معکوس مثلثی افعال پر پہلے لیکچر میں خوش آمدید پچھلے سات لیکچرز میں ہم نے مثلثی فنکشنز پر تبادلہ خیال کیا جیسے sine x cosine
اس لیکچر کے بعد سے ہم ان کے معکوس کی وضاحت کرنے جا رہے ہیں اور ہم بھی کریں x cot x tan x cosec x اور seck x
گے۔ ان الٹا فنکشنز کے درمیان آہ کی شناخت پر بحث کریں آئیے ہم سائن ایکس کا کیس لیتے ہیں جیسا کہ ہم اپنے پچھلے لیکچرز سے جانتے ہیں کہ
سائن ایکس فنکشن میں ایک ڈومین ہے جو تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہے اور رینج مائنس ون اور پلس کے درمیان تمام نمبرز ہے۔ ایک اس کا مطلب
لیں x یہ ہے کہ اگر ہم کوئی حقیقی قدر
کا نشان یقینی طور پر بند وقفہ مائنس ون ٹو پلس ون سے تعلق رکھتا ہے اگلا سوال یہ ہے کہ کیا ہم سائن فنکشن کے الٹا فنکشن کی وضاحت x تو
کر سکتے ہیں
سے میرا کیا مطلب ہے کہنے کا مطلب یہ ہے کہ اگر ہم مائنس ون سے پلس ون سے تعلق رکھنے والے کسی بھی inverse function تو
کو لیں y
تو سوال یہ ہے کہ جب کوئی انوکھا موجود ہے
کے لیے y اس al کا سائن برابر ہے x سے تعلق رکھنے والا کوئی انوکھا ایکس ہوگا کہ r تو کیا
تو یہ بنیادی سوال ہے جو ہم پوچھ رہے ہیں
تو ظاہر ہے کیونکہ سائن ایکس جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ ایک م
ہے افقی محور پر x کا گراف عمودی محور پر پلاٹ کیا ہے sin x تواتر فنکشن ہے یہ درست نہیں ہے اس لیے یہاں اس سلائیڈ پر میں نے
نصف کے sin x نصف کے برابر ہے اور ہم ان تمام ایکس کو تلاش کرنے کی کوشش کر رہے ہیں کہ y اور یہ کہتے ہیں کہ ہمارے پاس
برابر ہے
محور کے م x تو ہم کیا کریں ہم یہاں ایک افقی لکیر کھینچیں جو
کی بہت سی قدریں ہیں مثال x محور پر مثبت طرف نصف کی نقل مکانی پر ہے اور پھر جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ y توازی ہے۔ اور جو
کی یہ قدر x کے طور پر یہ قدر اور یہ قدر یہاں اور یہ قدر
کا نشان نصف کے برابر ہے اور اصل میں لامحدود بہت سے ہیں لہذا اس سے ہم جانتے ہیں کہ ہم کوئی x کی یہ تمام اقدار ایسے ہیں کہ x تو
نصف کے برابر ہے اور اس لئے اب تک عام طور پر یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ ہوگا کے معکوس کی x نہیں ڈھونڈ سکتے ہیں جو کہ سائن x منفرد
فنکشن تاہم ہم اب بھی اس کے معکوس کی وضاحت کر سکتے ہیں اس کے لیے ہمیں ایک چھوٹی آہ آسان مثال sine وضاحت کرنا مشکل ہے۔
مربع کو عمودی x مساوی y مربع کے برابر ہے لہذا fx x لینے کی ضرورت ہے لہذا اس سلائیڈ پر ہمارے پاس فنکشن کا ایک پلاٹ ہے
تمام حقیقی f کا وکر ہے لہذا فنکشن y مربع کے برابر x پر پلاٹ کیا گیا ہے۔ افقی محور پر ہے اور یہ نیلے نقطے والا وکر ہے x محور
پلس سے ظاہر کرتا ہوں اب جیسا کہ آپ یہاں اس r اعداد کے سیٹ سے تمام غیر منفی حقیقی اعداد کے سیٹ تک بیان کیا جاتا ہے جسے میں
کی کسی بھی قدر کے لیے دیکھ سکتے ہیں y کی رینج میں f فنکشن
ایک کے برابر ہے y تو آئیے مثال کے طور پر یہ
برابر x کی ایک اور قدر ہے جو x کے برابر ہے جمع ایک اور پھر x کی دو قدریں ہیں ایک x کے برابر ایک کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ y تو
ہے مائنس ون کے
نہیں ہے x کے برابر ملتا ہے اور اس لئے دوبارہ کوئی منفرد y برابر کے جمع ون کے لئے ہمیں x برابر ہے مائنس ون کے برابر اور x تو
ایک کے برابر ملتا ہے y مائنس ون اور پلس کے برابر ہے۔ ایک ہمیں x مربع ایک ہے کیونکہ ان دونوں کے لئے x کے برابر ہے fx جو
مربع کے برابر متعین کرنا مشکل لگتا ہے x اور اس وجہ سے کوئی انوکھا ایکس نہیں ہے جس کا مطلب ہے کہ اس فنکشن کے معکوس کو دوبارہ
لہذا ایک عام آہ چال یہ ہے کہ ہم ایک نئے فنکشن کو محدود کرنے اور اس کی وضاحت کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ جو کہ پرانے فنکشن جیسا ہی
کے ڈومین کو تمام حقیقی نمبروں f مربع ہوگا لیکن پھر ہم اس فنکشن x برابر fx ہے لہذا ہمارے پاس اب بھی موجود ہے ہمارے پاس اب بھی
کو اس معاملے میں اس درج f کے سیٹ سے تمام حقیقی نمبروں کے سیٹ کے ذیلی سیٹ تک محدود کر دیں گے۔ ہم یہ کہتے ہیں کہ ہم اس فنکشن
ذیل ذیلی سیٹ تک محدود کرتے ہیں ہم یہ کہتے ہیں کہ ہم اسے تمام کے سیٹ تک محدود کرتے ہیں لہذا ہم اس سیٹ کو لیتے ہیں جو 0 سے تمام تک
لامحدود ہے
پلس بنیادی طور پر یہ وقفہ صفر سے r پلس سے ہے لہذا r پرائم جو f تو ہم کہتے ہیں کہ ہم اس کی وضاحت کرتے ہیں ایک نیا فنکشن
f مربع رائٹ ہے لہذا x پرائم دوبارہ f کا x پلس تک متعین کرتے ہیں اور r پلس سے r پرائم کو f لامحدود ہے لہذا ہم ایک نئے فنکشن
r سے r مربع ہے جو ایک جیسا ہے۔ جیسا کہ ہمارے پاس اس سے پہلے صرف اتنا تھا کہ ڈومین کو اب f prime x x پرائم دوبارہ ہے
پلس تک محدود کرکے ہم اب بھی r سے r پلس تک محدود کردیا گیا ہے لیکن اس پابندی کو کرنے کا فائدہ سب سے پہلے یہ ہے کہ ڈومین کو
مربع fx x پلس تھا کیونکہ f r دیکھتے ہیں کہ اس کی پوری رینج فنکشن اب بھی وہی ہے اس لیے پہلے اس فنکشن کی رینج پچھلا فنکشن
پلس تھی اب بھی جب ہم ڈومین کو محدود کرتے ہیں۔ اس r مربع صرف غیر منفی ہو سکتا ہے پچھلے فنکشن کی رینج x کے برابر تھا اور چونکہ
پرائم کی رینج میں ہوں گے f پلس ہی رہے گا کیونکہ تمام غیر منفی نمبرز اس نئے فنکشن r پلس تک اب بھی ڈومین r سے f فنکشن کا
تو ہم کیا دیکھتے ہیں کہ ہم نے ڈومین کو اس طرح محدود کر دیا ہے۔ کہ فنکشن کی رینج اب بھی وہی ہے اس لیے ہم فنکشن کی رینج کو تبدیل نہیں
کر رہے ہیں لیکن اہم بات جو ہم نے یہاں کی ہے وہ یہ ہے کہ ڈومین کی اس پابندی کو کرنے سے اب ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ میں پلاٹی ہوں
کے گراف fx مربع کے برابر x پرائم کا گراف سرخ میں ہے لہذا میں بنیادی طور پر صرف افقی محور کے مثبت پہلو پر صرف f اس فنکشن
