس کا ٹین 2 سے نہیں ہے لہذا ہمیں اس چیز کے بارے میں تھوڑا محتاط رہنا ہوگا۔ یہ آہ پہلی ah پانی تھری کا تعلق ٹین انورس فنکشن کے رینج سیٹ سے ہے جو بند وقفہ مائنس ون سے پلس ون میں ہے اور ہم یہ دیکھنا چاہیں گے کہ سائن انورس ایکس کا x تو ہم کہتے ہیں کہ ہمارے پاس یہ متغیر سائن کیا ہے اب اُتے ہم کہتے ہیں کہ بند وقفہ مائنس ون سے پلس ون سے تعلق رکھنے والے کسی بھی ایکس کے لیے یہ کہتے ہیں کہ سائن انورس ایکس تھیٹا کے برابر ہے اب رینج اور ڈومین اے ایچ سے جیسا کہ ہم نے سائن انورس فنکشن کے لیے آخری لیکچر میں بیان کیا تھا ہمیں یقین جو تھیٹا ہے x inverse ہے کہ سائن π کیونکہ اس سائنس فنکشن کی رینج مائنس $\pi/2$ سے $\pi/2$ پلس $\pi/2$ ہے تو یہ خاص تھیٹا بند وقفہ سے تعلق رکھے گا مائنس $\pi/2$ سے $\pi/2$ plus $\pi/2$ اور یہاں سے ہم جانتے ہیں کہ اب لاگو کریں دونوں پر اہ کا نشان سائڈز $\pi/2$ plus $\pi/2$ یہاں کی سائن تھیٹا کی سائن کے برابر x ہے کیا ہم اسے اس تھیٹا سے ظاہر کرتے ہیں اس لیے سائن انورس x sine inverse ہے تو یہ ایک زاویہ ہوگی لیکن جب ہم کہتے ہیں کہ جب ہم کہتے ہیں کہ یہاں پر جب ہم کہتے ہیں کہ سائن انورس ایکس تھیٹا کے برابر ہے اس کا کیا مطلب ہے جیسا کہ ہم نے پہلے لیکچر میں سائن انورس ایکس کی تعریف کی تھی ہم نے کہا تھا کہ وقفہ مائنس ون سے پلس ون میں کسی بھی ایکس کے لیے سائن اس طرح کہ اس زاویہ کی سائن جو $\pi/2$ plus $\pi/2$ زاویہ رینج مائنس ah انورس منفرد قدر ہے یا اس میں منفرد کے برابر ہونا چاہئے x تھیٹا ہے تھیٹا کے برابر ہے یہاں یہ x تو اس طرح ہم نے سائن انورس فنکشن کی تعریف کی تھی اور اس لئے جس لمحے ہم کہتے ہیں کہ سائن انورس کے برابر ہے لہذا یہ اس طرح سے ہوتا ہے جس طرح ہم نے پہلے لیکچر میں سائن انورس x تھیٹا \sin خود بخود اس کی پیروی کرتا ہے کہ کو جوڑتے ہیں ah فنکشن کی تعریف کی تھی اور اس وجہ سے جب ہم اس بیان کو اس بیان کے ساتھ کے برابر ہے x کا اگلا سائن x کے برابر ہے۔ اور وہاں سائن انورس x تو ہمیں کیا ملتا ہے کہ یہ کے برابر ہے لیکن x کا نشان مائنس ون ٹو پلس ون $\sin^{-1} x$ کے لئے x تو یہاں ہمارا پہلا نتیجہ ہے کہ بند وقفہ میں کسی بھی y کے لیے ہے کیا یہ درست ہے کہ سائن y دوسرے راستے کے بارے میں کیا کہ یہ ہمیں لے جاتا ہے دوسرے سوال کے لیے جو تمام π over 6 کے برابر y کے برابر ہے اور ہم اسے فوری طور پر چیک کر سکتے ہیں مثال کے طور پر ہم کہتے ہیں کہ ہم $\sin^{-1} y$ سے زیادہ کی سائن جو 30 ڈگری ہے آدھے کے برابر ہے اور سائن انورس فنکشن کے گراف سے ہم جانتے $\pi/6$ لیتے ہیں جس کے لیے 6 کے لیے یہ بیان درحقیقت درست ہے لیکن اگر ہم $\pi/6$ کے برابر y کے برابر ہے لہذا $\pi/6$ ہیں کہ نصف کا سائن انورس لیں