پرائم کا گراف ہے اور اب اگر ہم لیٹس کی کوئی بھی ویلیو لیتے ہیں کہ ہم لیتے ہیں f پر غور کرتا ہوں لہذا سرخ رنگ میں یہ وکر نئے فنکشن
ایک کے برابر ہے دو تین یہاں چار کہتے ہیں y تو یہ
مساوی 2 جس کے x x کو چار کے برابر لیں اور جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ محدود ڈومین کے ساتھ صرف ایک منفرد قدر ہے y تو اگر ہم
پرائم کے لئے f کے برابر 1 کے لئے بھی محدود ڈومین کے ساتھ فنکشن y کے برابر ہے درحقیقت محدود فنکشن کے لئے x 4 پرائم f لئے
پلس تک محدود کر r سے r کے برابر ہے جمع ایک اور ایسا اس لیے ہوتا ہے کہ ہم نے فنکشن کے ڈومین کو x صرف ایک منفرد حل ہوگا جو
لے سکتے ہیں مثال کے طور پر ہم کہتے ہیں کہ یہ y لے سکتے ہیں ہم اسے y دیا ہے اور اس لیے اب انفرادیت ہے کیونکہ ہم کوئی اور y
کی کچھ قدر ہے
کے برابر ہے اور y مربع ہے اس x پرائم جو کہ f کا x اس طرح کہ x منفرد e یہ ویں ہے۔ x تو اس تار کے لیے بھی یہ منفرد ہے
پرائم فنکشن کے لیے الٹا معکوس ہو گا ہمیں کہنا ہے کہ f پرائم کے لیے اب معکوس کی وضاحت ممکن ہے اس f اس لیے اس محدود فنکشن
کے مربع جڑ کے برابر ہوگا y ہوگا g کا y کے لیے الٹا y ah پلس سے تعلق رکھنے والے کسی بھی r پلس تک ہے اور r پلس سے r
کا مثبت مربع جڑ ہے y جہاں یہ
لکھا جاتا ہے لہذا ہم اصل f prime inverse بھی لکھیں گے کیونکہ یہ کئی بار g کی کئی بار تعریف کرتے ہیں آپ g تو ہم اس طرح
کی تعریف کر رہے ہیں یا کئی بار لوگ f prime inverse پر اس سپر اسکرپٹ کو استعمال کرتے ہیں جس کے الٹا ہم ah فنکشن کے نام پر
سے ہے اور f prime inverse ہے r plus 2 r plus اس طرح بھی نہیں لکھتے ہیں۔ وہ صرف لکھتے ہیں f prime

کا f y معاف کیجئے گا ایک پرائم بھول گئے یہاں f کے لیے y کے ڈومین سے تعلق رکھنے والے کسی بھی inverse y کا f prime
فنکشن کے ڈومین کو اس طرح سے محدود f کے مثبت مربع جڑ کے برابر ہے لہذا اب ہم وہی طریقہ استعمال کرنے جارہے ہیں۔ y بنیادی الٹا
کرنا کہ رینج میں کوئی تبدیلی نہ آئے لیکن پھر معکوس کو معنی خیز طور پر بیان کیا جانا چاہئے لہذا یہاں پوری چال یہ ہے کہ فنکشن کے ڈومین
پلس پر محدود r پلس کے بجائے r پلس کے بجائے r کو محدود کیا جائے مثال کے طور پر اس معاملے میں بھی اگر ہم کہتے ہیں ڈومین کو
کریں اگر ہم ڈومین کو محدود کرتے ہیں کہ ہمیں کچھ وقفہ مائنس 2 سے پلس 2 کہنے دیں
تو یہ کام نہیں کرے گا کیونکہ اگر ہم ڈومین کو مائنس ٹو سے پلس ٹو تک محدود کرتے ہیں
تو رینج اس فنکشن کا صرف صفر سے لے کر ہو گا
تو ہم کہتے ہیں کہ ہم اسے مائنس ٹو سے پلس ٹو تک محدود کرتے ہیں
تو ہم نے مائنس ٹو سے پلس ٹو تک محدود کر دیا
تو فنکشن کی رینج صرف صفر سے چار تک ہوگی جب کہ رینج اصل فنکشن تمام غیر منفی نمبروں کا سیٹ تھا اور یہ اس رینج صفر سے 4 رائٹ
میں فنکشن کے ڈومین کو محدود کرنے کی کوشش کرنی wa کے برابر نہیں ہے لہذا یہ کوئی معنی خیز پابندی نہیں ہے کیونکہ ہمیں اس طرح کے
کہ رینج کو تبدیل نہیں کیا جاتا ہے رینج اب بھی وہی ہے لہذا اب ہم اس تکنیک کا استعمال ٹرائیگونومیٹرک فنکشنز کے ڈومین کو محدود y چاہئے۔
پر y کرنے کے لیے کریں گے تاکہ ہم ان کے معکوس کو معنی خیز طریقے سے بیان کر سکیں اس لیے ہم دوبارہ سائن ایکس فنکشن کے برابر
واپس جائیں گے اور اب ہم جانتے ہیں کہ سائن ایکس فنکشن کی رینج مائنس ون اور پلس ون کے درمیان ہے اور اگر ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ اگر ہم
محدود کرتے ہیں
2. sine x لہذا ہم plus pi by سے 2 تک محدود کرتے ہیں۔ pi فنکشن کا ڈومین کہتے ہیں کہ ہم اسے مائنس ah sine x تو ہمیں
اس طرح اس پابندی کو کرنے سے ہم pi by two to plus pi by two فنکشن کے ڈومین کو وقفہ تک محدود کرتے ہیں بند وقفہ مائنس
ہوگا ٹھوس سرخ وکر جسے میں اب کھینچنے جا رہا ہوں curve کے لیے restricted function دیکھتے ہیں کہ
تو یہ ہو گا
تک محدود کر دیا گیا ہے اور جیسا کہ ہم plus pi by 2 سے pi by 2 تو یہ محدود سائن ایکس فنکشن کا وکر ہے جہاں ڈومین کو مائنس
یہاں دیکھ سکتے ہیں اس کے بعد بھی یہ پابندی تمام آہ ٹی اس کی ممکنہ قدریں وہاں موجود ہیں کیونکہ اگر ہم اس منحنی خطوط کی پیروی کرنے
کی کوشش کرتے ہیں
تو مثال کے طور پر یہاں یہ مائنس ون ہے اور پھر جب ہم اس سمت میں جاتے ہیں
کی طرف مزید آگے بڑھتے ہیں۔ مزید صفر سے جمع ah کی قدریں مائنس ون سے صفر تک مسلسل جاتی ہیں اور پھر مزید اگر ہم sin x تو
ایک تک اور اس لیے اس پابندی کے بعد بھی سائن ایکس فنکشن کی رینج مائنس ون سے جمع ایک تک ہے اس کے علاوہ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ اگر
کی کوئی قدر لیں y ہم رینج مائنس ون سے پلس ون میں
کو لیتے ہیں y تو ہم کہتے ہیں کہ ہم یہاں اس
برابر مائنس نصف کے برابر ہے y تو
کو مائنس نصف کے برابر لیں y تو اگر ہم
کا نشان مائنس نصف کے برابر ہے۔ کیونکہ جیسا کہ آپ x کی صرف ایک منفرد قدر ہے جیسے کہ x تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس محدود ڈومین میں
اس ممنوعہ ڈومین میں دیکھ سکتے ہیں کہ جب اس ڈومین تک محدود ہے
کے لیے جسے ہم اس y کے فنکشن کو بڑھا رہا ہے اور اس لیے یہ کسی بھی monotonically x فنکشن سختی سے sine x تو یہ
y کا نشان اس x کی منفرد قدر اس طرح کہ x اس وقفہ میں fxa رینج میں مائنس ون سے پلس ون میں لیتے ہیں وہاں ایک منفرد قدر ہوگی
کے برابر ہوگا
کی یہ قدر برابر ہے x کے برابر مائنس نصف کے لئے y تو مثال کے طور پر ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ
کی یہ قدر مائنس 30 کے برابر ہے۔ ڈگری یا مائنس پائی 6 سے زیادہ اور اس لیے ہم کہتے ہیں کہ سائن x تو
کی سائن ہے مائنس آدھے کے برابر ہے اور یہاں سے ہم لکھتے ہیں کہ مائنس ہاف کا سائن انورس مائنس پائی بائی pi تو ہمارے پاس مائنس
سکس ہے
کے درمیان قریبی وقفہ تک ہم اس plus pi by two اور pi by two تو اب ہم نے اس کو محدود کر دیا ہے۔ سائن فنکشن کا ڈومین مائنس
کے الٹا کو منفرد اور معنی خیز طور پر بیان کرنے کی پوزیشن میں ہیں لہذا اس گراف میں ہم سائن انورس فنکشن کو پلاٹ کرنے جارہے ہیں جس کا
ڈومین وقفہ ہوگا۔ مائنس ون اور پلس ون کے درمیان بند وقفہ اور رینج ظاہر ہے کہ مائنس پائی بائی ٹو اور پلس پائی بائی ٹو کے درمیان بند وقفہ ہوگا
اقدار کا ٹیبل ہے جو اس گراف کو پلاٹ کرنے میں ہماری مدد کرے گا sine x بمقابلہ ah sine xx یہاں
تو آئیے ah m سے شروع کریں۔ inus one
کا سائن مائنس ون کے برابر ہے pi by two تو ہم جانتے ہیں کہ ہمیں یہ معلوم ہے کہ مائنس
تو یہاں سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مائنس ون کا سائن الٹا مائنس پائی دو پر برابر ہے
مائنس ون sine inverse is equal to کے y تو مائنس ون کا سائن الٹا
برابر مائنس ون یہاں ہے اور مائنس ون کا سائن انورس ہے مائنس پائی از دو مائنس پائی بائی ٹو یہاں y تو
تو ہمارے پاس بنیادی طور پر یہ پوائنٹ ہے
pi by 2 تو یہ مائنس 1 ہے اور یہ ہے مائنس
ہے اس لیے ہمارے پاس بنیادی طور پر یہ پوائنٹ گراف پر ہے اور پھر آہ کو مزید آگے بڑھاتے ہوئے pi by 2 تو مائنس 1 کا سائن الٹا مائنس
کی سائن 3 بائے مائنس ہے pi ہمارے پاس مائنس
تو مائنس پائی کی سائن مائنس ہے جو مائنس کی سائن ہے ساٹھ ڈگری مائنس اسکوائر روٹ تین اوور ٹو کے برابر ہے اور وہاں سے ہم لکھ سکتے
ہیں کہ مائنس جڑ تین پر دو کا سائن الٹا مائنس پائی 3 سے زیادہ ہے
کا سائن انورس مائنس جڑ 3 اوور 2 کے برابر ہے y تو
تو یہ 4 یونٹ ہے اور مائنس روٹ 3 اوور 2 تقریبا 0 مائنس صفر پوائنٹ آٹھ چھ ہے
pi by three یہاں کہیں اور پھر مائنس tely تو یہ تقریباً ہو جائے گا
ہے pi by two تو یہ مائنس
ہوگا چونکہ یہ چھ یونٹ ہے یہ یہاں کہیں ہوگا اور اس لیے گراف پر یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں ملتا pi by three تو اس کا دو تہائی مائنس
ہے۔ اسی طرح اس گراف سے ہم یہ بھی دکھا سکتے ہیں کہ مائنس آہ کا سائن انورس مائنس آہ کا سائن انورس مائنس ون دو کے مربع جڑ کے سائن
انورس کے برابر ہو گا مائنس ون کے سائن انورس کے مائنس ون سے زیادہ مربع جڑ دو کا مائنس پائی بائی چار مائنس ہو گا۔ دو کا ایک اوور مربع
جڑ مائنس صفر پوائنٹ سات ہے جو یہاں کہیں ہے اور مائنس پائی بائی فور اس کا نصف ہے جو وہاں کہیں ہے

کا سائن 6 سے جو کہ مائنس 30 ہے ڈگری مائنس نصف ہے اور مائنس نصف ہے یہاں مائنس پائی pi تو یہ اور یہ یہاں ملیں گے اور پھر مائنس پائی سکس اس چیز کا ایک تہائی حصہ ہے جو یہاں ختم ہے
کی y تو ہمیں اس طرح کا ایک اور پوائنٹ ملتا ہے اور یقیناً صفر کا آہ سائن انورس صفر ہوگا جو کہ یہاں ہے اس سے ملتی جلتی چیز ہوگی پر ہے ah pos مثبت قدروں کے لیے
کے by 2 کے برابر ہے اور پھر جمع جڑ 3 pi by two کے لیے یہ پوائنٹ ہوگا کیونکہ مائنس سائن انورس کا سائن انورس برابر ah تو کے برابر ہے 3 جو یہاں پر ہے pi by کے برابر by 2 لیے ہمارے پاس روٹ 3
pi اوور فور کے لئے ہم یہاں یہ پوائنٹ حاصل کرنے جا رہے ہیں اور پھر pi تو یہ اور پھر یہ ہمیں یہ پوائنٹ حاصل کرے گا اور اسی طرح سے زیادہ چھ کے لئے ہمارے پاس یہ پوائنٹ ہے لہذا اگر ہم ان تمام نقطوں کو جوڑتے ہیں
تو ہم حاصل کریں
کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ ah کے لئے بھی cos y کے لئے گراف ہے اسی طرح sine inverse کے y تو یہ نقطے والا سرخ وکر فنکشن کے ڈومین کو محدود نہیں کرتے ہیں cos اگر ہم
تو پھر وجہ یہ ہے کہ چونکہ یہ ایک م
تواتر فنکشن ہے کیا ہوگا یہ ہے کہ ڈومین کے ساتھ پوری اصلی لائن کے طور پر ہم اس کے معکوس کی معنی خیز وضاحت نہیں کر سکتے کیونکہ y اس cos x کی بہت سی مختلف قدریں ہوں گی جس کے لیے x فنکشن کی حد میں لیتے ہیں وہاں cos کی کوئی بھی قدر جسے ہم اس y کے برابر ہو گا لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم پابندی کو کہتے ہیں۔ ٹی آہ بالکل سائن فنکشن کی طرح اگر ہم کوزائن فنکشن کو کوزائن فنکشن کے کے وقفہ تک محدود کرتے ہیں pi ڈومین کو 0 سے
فنکشن کو حقیقی لائن کے cos تک اگر ہم pi کے درمیان بند وقفہ کو 0 سے pi پر غور کرتے ہیں لہذا 0 سے pi تو ہم صرف 0 سے تک محدود کریں ah اس ذیلی سیٹ تک اس
فنکشن کا گراف اس طرح ہوگا اور پھر جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ بالکل اسی طرح سائن فنکشن کے کیس کے لیے یہ پوری رینج cos تو وقفہ تک محدود ہو تب pi کرنے کے لیے ڈومین کو 0 تک محدود کریں جب اس 0 سے pi احاطہ کرتا ہے چاہے ہم کوزائن فنکشن کی رینج کو بھی 1 اور مائنس 1 کے درمیان تمام ویلیوز 1 اور مائنس 1 کے درمیان ہیں کیونکہ یہ سرخ وکر 1 اور مائنس 1 کے درمیان مسلسل رہتا ہے۔ یہاں سے ایک سے شروع کریں اور جب ہم منحنی خطوط پر چلتے ہیں
کے ڈومین cos کے برابر ہوتا ہے لہذا x pi پر صفر کی قدر تک پہنچ جاتے ہیں اور پھر مزید نیچے ہم مائنس ون تک جاتے ہیں جب pi تو ہم کی کوئی بھی قدر لیتے ہیں y پوری رینج ہے۔ اب بھی وہی ہے جو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم pi کو محدود کرکے بھی فنکشن 0 سے