کا سائن تین سے زیادہ برابر ہے π سے زیادہ تین پھر دو π کے برابر کہتے ہیں دو y تو ہمیں سے زیادہ تین ہے π تو دو تو ایک بیس ڈگری ہے

سے زیادہ تین مرضی کے برابر ہوگا جڑ تین π کے ساتھ دو y کا سائن الٹا y سے زیادہ تین کا سائن ہوگا جڑ تین پر دو اور سائن π تو دو 1 to $\pi/3$ پر دو کا سائن انورس ہو جو اصل میں مساوی ہے۔

$\sin y$ کا $\sin y$ تھا لیکن $2\pi/3$ اس مثال میں مثال کے طور پر اس خاص مثال میں ہم دیکھتے ہیں کہ ah تو قدرتی طور پر کی حد سے فنکشن ہم جانتے ہیں کہ سائن انورس فنکشن کی ah $\sin^{-1} x$ ہے۔ یہ واضح ہے کہ $\pi/3$ صرف $\sin^{-1} x$ سائن y کے کسی بھی $\sin y$ کے لیے $\sin^{-1} y$ کے اور اس لیے سائن $\pi/2$ از 2 سے جمع π رینج مائنس سے ہونا چاہیے۔ دو جو کہ سائن انورس فنکشن کا رینج سیٹ ہے اور اس لیے جیسا کہ ہم اب π سے دو دو جمع π کے الٹا کا تعلق مائنس اس رینج سیٹ سے تعلق رکھتا ہے y کا تعلق ہے اگر y دکھائیں گے کہ اگر نہیں ہے اس رینج سیٹ سے تعلق رکھتے y کے برابر ہے تاہم یہ واضح ہے کہ اگر $\sin^{-1} y$ کا y تو یہ درست ہے کہ سائن ہیں

$\pi/2$ کا تعلق مائنس $\sin y$ $\sin^{-1} y$ کے لیے y کے برابر نہیں ہو سکتا کیونکہ کسی بھی $\sin y$ سائن انورس y تو اس سیٹ سے تعلق نہیں رکھتا y سے ہونا پڑے گا اور اگر $\pi/2$ plus $\pi/2$ سے سائن انورس g کے لیے دکھاتے ہیں۔ y برابر ہیں اب ہم کسی بھی $\sin y$ $\sin^{-1} y$ اور y تو یہ ممکن نہیں ہے۔ کہ کے لیے سائن y کے رینج سیٹ پر جو کہ مائنس پانی پانی ٹو سے پلس پانی پانی ٹو ہے لہذا اس وقفہ سے تعلق رکھنے والے کسی بھی بالکل برابر ہے y الٹا سائن کے برابر x کے سائن انورس سے شروع کریں اور اسے ہونے دیں۔ y تو اُتے سائن ہے اور پھر ہم اس $\pi/2$ plus $\pi/2$ سے $\pi/2$ کا تعلق نشان کے الٹا فنکشن کے رینج سیٹ سے ہے جو مائنس x تو واضح طور پر مخصوص مساوات کے دونوں اطراف کے نشان کو لیتے ہیں اور پچھلی سلائڈ سے ہم پہلے ہی جان چکے ہیں کہ کسی بھی $\sin x$ برابر $\sin y$ $\sin^{-1} y$ تو پھر ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے

کا موڈ ایک سے کم ہے z کے برابر ہے اس طرح کہ z کے لیے z تمام z sine inverse in z سائن کے z سمجھیں گے z کے برابر ہے لہذا ہم اسے y سائن z ہے جس میں ah تو ہم اسے استعمال کرنے جا رہے ہیں۔ اس مساوات میں خاص نتیجہ ہے z کے برابر ہے جو y کے برابر ہے اور اس لیے یہ بائیں ہاتھ کی طرف سائن z کا سائن z اور اس لیے سائن انورس سے π by 2 دونوں کا تعلق ہے۔ وقفہ مائنس y اور x کے برابر ہے کیونکہ x سائن y تو ہم یہاں سے شروع کرتے ہیں۔ آخر میں سائن اور اس وقفہ میں بھی اگر ہم اسے کھینچتے ہیں π plus π by 2 سے ہوتا π by two to plus π by two صرف اس وقفہ کے اندر کھینچتے ہیں جس کا تعلق مائنس x بمقابلہ x تو یہاں ہم نشانی ہے اُنہی کہتے ہیں کہ یہ ہے مائنس ون اور یہ پلس ون ہے پھر ہم جانتے ہیں کہ سائن ایکس فنکشن کا گراف سائن ایکس فنکشن کا گراف کچھ اس

لیکن y برابر ہے سائن x دونوں کا تعلق اس وقفہ سے ہے اور ہمیں کہا جاتا ہے کہ یہ کہا جاتا ہے کہ سائن y اور x تو ہمیں دیا گیا ہے کہ پھر ہم واضح طور پر دیکھتے ہیں کہ اس وقفہ کے اندر سائن فنکشن کا گراف یک طرفہ طور پر اس کی یکجہتی میں اضافہ کر رہا ہے اور اس لیے

یہی ایک ہی وقفہ سے تعلق رکھتا ہے یہاں π by two to plus π by two کا بھی تعلق ہے وقفہ مائنس x تو دونوں کا تعلق دوڑ y کے برابر ہونا ہے جو ثابت کرتا ہے۔ جب تک y کا x کے برابر ہے اور اس لیے ہمارے پاس x y تو یہ درست ہونا چاہیے کہ برابر ہے sine inverse sine inverse of sine y کا سیٹ کا ge سے ہے۔

سے ہے π by two سے جمع π by two کا تعلق مائنس y تو جو ہم نے ابھی کہا وہ یہ تھا کہ اگر ہمیں کہا جائے کہ اس بند وقفہ سے باہر ہے y کے لیے لیکن یہ بیان درست نہیں ہے اگر y الٹا ہمیشہ برابر ہوگا۔ sine کا sine کے y تو

کے لیے دیگر تمام معکوس افعال رکھتی ہے اور ہم انہیں وقت کے مفاد میں ثابت نہیں کریں گے اس لیے مثال ah تو درحقیقت اسی طرح کی چیز کی کسی بھی قدر کے لئے مائنس ایک سے پلس x کے طور پر میں نے اسے یہاں اس سلائڈ میں لکھا ہے۔ لہذا ہمارے پاس بند وقفہ میں وقفہ میں دوسرے معاملے کو لیتے ہیں جہاں آپ ah کے برابر ہے اس لئے یہ مخصوص بیان بہت سیدھا ہے لیکن جب آپ \cos inverse x کا ایک کی گنتی کرتے ہیں الٹا \cos

\cos inverse کے ساتھ \cos کمپوز کر رہے ہیں اور یہاں آپ ریورس کر رہے ہیں آپ \cos کے ساتھ \cos inverse تو یہاں آپ کمپوز کر رہے ہیں

الٹا لیں \cos تھیٹا کا \cos تو اگر آپ

فنکشن \cos inverse میں آیت فنکشن \cos تو یہ صرف ان تھیٹا کے لیے تھیٹا کے برابر ہے جو کہ تھیٹا کی حد سے تعلق رکھتے ہیں۔ تھا لہذا جب تک تھیٹا اس بند وقفہ سے تعلق رکھتا ہے π کی حد ہے جیسا کہ ہم نے پہلے لیکچر میں اس کی وضاحت کی تھی بند وقفہ صفر سے یہ بیان درست ہے لیکن جب ہم کسی بھی تھیٹا کو لیں گے جو اس سے باہر ہے۔ وقفہ پھر ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ یہ سچ ہے اور اسی طرح کی چیز π by two to plus π by two اور سیکینٹ فنکشن اور سیکینٹ فنکشن کے لئے بھی رکھتی ہے لہذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سیکینٹ تھیٹا کا سیکینٹ الٹا صرف ان تھیٹا کے لئے تھیٹا ہے۔ جس کا تعلق صرف ان تھیٹا کے لیے ہے جیسے کہ وہ سیکینٹ الٹا فنکشن کے رینج سیٹ سے تعلق کی cosecant inverse رکھتے ہیں اور اسی طرح یہاں یہ بیان صرف اس صورت میں درست ہے جب تھیٹا اس طرح کا ہو کہ اس کا تعلق رینج سے ہے