فنکشن کو دیکھیں جس کا ڈومین تھا پوری ah cos کے برابر لیتے ہیں اور ہمیں یہاں آدھا کہتے ہیں لہذا اگر ہم اصل y تو ہم کہتے ہیں کہ ہم کی بہت سی مختلف قدریں ہوں گی اور پھر یہاں ایک اور قدر اور یہاں ایک اور قدر اسی طرح ایک اور قدر یہاں x اصلی لائن پھر ہمارے پاس یہاں نصف کے برابر ہے لیکن جب ہم ڈومین کو محدود کرتے ہیں۔ صفر cos x کی اتنی لامحدود قدریں ہوں گی جس کے لئے x اور یہاں بھی اور تین یا ساٹھ pi کی ایک منفرد قدر جو اس صورت میں ہے اس مثال میں x کی صرف ایک قدر ہے x جو ہم دیکھیں گے وہ یہ ہے کہ pi سے کے لیے درست y نصف کے برابر ہے اور اس لئے کیا ہم دیکھتے ہیں کہ یہ صرف نصف کے برابر cos ڈگری ہے کیونکہ ساٹھ ڈگری کی کو لیتے ہیں جو لاگت کے فنکشن کی حد ہے جسے ہم دیکھیں گے کہ اس میں y مائنس ون سے پلس ون میں کسی دوسرے ah نہیں ہے ہم وقفہ کے برابر ہو گا اور یقیناً یہ بھی واضح طور پر واضح y اس x کہ cos o f ہو گا۔ اس محدود ڈومین میں اس طرح کہ x ہمیشہ ایک منفرد فنکشن کو دیکھ سکتے ہیں جب اس ڈومین تک محدود ہو جب 0 سے 0 تک محدود ہو cos ہے کیونکہ جیسا کہ ہم اس فنکشن
ہو گا اور x جو ہم لیتے ہیں اس وقفہ میں ہمیشہ ایک منفرد y تو گراف یکسر طور پر کم ہو رہا ہے اور اس وجہ سے کسی بھی قدر کے لیے فنکشن کا الٹا اب منفرد ہو سکتا ہے میرا مطلب ہے معنی خیز طور پر بیان کیا گیا ہے اسی طرح سائن فنکشن کے لیے ہمارے cos اس وجہ سے اور پھر یہاں ہمارے پاس قدروں کا ایک pi فنکشن کا الٹا مائنس ون سے پلس تک ہوتا ہے۔ ایک ڈومین اور رینج ہے بند وقفہ 0 سے cos پاس جدول ہے
مائنس ون کے برابر ہے اور cos کا pi تو جس طرح ہم نے سائن فنکشن کے لیے کیا تھا جس سے ہم شروع کرتے ہیں اسی طرح ہمارے پاس کے برابر ہوگا یہاں ہے pi pi کا الٹا مائنس ون کے برابر ہوگا یہاں y کے برابر ہوگا لہذا y کا مائنس ون cos inverse of اس لیے

تو ہمارے پاس گراف پر یہ پوائنٹ ہے ٹھیک ہے اور پھر ہم یہاں لیتے ہیں
مائنس ایک کے برابر ہے اور یہاں سے cos ہے چار برابر ہے دو کے مربع جڑ پر تین پائی کا cos اوور کی pi تو یہاں ہمارے پاس تھری کے برابر ہو گا pi الٹا تین cos ہمیں جو حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ دو کے مربع جڑ پر مائنس ایک کا
تو مائنس ایک
کے برابر دو کا مائنس ایک اوور مربع جڑ یہاں کہیں آہ ہے اور تین پائی بائی چار بنیادی طور پر تین چوتھائی ہے y تو
تو یہ نو یونٹ ہیں
تو تین چوتھائی ہوں گے کہیں چھ کے آس پاس اور تین چوتھائی یونٹ تین چار پانچ چھ اور کہیں وہاں ہمارے پاس جو نقطہ ہے وہ گراف پر یہ نقطہ جب ہم مزید آگے بڑھتے ہیں ah ہے اور اسی طرح
cos inverse of کے برابر ہے جب x مائنس نصف کے برابر ہے اور اس لئے pi by three دو x تو ہم دیکھتے ہیں کہ ah cos x minus half so cos inverse of cos y برابر مائنس نصف کے برابر ہے
برابر مائنس نصف کے یہاں ہے y تو
چھوٹے مربع کے برابر ہے ah کا دو تہائی ہے اس پوری رینج جو چھ ah کے برابر ہوگا جو کہ pi by three تو مائنس نصف کا الٹا دو کا یہ حصہ جسے میں ایک نقطے والی لکیر کے ساتھ دکھا رہا ہوں cos inverse curve تو وہ یہاں آتا ہے ۔ اب تک ہم نے حاصل کیا ہے ہوگا cos inverse pi by two صفر ہے اور اس لیے صفر کا cos of pi by two اور پھر ہم آگے ہم جانتے ہیں کہ ہوگا اس پوری رینج کا نصف جو یہاں کہیں ہو گا اور پھر اسی طرح کی cos inverse pi by two کا cos inverse of zero تو کی مثبت قدروں پر اس لائن کے بارے میں وکر ہے لہذا مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں y آہ ہم آہنگی ہو گی جس کے بارے میں آپ جانتے ہیں کہ ہو گا۔ 0 ہو cos inverse 1 ہے اور اس لیے cos 1 کہ 0 کا
تو یہاں یہ پوائنٹ کون سا ہے اور آئیے ایک اور پوائنٹ لیتے ہیں
cos inverse ہے نصف دائیں کے برابر ہے اس لیے pi by three جو cos ہم جانتے ہیں کہ ساٹھ ڈگری کا pi by three تو of half ہوگا pi by three so cos یہاں y کا الٹا نصف کے برابر ہے
یہاں ہے pi by 3 pi by 3 کا الٹا نصف کے برابر ہے cos y تو
کے لئے یہ وکر ہے الٹا فعل اسی طرح ہمارے پاس cos تو ہمارے پاس یہ نقطہ ہے لہذا وکر کچھ اس طرح نظر آئے گا اس طرح کچھ اس طرح

دوسرا ٹرائیگونو ہے۔ میٹرک فنکشنز اور ہر جگہ ہمیں ایک ہی مسئلہ درپیش ہے کہ اگر ہم پورے ڈومین کو دیکھیں جیسا کہ ہم نے پچھلے لیکچرز میں
بیان کیا تھا
تو معکوس کی معنی خیز وضاحت کرنا مشکل ہو جائے گا اور اس لیے ہمیں ڈومین کو محدود کرنا پڑے گا مثال کے طور پر ٹین فنکشن کے لیے
کے 2 کے طاق ضرب پر ٹین فنکشن غیر باؤنڈ pi کے طاق ضرب کے اس کی وجہ یہ ہے کہ pi ڈومین تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے 2 کے
اور نیلے نقطے والا وکر ٹین ایکس فنکشن x ہے عمودی محور کا ٹین ہے x محور پر ٹین فنکشن کا گراف ہے ہمارے پاس x ہوجاتا ہے لہذا یہ
ہے اور جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ایک بار پھر ایک م
کے درمیان pi کے ساتھ دہرایا جاتا ہے اور اس لیے ہم کیا کر سکتے ہیں کہ اگر ہم ٹین فنکشن کے ڈومین کو مائنس pi تواتر فنکشن ہے جو
وقفہ تک محدود رکھیں۔ دو سے جمع پائی دو سے
تو یہاں ہمیں بند وقفہ لینا ہے لہذا یہ کھلا وقفہ لے جائے گا کیونکہ اس طرح یہ کھلا وقفہ ہے کھلے وقفوں کو ایک گول بریکٹ اور بند سے ظاہر
کیا جاتا ہے۔ بند وقفہ کے لیے ہم ایک مربع بریکٹ لیتے ہیں اس لیے اگر ہم ڈومین کو اس کھلے وقفے تک محدود کرتے ہیں
تو کھلے وقفے کو لینے کی وجہ یہ ہے کہ ٹین فنکشن مائنس پائی بائی ٹو اور پلس پائی بائی ٹو پر بے حد ہو جائے گا لہذا ہمیں اس سے بچنا ہوگا۔
کے درمیان باقی تمام پوائنٹس ٹین فنکشن کا محدود ڈومین ہوں گے اور pi by two اور plus pi by two وہ دو پوائنٹس اس لیے مائنس
جب ہم ٹین فنکشن کو اس ڈومین تک محدود کرتے ہیں
تو محدود ٹین فنکشن کا وکر بن جاتا ہے میں اسے اس کے ساتھ دکھا رہا ہوں سرخ وکر کے ساتھ
تو سرخ وکر جیسا کہ ہم اب دیکھ سکتے ہیں سب سے پہلے سرخ وکر ٹین فنکشن کی پوری رینج کو مائنس انفینٹی سے لے کر پلس انفینٹی تک کا