کے اب ہم دوسری شناخت پر بات کرتے ہیں cosecant inverse function تو یہ رینج ہے

ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ اور n کے درمیان کچھ تعلق دکھائیں گے۔ cosecant inverse function تو اب ہم سائن انورس فنکشن اور ہے اس سے ہمیں \sin بذریعہ cosecant کا x حقیقی کے لیے x اس کا محرک یہ ہے کہ ہم پہلے سے ہی جانتے ہیں کہ کسی بھی x کے درمیان بھی کوئی تعلق ہونا چاہئے اور یہ ہے رشتہ اب ہم کوئی بھی \sin inverse اور \cos inverse اور \cos inverse یقین ہوتا ہے کہ پر غور کرنے جا رہے ہیں اور ہم cosecant inverse کے x کا موڈ ایک کے برابر ہے کیونکہ ہم x اس طرح ہے کہ x لیں کہ یہاں ہے۔ کہ ان کی مطلق قدر ایک کے برابر سے زیادہ ہے اسی لیے ہم نے x کا ڈومین تمام cosecant inverse function جانتے ہیں کہ کچھ زاویہ تھیٹا کے برابر ہے اب cosecant inverse کا x کے لیے اقدار کی صرف اس حد پر غور کیا ہے اب ہم کہتے ہیں کہ x کی حد کی تعریف سے جیسا کہ ہم نے پچھلے لیکچر میں بحث کی تھی ہم جانتے ہیں کہ اس تھیٹا کا تعلق cosecant inverse function کا cosecant inver سے ہونا چاہیے سوائے قدر صفر کے کیونکہ یہ دراصل π by two to plus π by two بند وقفہ مائنس cosec فنکشن اور اس لیے تھیٹا کا اس سے تعلق ہونا چاہیے لیکن اس بیان سے ہم جو لکھ سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر ہم se رینج سیٹ ہے۔ فنکشن کو بائیں اور دائیں دونوں جانب لاگو کرتے ہیں ah

تو ہم بنیادی طور پر اس مخصوص شناخت کو استعمال کرنے کی کوشش کر رہے ہیں

کا اطلاق کرتے ہیں cosec تو لہذا ہم دونوں اطراف پر

کے برابر ہے اور پھر اس شناخت سے ہمارے پاس cosecant theta ہے cosecant inverse x کے برابر ہے \cos inverse x کے برابر ہے \cos کے برابر سے بڑا ہونا ہے یہاں ہم پہلے ہی ایکس کا mod x ہوتا ہے جب تک x برابر ہے cosecant inverse کا cosecant کے برابر ہونا چاہیے اور اس لیے ہمارے پاس تھیٹا کے کوسیکینٹ کے x موڈ ایک کے برابر سے بڑا ہے اور اس لیے یہاں بائیں ہاتھ کا یہ حصہ فنکشن کی تعریف کے مطابق ہے یہ گناہ کے لحاظ سے ایک کے برابر ہے۔ تھیٹا یا اسے یہ بھی لکھا cosecant ہے جو کہ اصل میں x برابر کا موڈ ایک کے برابر سے بڑا ہے اس بیان سے اس کا x اب ہم یہاں سے بھی آتے ہیں کیونکہ x جا سکتا ہے کہ سائن تھیٹا برابر ایک بذریعہ کے برابر ہے مزید ہم یہ بھی جانتے ہیں x تھیٹا ایک ہائے \sin کے برابر ایک سے کم ہونا ضروری ہے اور ہمارے پاس x مطلب یہ ہے کہ رینج سیٹ سائن انورس ah کہ تھیٹا اس سیٹ سے تعلق رکھتا ہے اور اس لیے تھیٹا یقینی طور پر اس سے تعلق رکھتا ہے لہذا یہ مخصوص فنکشن کے رینج سیٹ کا سب سیٹ ہے لہذا ہم جانتے ہیں کہ اس سے اس بیان سے ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ تھیٹا کا تعلق مائنس پائی از ٹو سے ہے دو جمع پائی از ٹو اب مائنس پائی از ٹو سے جمع پائی ہائی ٹو سے پلس پائی ہائی ٹو سے ہے لہذا یہاں سے ہم پچھلی شناخت x تھیٹا \sin چونکہ ایک کے برابر ہے اور تھیٹا کا تعلق مائنس پائی ہائی ٹو سے پلس پائی ہائی ٹو سے ہے لہذا یہاں سے ہم پچھلی شناخت x تھیٹا \sin چونکہ کا تعلق ہے یہ وقفہ بند وقفہ y توں میں سے ایک سے کہہ سکتے ہیں کہ ہم نے صرف چند سلائڈوں پر بات کی تھی ہم نے دکھایا ہے کہ جب تک sine inverse of $\sin y$ ہے