کے درمیان کھلا وقفہ جو ہم pi by 2 اور plus pi by 2 احاطہ کرے گا لہذا ٹائم فنکشن کے ڈومین کو اس تک محدود کرکے بھی مائنس
دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ رینج اب بھی وہی ہے جو پہلے تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہے تاہم دلچسپ بات یہ ہوتی ہے کہ اگر ہم لیتے ہیں کیونکہ ہم
کی کسی بھی y دیکھتے ہیں کہ یہ سرخ وکر ایک یکسر بڑھتا ہوا منحنی حق ہے اور اس وجہ سے یہ واضح ہے کہ اگر ہم ٹین فنکشن کی حد میں
کی کوئی قدر لیتے ہیں y قدر میں
کی ایک انوکھی قدر ہوگی مائنس پائی بائی ٹو سے پلس پائی بائی ٹو x کی کوئی حقیقی قدر کیا ہے؟ ہم دیکھیں گے کہ اس وقفہ میں ہمیشہ y تو
pi کے برابر ہوگا لہذا ٹین کے لئے دوبارہ فنکشن یہ واضح ہے کہ ڈومین کو مائنس y کا ٹین اس x کی منفرد قدر ہوگی اس طرح کہ x میں
فنکشن کے معکوس کو منفرد طریقے سے بیان کیا جا سکتا tan کے درمیان کھلے وقفے تک محدود کرنے سے plus pi by 2 سے by 2
ہے اس لیے اس سلائیڈ پر ہم دوبارہ بالکل اسی طرح سائن اور کوزائن فنکشن کی طرح پلاٹ کرتے ہیں۔ ٹین فنکشن کے الٹا کا گراف تاکہ ہم دیکھ
سکیں کہ ٹین انورس فنکشن کا ڈومین تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہے یقیناً رینج مائنس پائی بائی ٹو اور پلس پائی بائی ٹو کے درمیان کھلا وقفہ ہے
جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے اور آئیے اب گراف بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔ لہذا جیسا کہ ہم یہاں اقدار کے اس جدول سے دیکھ سکتے ہیں کہ
سب سے پہلے 0 کا ٹین 0 ہے لہذا ہم جانتے ہیں کہ 0 کا ٹین 0 ہے اور اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ صفر کا ٹین الٹا صفر کے برابر ہوگا
برابر صفر سے y تو ٹین الٹا
کا ٹین الٹا صفر کے برابر ہے صفر کے برابر ہے y تو
صفر کے برابر ہے y کا ٹین الٹا عمودی محور پر پلاٹ کیا گیا ہے لہذا y کو افقی محور پر پلاٹ کیا گیا ہے اور y تو اس گراف میں ہمارے پاس
pi by six یہ نقطہ ہے اور ٹین میں ٹین صفر کا الٹا بھی صفر ہے لہذا ہمارے پاس ٹین الٹا کے گراف پر یہ نقطہ ہے پھر ہم دیکھتے ہیں کہ
کے برابر ہوگا۔ ٹین اوور روٹ تھری کا ٹین انورس ہے pi by six ایک اوور جڑ تین ہے اور اس لیے ایک اوور جڑ تین کا ٹین الٹا ah tan کا

یہاں کہیں پر ہونا چاہئے ah تو ایک پر جڑ تین ہے
کے برابر ہو گی۔ 6 تک جو اس pi برابر 1 اوور جڑ 3 کے برابر y برابر ہے 1 اوور جڑ 3 کے اور ٹین انورس فنکشن کی ویلیو اور y تو یہ
کا ٹین بذریعہ 4 1 ہے اور چونکہ ٹین pi ہو گا۔ وہاں کہیں اور پھر یقیناً ہم جانتے ہیں کہ s پوری رینج کا ایک تہائی ہے جو یہاں کہیں ہو گا
برابر ہوگا ایک کا y کے 4 کے برابر ہوگا اس لیے ٹین کا الٹا pi کے ٹین کا ٹین بذریعہ 4 برابر 1 ہے اس کے بعد 1 کا ٹین الٹا pi آف چونکہ
pi by چار pi ہوگا
چار یہاں ہے pi by کے برابر ایک یہاں ہے اور y تو
تو ہمارے پاس یہ نقطہ گراف پر دائیں ہے اور اسی طرح ہم دوسرے پوائنٹس کو بھی پلاٹ کرسکتے ہیں
کی قدر لامحدود تک y کی طرف جائے گی جیسے ہی y تو ہمیں آخر میں کیا ملے گا اس طرح کا منحنی خطوط لیکن نوٹ کریں کہ ٹین الٹا کی قدر
کے لامحدود تک پہنچ جائے گی۔ y الٹا کی قدر tan کی مثبت قدروں کے لئے مثبت پہلو پر y جائے گی کیونکہ یہ infinity tan
سے دو کے برابر نہیں ہوگا یہ آپس میں مل جائے گا جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ pi پر دو سے جائے گا لیکن کبھی بھی inverse y pi
یہ گراف آہ کی طرف جا رہا ہے
اس لیے یہ نقطے والا وکر کبھی pi by two کے برابر pi تو یہ عمودی محور کی قدر کے مطابق لائن ہے جو عمودی پر قدر ہے۔ محور
کی منفی y ٹھوس سرخ لکیر اور اسی طرح منفی سائیڈ پر بھی اس ٹیبل کا استعمال کرتے ہوئے ہم h سے آگے نہیں بڑھے گا۔ a بھی اس
قدروں کے لیے منفی طرف کا منحنی خط کھینچ سکتے ہیں اور یہاں تک کہ جو منحنی خطوط ملے گا وہ کچھ اس طرح ہے
سے 2 کے مساوی pi کے مساوی ہے جو کہ عمودی محور پر مائنس tan inverse y تو یہاں تک کہ ہمارے پاس یہ لکیر ہے جو جو کہ
مائنس انفینٹی پر جاتا ہے y ہے اور جیسا کہ
تو اگر ہم اس سمت جاتے ہیں
کی اس قدر سے 2 بذریعہ قریب pi تو کیا ہوتا ہے کہ گراف اسی طرح جائے گا جیسا کہ آپ یہاں سے دیکھ سکتے ہیں کہ گراف جائے گا۔ مائنس
کے برابر نہیں ہوگا۔ pi by 2 کبھی بھی مائنس tan inverse y اور قریب ہے لیکن کبھی بھی اس سے تجاوز نہیں کرے گا کہ درحقیقت
فنکشن کے علاوہ کچھ نہیں ہے۔ 1 اوور cortex فنکشن ہے cotangent فنکشن کے لیے بھی کہ ہمارے یہاں cotangent اسی طرح
ٹین ایکس
کے cos x cotangent x کے طور پر بھی لکھ سکتے ہیں لہذا sin x sin x سے زیادہ cos x ہے یا ہم اسے an تو جو کہ
x کی pi whe ایک ضرب ہے ایک عدد عدد x کے برابر ہے اور اس وجہ سے آپ جو دیکھیں گے وہ یہ ہے کہ جب بھی sine of x
کے عددی ضرب ہونے pi کے لئے cotangent x کے x ہے اور اس لئے pi sine 0 کے x ایک عدد عدد نہیں ہے never x
cot on کا x کو افقی محور پر پلاٹ کیا ہے اور x کی اچھی طرح وضاحت نہیں کی گئی ہے اور یہ اس گراف سے واضح ہے جہاں ہم نے
کے two pi یا pi برابر x صفر کے برابر یا x کے عددی ضرب میں مثال کے طور پر pi عمودی محور میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ
برابر ہم دیکھتے ہیں کہ گراف یا
تو جمع انفینٹی یا مائنس انفینٹی پر جاتا ہے
فنکشن کے ڈومین کی وضاحت کی گئی ہے اس کی وضاحت اس طرح کی گئی cot تو یہ غیر محدود دائیں بن جاتا ہے اور اسی وجہ سے جب

کے تمام عددی ضربوں pi ہے تاکہ ہم ڈومین کے لیے اس سیٹ کے علاوہ تمام حقیقی قدروں پر غور کر سکیں اور یہ سیٹ بالکل وہی ہے جو
سے ہماری مراد ہے لہذا یہ راگ کا ڈومین سیٹ ہے۔ فنکشن اور یقیناً رینج تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہو گا کیونکہ راگ کا فنکشن مائنس انفینٹی اور