π کی بجائے تھیٹا لیتے ہیں کیونکہ تھیٹا پہلے سے ہی اس آہ مائنس پائی سے تعلق رکھتا ہے ہمارے پچھلے نتیجے سے دو وقفہ سے جمع y تو سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ سائن تھیٹا کا سائن انورس ہے ویں کے برابر

تو یہ اس نتیجے سے ہے جس پر ہم نے ابھی بحث کی ہے کہ ہم کیا کرتے ہیں ہم اس مساوات کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ دونوں طرف سائن انورس فنکشن کا اطلاق کرتے ہیں لہذا اس مساوات پر سائن انورس فنکشن لگانے سے ہمیں جو ملتا ہے وہ سائن انورس ہے۔ سائن تھیٹا کا سائن انورس ون ان ایکس کے برابر ہے لیکن یہاں سے ہمارے پاس کیا ہے کہ یہ بالکل تھیٹا کے برابر ہے اور اس لیے آخر کار ہمارے پاس تھیٹا سائن انورس ون ان الٹا ہے cosec کا x ایکس کے برابر ہے اور پچھلی سلائڈ سے ہمارے پاس تھیٹا کا تھیٹا دراصل

مانس ٹین تھیٹا کے برابر ہے جو کہ برابر ہے x یہاں سے ہم کیا کہہ سکتے ہیں کہ ah ہے یہاں دونوں اطراف پر ٹین لگانے سے اور پھر مانس تھیٹا کے ٹین میں کیونکہ ٹین فنکشن بھی ایک طاق فنکشن ہے لہذا ٹین فنکشن ایک طاق فنکشن ہے تو یہ درست ہے لیکن چونکہ تھیٹا کا تعلق مانس پائی ہائی ٹو سے پلس پائی ہائی ٹو مانس تھیٹا سے بھی ہوگا اور اس لیے مانس تھیٹا کا تعلق ٹین کے برابر ہے x انورس فنکشن کی رینج سے ہے جہاں سے یہ اس کی پیروی کرتا ہے کہ مانس تھیٹا ٹین الٹا ہے کیونکہ یہ مانس تھیٹا مانس تھیٹا کا ہے ٹین انورس فنکشن کا رینج سیٹ اور x تو اس مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ مانس تھیٹا ٹین الٹا جسے تھیٹا کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے مانس آف ٹین انورس ایکس کے برابر اور اس لیے یہاں اور یہاں سے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ کو بھی دکھایا جا سکتا ہے مثال ah دوسری شناخت ah ٹین انورس کا مانس ایکس ٹین انورس ایکس کے مانس کے برابر ہے اور اسی طرح میں اس پر تھوڑی تیزی سے جاؤں گا $\cos^{-1} x$ اور $\cos^{-1} \sin x$ کے طور پر تھیٹا کے \cos کے برابر ہے۔ مانس x تھیٹا مانس \cos تک ہے اور اس وجہ سے π تو اس کا تعلق یہ ہے کہ تھیٹا کا تعلق صفر سے $\cos \theta$ کے لیے مانس \cos مانس تھیٹا کے کسی بھی تھیٹا π لکھنے کے مترادف ہے لیکن مانس ہم جانتے ہیں کہ x برابر ہے

π to π this π کے برابر ہے چونکہ تھیٹا کا تعلق صفر سے ہے۔ \cos مانس تھیٹا کے π اب x تو یہ اس کے برابر ہے لہذا \cos مانس تھیٹا برابر ہے π سے تعلق رکھتا ہے اور اس لیے یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ π مانس تھیٹا بھی اسی وقفہ صفر سے تھیٹا تھا $\cos^{-1} x$ اور $\cos^{-1} \sin x$ کے برابر ہے π کے طور پر لکھتے ہیں $\cos^{-1} x$ کے x تو اگر یہاں اس تھیٹا کے بجائے اگر ہم اسے اس مساوات سے مانس کے جہاں سے آخر کار ہمیں $\cos^{-1} x$ برابر ہے $\cos^{-1} \sin x$ مانس π تو ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے کسی بھی ایکس کے s کے برابر ہے۔ π اور π ملتا ہے۔ مانس $\cos^{-1} x$ جمع $\cos^{-1} x$ وہ تھیٹا \cos لیے درست ہے اس طرح کہ ایکس کا موڈ ایک کے برابر سے کم ہے لہذا ہم مرحلہ بہ مرحلہ جہاں ہم نے پایا کہ مانس مانس تھیٹا کا تعلق بھی اسی وقفہ صفر π ہے اور یہ بھی پتہ چلا کہ یہ تھیٹا کی وجہ سے صفر سے \cos مانس تھیٹا کا π دراصل کے برابر ہے \cos مانس تھیٹا کے π فنکشن کا رینج سیٹ ہے لہذا چونکہ π سے $\cos^{-1} x$ سے π اور یہ صفر سے π سے فنکشن کے رینج سیٹ میں یہ بیان آتا ہے اور پھر وہاں سے یہ بہت آسان تھا $\cos^{-1} x$ مانس تھیٹا ہے پہلے سے ہی π اور یہ زاویہ فنکشن کے لئے ہے اور ہم اسے بہت \sin کے درمیان تعلق وہی ہے جو $\cos^{-1} x$ اور $\cos^{-1} \sin x$ تیزی سے عبور کر سکتے ہیں۔ آپ کے لیے سمجھنا زیادہ مشکل نہیں ہونا چاہیے فنکشن کے رینج سیٹ سے ہونا چاہیے جو کہ بند وقفہ $\cos^{-1} x$ تو آئیے ہم کہتے ہیں کہ یہ تھیٹا کے برابر ہے پھر تھیٹا کا تعلق ہے سوائے عنصر صفر کے اور اس لیے وہاں سے اگر ہم اس اوپر دی گئی مساوات کے بائیں π by two to plus π by two مانس π لیں اور دائیں طرف دونوں طرف کے مانس کے برابر ہے لیکن $\cos^{-1} x$ ملتا ہے جس کا بنیادی طور پر یہ مطلب ہے کہ x مانس $\cos^{-1} x$ تو ہمیں تھیٹا کا اب اگر تھیٹا اس وقفہ سے تعلق x ہے $\cos^{-1} x$ تھیٹا کا مانس وہی ہے جو مانس تھیٹا کا $\cos x$ ایک عجیب فعل ہے اور اس لیے $\cos^{-1} x$ رکھتا ہے