کے ساتھ م pi حقیقی قدروں کو لے جائے گا اور یقیناً یہ ah پلس انفینٹی کے درمیان تمام
ایک م cot x تواتر بھی ہے لہذا
pi کے ساتھ ah تواتر فنکشن ہے
یعنی اگر آپ صرف اسی ڈومین پر غور کریں جس کی یہاں تعریف کی گئی ہے cot of pi plus xi برابر ہے cot x تو
کو لیں y کی کوئی بھی قدر ہے جسے ہم یہاں لیتے ہیں ہم کہتے ہیں کہ ہم اس y تو یہ وضاحت کرنا مشکل ہو جائے گا کہ راگ فنکشن کے الٹا
کے مساوی ہے تین سے دو کے برابر ہے y تو یہ
کے برابر ہوگی اور اس 2 x اس قدر تین cot کی x کی بہت سی مختلف قدریں جس کے لئے x کی بہت سی مختلف قدریں ہوں گی x تو
فنکشن کے معکوس کو معنی خیز طور پر بیان نہیں کیا جا سکتا اور اس لیے cot نہیں ہے اور اس لئے اس ڈومین کے ساتھ x لئے کوئی منفرد
فنکشن کے ڈومین کو محدود کرنا پڑتا ہے chord ہمیں دوبارہ
تک لے جاتے ہیں۔ لیکن ہم پوائنٹ 0 pi تک محدود کرتے ہیں لہذا ہم اس وقفہ کو 0 سے pi تو ہم کیا کرتے ہیں ہم ڈومین کو اس وقفہ کو 0 سے
کو شامل نہیں کر سکتے کیونکہ راگ کا فنکشن بے حد ہے یہ ان دو اختتامی پوائنٹس پر اچھی طرح سے بیان نہیں کیا گیا ہے لہذا ہم 0 pi اور
جب ہم اسے محدود کرتے erval کے درمیان کھلا وقفہ لیتے ہیں اور راگ فنکشن کے ڈومین کو اس اوپن انٹ تک محدود کرتے ہیں۔ pi سے
ہیں
تک محدود ہے اب وہی بن جاتا ہے جو میں یہاں سرخ ٹھوس سرخ وکر کے pi تو ہم کیا دیکھتے ہیں کہ راگ فنکشن کا وکر اس کھلے وقفے 0 سے
تک جو ہم pi فنکشن کا ڈومین اوپن انٹرول 0 سے cot ساتھ کھینچ رہا ہوں اور اب یہ دیکھنا بہت آسان ہے کہ محدود کرنے کے بعد بھی
دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ رینج ابھی بھی مائنس انفینٹی سے پلس انفینٹی تک ہے لہذا کورڈ فنکشن کی رینج تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہے یہاں تک کہ
اور دوسرا یہ دیکھنا بھی بہت آسان ہے کہ یہاں ٹھوس وکر یک طرفہ طور پر pi ڈومین کو اس سے محدود کرنے کے بعد بھی کھلا وقفہ 0 سے
لیتے ہیں y کم ہو رہا ہے اور اس لیے اگر ہم راگ فنکشن کی حد میں کوئی
لیں y تو اگر ہم کوئی
لیں ay تو ہمیں یہاں
کو لیں y تو ہم اس
مائنس تھری بائی دو ah ہے y تو یہ
لیں گے y تو اگر ہم کوئی
کے برابر y اس cot کا x فنکشن کے اس محدود ڈومین میں اس طرح پڑے گا کہ chord ہوگا جو یہاں موجود ہے جو x تو ایک منفرد
کی کوئی بھی قیمت جو آپ لیتے ہیں اور یہ بھی بہت واضح ہے کیونکہ یہ راگ فنکشن اس میں ایک مستقل فنکشن ہے y یا f ہوگا۔ یہ سچ ہو گا
اس میں یہ اس محدود ڈومین میں ایک مسلسل فنکشن ہے اور اس کے علاوہ یہ یکسر طور پر کم ہورہا ہے اور اس وجہ سے راگ فنکشن کو اس
فنکشن کے cot inverse ڈومین تک محدود کرکے ہمیں اس کے معکوس کو معنی خیز طور پر بیان کرنے کے قابل ہونا چاہئے لہذا ہم دوبارہ
لئے گراف کو پلاٹ کرنے کی کوشش کرتے ہیں جس کا ڈومین تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہوگا اور رینج اب راگ فنکشن کا محدود ڈومین ہوگا جو کھلا
صفر کے cot of pi by two وقفہ ہے۔ صفر سے پائی کے درمیان اب ہم جانتے ہیں کہ آئیے یہاں سے شروع کریں ہم جانتے ہیں کہ
کے برابر ہوگا cot inverse pi by two برابر ہے اور اس لیے صفر کا
برابر صفر کے برابر ہے cot inverse of y تو
کے برابر ہوگا pi کے برابر ہوگا دو سے pi برابر صفر ہے یہاں y تو
یہاں ہے pi by two تو
کے گراف پر حاصل کرتے ہیں cot inverse y تو ہم یہ نقطہ
کو عمودی محور پر پلاٹ کیا جائے cot inverse کے مترادف y co ہے افقی محور پر پلاٹ ہے اور y تو یہاں گراف میں ہمارے پاس
cot inverse of ہے تین کے مربع جڑ پر ایک کے برابر ہے اور اس لیے ایک کا cot کی pi گا اسی طرح ہمارے پاس تین کے اوپر
مربع جڑ تین کے برابر ہوگا one over
سے زیادہ تین یہاں کہیں ہوگا pi کے اوپر مربع جڑ تین کا کہیں پر ہوگا اور ah کا cot inverse one تو
تو یہ وہاں کہیں ہوگا اور پھر جیسا کہ ہم یہاں یہ نقطہ حاصل کریں گے
تو یہ ہے
کو کو مزید مثبت اقدار میں بڑھاتے ہیں لہذا ہم y کے برابر ہے اور پھر جیسا کہ ہم pi over three تھا یہ pi over two تو یہ
ہو جائے گا cot inverse pi 6 کے مربع جڑ کا ah 3 یہاں اس سمت جا رہے ہیں لہذا مثال کے طور پر
کم ہو جائے گا اور صفر کی طرف جائے گا cot inverse کو بڑھاتے ہیں وہ ہے y تو جیسا کہ ہم
cot inverse تو
ہے pi by six برابر cot inverse تو یہاں سے جدول سے ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ تین کے مربع جڑ کا
ہے pi کہیں pi by 6 تو تین کا مربع جڑ یہاں کہیں ہوگا اور
یہ ہے یہ پائی ہے۔ 6 کے حساب سے۔ pi تو
تو ہم اس نقطہ کو وکر پر صحیح طریقے سے حاصل کرتے ہیں لہذا بنیادی طور پر ہمارے پاس اب تک جو کچھ ہے وہ ہم نے پلاٹ کیا ہے اور یہ
پر جائے گی صفر کی طرف جائے گی لیکن یہ کبھی نہیں ہوگی صفر y infinity cot inverse قدر جتنی y اس طرح جائے گا لیکن
کی cot x کی منفی قدروں کے لیے جو ہم دیکھیں گے وہ یہ ہے کہ اس میں ایک ہی قسم کا وکر ہوگا اور جیسے ہم y دائیں کے برابر ہو اور پھر
مثال ah cot inverse منفی قدروں کو دیکھ کر کھینچ سکتے ہیں، مثال کے طور پر یہاں سے ہم کیا کریں گے دیکھیں یہ ہے کہ مائنس 1 کا
کے طور پر تین پائی اوور فور کے برابر ہوگا
تو مائنس ون یہاں ہے اور تین پائی پر فور ہوگا
تو یہ چھ یونٹ ہے
تو تین پائی اوور فور ساڑھے چار یونٹ ہوں گے
تو یہ یہاں کہیں ہو گا
کے لیے جو ہم ah for on تو یہ مائنس ون کے برابر ہے اور یہاں یہ قدر تین پائی سے زیادہ چار ہے اور پھر مزید منفی قدروں کے لیے
کی طرف جائے گا pi کی قدر فنکشن cot inverse دیکھیں گے وہ یہ ہے کہ
تو اب ہم اندر جا رہے ہیں ۔ یہ سمت اس طرح جب ہم اس کی قدر بناتے ہیں

زیادہ منفی ہو جاتا y زیادہ سے زیادہ منفی ہوتا جاتا ہے لہذا مائنس ون سے مائنس مربع جڑ تین تک y کی قدر ہے جیسا کہ y تو یہ اس کالم میں
کی طرف pi کی قیمت آہ جا رہی ہے x ہے اس
تو ہمارے پاس کیا ہوگا
تو یہ ah ہے
تو یہ pi ہے
کے لئے سرخ نقطے والا وکر ہے تاکہ cot inverse کے y تو یہ منحنی خطوط والا وکر کچھ اس طرح جائے گا لہذا ہمارے پاس آخر میں
سے کم ہوگا درحقیقت یہ کبھی بھی pi کی طرف ہوگا لیکن ہمیشہ pi کا رجحان y بن جائے cot inverse زیادہ سے زیادہ منفی y
ہے جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ cosecant فنکشن cosecant کا x فنکشن ہے لہذا ah cosecant کے برابر نہیں ہوگا اگلا فنکشن pi
کے سائن پر 1 کے طور پر بیان کیا گیا ہے اور یہ بھی ہے ایک م x
صفر کے برابر ہوتا ہے sin x سے زیادہ 1 ہے جب بھی sine کے x تواتر فنکشن ٹرگنومیٹرک فنکشن اور چونکہ یہ
کا ایک عدد عدد ہے معنی خیز طور پر بیان نہیں کیا pi cosecant کے x x تو اسے معنی خیز طور پر بیان نہیں کیا جائے گا لہذا جب بھی
کے عددی ضرب کے اس لیے یہ pi فنکشن تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے سوائے cosecant جاتا ہے اور اس وجہ سے اس کا ڈومین
کی حد sine x پر 1 ہے اور cosecant x sine x کا ڈومین ہے اور اس حد کے لیے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ cosecant x
تمام اقدار کو وقفہ مائنس 1 سے جمع 1 سے باہر لے جائے گا۔ x تمام ہے مائنس 1 اور پلس 1 کے درمیان کی قدریں کیا ہوں گی کہ 1 اوور سائن
جیسا cosecant کا x ہے اور ہمارے پاس ہے عمودی محور پر x اور یہ اس گراف سے بہت واضح ہے جہاں ہمارے پاس افقی محور پر
کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نیلے نقطے والا وکر کبھی بھی مائنس ون اور پلس ون کے درمیان کوئی قدر نہیں لے گا اور یہ اس لیے ہے کہ یہ سائن
فنکشن کی رینج تمام حقیقی نمبروں cosecant مائنس ون اور پلس کے درمیان قدریں لیتا ہے۔ ایک اور اس لیے sin x سے زیادہ ہے اور x
کا سیٹ ہے سوائے اس رینج مائنس 1 سے جمع 1 کے اور اس لیے اب اس کے ساتھ کیونکہ یہ اب بھی م
تواتر ہے جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ اب بھی ایک م
کا ایک م cosecant x تواتر فنکشن ہے
فنکشن کے معکوس کو معنی خیز طور پر بیان نہیں cosecant اگر ہمارے پاس ہے۔ یہ ایک ڈومین کے طور پر ہم اب بھی x تواتر فعل ہے۔
فنکشن کے ڈومین کو محدود کرنے کی ضرورت ہے جیسا کہ ہم نے دوسرے پچھلے ٹرگنومیٹرک cosecant کر سکتے ہیں اور اس لیے ہمیں
فنکشنز کے لیے کیا ہے لہذا اس معاملے میں ایک ممکنہ انتخاب یہ ہے کہ ہم اس پر غور کریں۔ وقفہ مائنس pi by 2 to plus pi by 2
تک محدود کرنے cosecant سوائے پوائنٹ 0 کے۔ لہذا ہم pi by two to plus pi by two فنکشن کے ڈومین کو بند وقفہ مائنس
معنی خیز طور پر بیان نہیں کیا گیا ہے کیونکہ یہ غیر zero cosecant کا x کے برابر x جا رہے ہیں لیکن پوائنٹ صفر کے علاوہ کیونکہ
فنکشن کو محدود کرنے سے cosecant کو اس سیٹ یا حقیقی لائن کے اس ذیلی سیٹ تک محدود ah محدود ہو جاتا ہے لہذا اب تک
فنکشن کا گراف کچھ اس طرح نظر آئے گا لہذا میں میں اسے یہاں ٹھوس سرخ وکر کے ساتھ کھینچ رہا ہوں اور restricted cosecant
فنکشن کے ڈومین کو اس وقفہ تک محدود کرکے دیکھ سکتے ہیں کہ ہم دیکھتے ہیں کہ تمام آر محدود cosecant جیسا کہ ہم cosecant
فنکشن کا اینج اب بھی وہی چیز ہے جو تمام حقیقی اقدار ہیں سوائے مائنس ون ٹو پلس ون کے کیونکہ یہ مائنس ون سے پلس ون کے درمیان میری
کوئی بھی قدر نہیں لے سکتی لیکن اقدار کی اس حد کے علاوہ یہ دیگر تمام ممکنہ اقدار کو لیتی ہے۔ کیونکہ مائنس پائی 2 اور 0 کے درمیان وقفہ
کے لیے اگر ہم یہاں سے شروع کرتے ہیں
تو یہاں یہ قدر ہے یہ مائنس ون ہے اور اگر ہم اس طرح جائیں
تو ہم دیکھیں گے کہ وکر مسلسل ہے اور مائنس ون سے شروع ہو رہا ہے۔ یہ مائنس انفینٹی تک جاتا ہے اور اسی طرح اگر ہم یہاں سے شروع کریں
تو یہ ویلیو پلس ون ہے اور اگر ہم اس طرح چلتے ہیں
تو منحنی خطوط دوبارہ جاری رہتا ہے اور یہ قدر سے ایک سے لامحدود تک جاتا ہے لہذا ہمارے پاس قدریں ہیں۔ ایک سے انفینٹی اور پھر مائنس 1
سے مائنس انفینٹی کی طرف جانا جو کہ بنیادی طور پر ایک ہی رینج ہے لہٰذا ڈومین کو حقیقی لائن کے اس سب سیٹ تک محدود کرنے سے بھی
جو ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ اگر ah ایک ہی ہے اور اس کے علاوہ ains فنکشن کی حد اب بھی وہی ہے جو اب بھی باقی ہے cosecant
لیتے ہیں y ہم کوئی
لیتے ہیں y تو ہمیں اس رینج سیٹ میں کوئی
کی یہ قدر دو پوائنٹ پانچ کے مساوی ہے۔ y کی اس خاص قدر کو لیتے ہیں لہذا y تو ہم یہ کہتے ہیں کہ ہم یہاں
تو یہ آہ ہے
دو پوائنٹ پانچ کے برابر ہے y تو یہ
یہ قدر cosecant 2.5 کی x کی بالکل ایک منفرد قدر ہے جو یہاں ایسی ہے کہ اس x تو اس آہ کے لیے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ
کے برابر ہے اور یقیناً یہ قدر محدود ڈومین میں ہے اگر ہم نے ڈومین کو محدود نہ کیا ہوتا کہ بہت سی دوسری قدریں ہوتیں مثال کے طور پر x
کی یہ قدر x کی یہ قدر یا x کی یہ قدر یا مثال کے طور پر
ہوتا اور اس وجہ سے اس کی کوئی cosecant 2.5 کا x کا اس طرح کہ x قدریں ہوتیں۔ x تو لامحدود طور پر بہت سی مختلف دیگر
انوکھی قدر نہیں ہے لیکن جب ہم ڈومین کو اس وقفہ تک محدود کرتے ہیں
ڈومین اس طرح کہ ted ہو گا۔ پابندی میں ایک منفرد ایکس x کی کسی بھی قدر کے لیے ہمیشہ ایک منفرد y تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس حد میں
فنکشن کے معکوس کو cosecant کے برابر ہو گا اور اس لیے دوبارہ اس پابندی کو کرنے سے ہمیں y کی قیمت cosecant y کا x اس