الٹا کا رینج سیٹ $\cos^{-1} x$ تو مانس تھیٹا بھی اس وقفہ سے تعلق رکھتا ہے اور اس لیے چونکہ مانس تھیٹا کا تعلق ہے اب یہ وقفہ بنیادی طور پر کے x کے رینج سیٹ سے ہے اور اس لیے اس بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مانس تھیٹا $\cos^{-1} x$ ہے لہذا مانس تھیٹا کا تعلق الٹا کے برابر تھا اور اس لیے یہاں سے یہ نکلتا ہے کہ تھیٹا مانس $\cos^{-1} x$ کے x الٹا کے برابر ہے لیکن تھیٹا پہلے سے ہی مانس $\cos^{-1} x$ کے برابر ہے۔ $\cos x$ inverse of لیکن تھیٹا یہ چیز ہے اور اس وجہ سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\cos^{-1} x$ کے برابر ہے۔ الٹا $\cos^{-1} x$ کے مانس کے برابر ہے لیکن یاد رکھیں کہ یہ ہے صرف اس وجہ سے کہ $\cos^{-1} x$ جو تھیٹا ہے π by two minus x کے برابر سے بڑا ہے اور جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ سائن فنکشن کی طرح $\sin x$ فنکشن کا ڈومین صرف وہی ایکس ہے جو کہ الٹا فنکشن بھی ایک عجیب فنکشن ہے کیونکہ یہ یہاں سے آگے آتا ہے۔ وقت کے مفاد میں ہم آگے دو بیانات کو ثابت نہیں کرنے جا رہے $\cos^{-1} x$ کے سیکنٹ الٹا x کے سیکنٹ الٹا اور x ہیں اور یہ آپ پر ایک چھوٹی سی مشق کے طور پر چھوڑ دیا گیا ہے اور ہمارے یہاں ایک بار پھر مانس کے درمیان تعلق ہے اور یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ایکس کے تمام موڈ ایک کے برابر ہیں لہذا یہاں یہ مخصوص سیٹ دراصل سیکنٹ الٹا فنکشن کا مانس سیکنٹ الٹا ایکس کے برابر π ڈومین ہے لہذا آپ سیکنٹ کے ڈومین میں کوئی بھی ایکس لیں انورس سیکنٹ الٹا مانس ایکس کے برابر ہے \cot کے درمیان تعلق سے ملتا جلتا ہے اور اسی طرح کی ایک تار $\cos^{-1} x$ کے π by two minus x اور $\cos^{-1} x$ کے x جو کہ a h کے افعال بنیادی طور پر ایک ہیں \cos اور \sin کے لئے بھی درست ہے ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ $\cos^{-1} x$ اور $\sin^{-1} x$ کے \sin inverse x اور \cos inverse x وہ صرف ایک دوسرے کے بدلے ہوئے ورژن ہیں لہذا یہ دیکھنا دلچسپ ہوگا کہ کیا ہم کا وہ موڈ x فنکشن کا ڈومین وہی ہے جو $\cos^{-1} x$ کے درمیان کچھ تعلق حاصل کر سکتے ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ چونکہ سائن انورس اور ایک کے برابر سے کم ہونا چاہئے ہمیں ان کے درمیان کچھ تعلق کی وضاحت کرنے کے قابل ہونا چاہئے تھیٹا کے برابر ہے جہاں سے اس کے بعد یہ ہوتا ہے کہ تھیٹا کا تعلق x تو آئیے ہم یہ کہتے ہوئے شروع کریں کہ ہم کہتے ہیں کہ سائن انورس حد سے ہونا چاہئے۔ سائن انورس فنکشن کا جو بند وقفہ ہے مانس پائی ہائی دو دو پلس پائی ہائی دو اگر ہم اس مساوات پر سائن ان دونوں اطراف پر ہے x تھیٹا لیکن یہ بائیں ہاتھ کی طرف بنیادی طور پر \sin لاگو کرتے ہیں جو ہمیں ملتا ہے وہ سائن آف سائن انورس ایکس برابر ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ مثلثی فنکشنز پر ہمارے ابتدائی لیکچرز سے ہم جانتے ہیں کہ x تو جو ہم حاصل کرتے ہیں وہ تھیٹا کے سائن کے برابر ہے۔ اب ہمارے لیے اور اس لیے یہاں اس k یہ رشتہ پہلے ہی \cos of π by two minus θ تھیٹا کا سائن برابر ہے مانس تھیٹا اب چونکہ تھیٹا وقفہ \cos of π by two کے برابر ہے x تعلق کو استعمال کرنے سے ہمیں جو حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ مانس تھیٹا کے بعد آتا ہے۔ اس کا تعلق بند وقفہ θ سے π by two سے تعلق رکھتا ہے یہ π by two سے جمع π by two مانس ہے اور یہ زاویہ دراصل x کے برابر \cos کے وقفہ سے ہوگا اور اب ہمارے پاس جو کچھ ہے وہ یہ ہے کہ ہمارے پاس کسی زاویے کی π درحقیقت π دراصل رینج سیٹ ہے لہذا بند وقفہ θ سے π to π لیکن قریبی وقفہ π بند وقفہ θ سے π سیٹ θ سے تعلق رکھتا ہے فنکشن کے رینج سیٹ سے تعلق رکھتا ہے $\cos^{-1} x$ مانس تھیٹا π by 2 فنکشن کا رینج سیٹ ہے اور چونکہ یہ $\cos^{-1} x$ کے برابر ہے اور اس لئے اگر ہم یہاں اس بیان کو اور اس بیان کو جوڑیں $\cos^{-1} x$ کے مانس تھیٹا π by 2 یہ یہاں سے تھا $\sin^{-1} x$ مانس تھیٹا π by 2 تو جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ \sin کے جہاں سے ہم آخر میں یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\cos^{-1} x$ برابر $\sin^{-1} x$ اور π by 2 minus $\sin^{-1} x$ plus $\cos^{-1} x$ کا موڈ 1 کے برابر سے کم x کے برابر ہے اس طرح کہ π by 2 کے لئے x تمام $\sin^{-1} x$ اور $\cos^{-1} x$ کا انداز ایک جیسا ہے۔ آپ یہ بھی دکھا سکتے ہیں کہ لہذا یہ ایک بہت بنیادی شناخت ہے جسے آپ کو اسی انداز میں یاد رکھنا چاہئے اور ثبوت کا انداز ایک جیسا ہے۔ آپ یہ بھی دکھا سکتے ہیں کہ کے برابر ہے اور یہ بھی کہ کسی π by two برابر $\cot^{-1} x$ پلس $\tan^{-1} x$ حقیقی قدر کے لیے x کسی بھی کا موڈ ایک کے برابر سے بڑا ہے x کے لیے اس طرح کہ x بھی