معنی خیز طور پر بیان کرنے کے قابل ہونا چاہیے جو میرے پاس ہے اسے اس سلائیڈ میں پلاٹ کرنے کی کوشش کروں گا۔ یہ بالکل اسی طرح کیا
جا سکتا ہے جو ہم دوسرے فنکشنز کے لیے دوسرے کے لیے کر رہے ہیں اور میں آپ کو جلدی سے دکھاؤں گا کہ یہ کیسا لگتا ہے
ہے y تو یہ اس طرح نظر آتا ہے پھر ٹیبل کا استعمال کرتے ہوئے ہم پلاٹ کر سکتے ہیں تاکہ ہمارے پاس کیا ہے۔ کیا ہمارے پاس افقی محور پر
فنکشن کی حد ہو گا لہذا cosecant کا ڈومین cosecant inverse function الٹا ہے cosecant کا y اور عمودی محور پر
کا ڈومین تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے وقفہ مائنس ون کے ٹو پلس ون اور کوسیکینٹ الٹا فنکشن کی رینج cosecant inverse function
ہے دو سے پوائنٹ صفر pi فنکشن کا ترمیم شدہ یا محدود ڈومین ہوگا جسے ہم نے پچھلی سلائیڈ پر دیکھا تھا جو کہ بند وقفہ مائنس cosecant
سے دو اور پھر اقدار کے اس جدول کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے ہم سرخ وکر کے ذریعے یہاں اور یہاں یہ ہے کہ pi کے علاوہ
زیادہ سے زیادہ مثبت y کے ساتھ دیکھ سکتے ہیں جیسے جیسے ah کا گراف کیا ہے اور جیسا کہ ہم cosecant inverse function
کے معکوس صفر کی اس قدر کی طرف جائے گا لہذا یہاں یہ منحنی سرخ وکر ہمیشہ مثبت طرف افقی محور cosecant ہوتی جائے گی قدر
کی منفی قدروں کے لیے سرخ وکر ہمیشہ افقی محور سے نیچے رہے گا لہذا میرا مطلب ہے کہ اس حصے کا یہ حصہ y کے اوپر رہے گا اور
وکر اور اسی طرح سیکنٹ فنکشن میں بھی ایسا ہی مسئلہ ہوگا اور سیکنٹ فنکشن کے لیے بھی ہمیں سیکنٹ فنکشن کے معکوس کو معنی خیز طور

ah کا x پر بیان کرنے کی ضرورت ہے بالکل اسی طرح دوسرے مثلثی فنکشنز کی طرح ہمیں اس کے ڈومین کو بھی محدود کرنا ہوگا کیونکہ
کا ایک طاق ضرب دو سے ہوتا x pi صفر ہوتا ہے جب بھی cos کا x اور ہم جانتے ہیں کہ cos کا ایک اوور x برابر ہے۔ secant
کے طاق ضرب دو سے pi تمام حقیقی اعداد سوائے f کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ o ہے لہذا سیکنٹ فنکشن کے ڈومین سیٹ کو تمام سیٹ
کے دو سیکنٹ کی اچھی طرح وضاحت نہیں کی گئی ہے جیسا کہ اس گراف سے بھی دیکھا جا سکتا ہے جہاں x کے طاق ضرب پر pi کیونکہ
کا سیکنٹ اور جو ہم دیکھتے ہیں وہ سیکنٹ فنکشن بھی م x ہے اور عمودی محور پر x ہمارے پاس افقی محور پر
مائنس ون اور پلس cos x ہے اور cos x کا سیکنٹ ایک سے زیادہ x تواتر ہے اور رینج جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ کیونکہ
ون کے درمیان ہے
کی رینج فنکشن پوری اصلی لائن ہے جو کہ یہاں مکمل عمودی محور ہے سوائے مائنس ون اور پلس ون کے درمیان secant تو کیا ہوتا ہے کہ
اس وقفے کے
تو یہ رینج ہے اور دوسرے مثلثی فنکشنز کی طرح ہمیں پھر وہی مسئلہ درپیش ہے کہ چونکہ سیکنٹ فنکشن ہے اس ڈومین کے ساتھ م
تواتر ہوتا ہے۔ اس کے ساتھ بطور ڈومین ہم معکوس کو معنی خیز طور پر بیان نہیں کر سکتے ہیں اور اس لیے ہمیں سیکنٹ فنکشن کے ڈومین کو بھی
لیتے ہیں۔ r کے درمیان محدود کرنے کی ضرورت ہے اس لیے ہم کیا کرتے ہیں کہ ہم ڈومین کو 0 اور pi محدود کرتے ہیں لہذا ہم
pi by two برابر x کے درمیان بند وقفہ ہے لیکن جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہمارے پاس پوائنٹ pi ڈومین صفر سے estricted
کے دو حصے کے برابر ہے یہ ہے حد ہے صحیح طریقے سے وضاحت x پر pi برابر x کے نہیں ہونا چاہئے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ
فنکشن کا گراف پھر وہی ہوگا secant کے اور pi 2 by کا وقفہ ہوگا سوائے پوائنٹ pi نہیں کی گئی ہے لہذا ترمیم شدہ ڈومین 0 سے
پر 2 تک محدود ہے اور جیسا x pi فنکشن کا گراف ہوگا جب ڈومین اس وقفہ secant جو میں سرخ وکر کے ساتھ ڈرائنگ کر رہا ہوں لہذا یہ
کہ ہم پوری حد کو دیکھ سکتے ہیں یہاں تک کہ ڈومین کی اس پابندی کے بعد بھی یہ اب بھی تمام حقیقی قدریں ہیں سوائے وقفہ مائنس 1 سے جمع 1
کی کوئی بھی قدر لیں y کے حق کے اس لیے تمام اقدار ہیں وہاں سوائے مائنس 1 سے جمع 1 کے اور یہ بھی جو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم
کی کوئی بھی قدر لیں y تو ہم ہمیشہ کر سکتے ہیں لہذا اگر ہم
کی وہ قدر اس وقفہ اور اس کے بعد ہوگی۔ اس پابندی کے ذریعے x اور y کا سیکنٹ برابر ہے x کی ایک منفرد قدر ہوگی اس طرح کہ x تو
y ہم سیکنٹ فنکشن کے معکوس کو معنی خیز طور پر بیان کر سکتے ہیں جس کی میں یہاں وضاحت کر رہا ہوں اس لیے اس گراف پر ہمارے پاس
ہے افقی محور پر اور سیکنٹ الٹا عمودی محور پر پلاٹ کیا گیا ہے اور جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہم دوبارہ اس کی طرف جا رہے ہیں۔ ایکس
بمقابلہ سیکینٹ ایکس کے لیے ٹیبل ویلیوز کا استعمال کریں سیکنٹ الٹا فنکشن کی وضاحت اس سے کی گئی ہے یہ وہ ڈومین ہوگا جو بنیادی طور پر
pi by 2 ہے سوائے پوائنٹ pi سیکینٹ فنکشن کی حد ہے اور سیکینٹ الٹا فنکشن کی رینج سیکینٹ کا محدود ڈومین ہوگا۔ فنکشن جو 0 سے
کے۔ یہ وہی ہے جو ہمیں ملتا ہے جو اس لیکچر میں ہم نے شروع میں مثلثی افعال کے الٹا کی وضاحت کرنے کی کوشش کی تھی لیکن ہم فوری طور پر
ہیں۔ ان میں سے زیادہ تر م ah ایک پریشانی میں پڑ گئے کیونکہ مثلثی افعال
w تواتر ہیں اور اس لیے ان کے ڈومینز کی عام تعریف کے ساتھ ان کے معکوس کی معنی خیز وضاحت کرنا مشکل ہے اور پھر ہم کیا کہتے ہیں
یہ تھا کہ اگر ہم ان فنکشنز کے ڈومین کو محدود کرتے ہیں
تو ہم ان کے معکوس کو معنی خیز طور پر بیان کر سکتے ہیں لہذا اگلی کلاس میں ہم ان سب کو لے کر ان 6 معکوس ٹرگنومیٹرک فنکشنز کے درمیان
بہت سی شناخ
توں اور تعلقات کو ثابت کرنے کی کوشش کریں گے جن کی وضاحت ہم نے آج کی کلاس میں کی ہے۔ آپ کا شکریہ