بیلو اور حدود کے چوتھے لیکچر میں خوش آمدید
تو آخری لیکچر میں ہم نے لامحدود حدود کے بارے میں بات کی اور پھر ہم نے افعال کے مجموعے کے حوالے سے حدود کی خصوصیات میں سے
کچھ کو دیکھا اور پھر ہم نے افعال کی پیداوار سے آغاز کیا ۔ میں اس کے ساتھ جاری رکھتا ہوں
ہے l کی حد g کی x ہے اور a کی حد لامحدود f کی x تو آخری بار ہم اس تھیوریم پر رک گئے اگر
غیر صفر ہے l تو اور فرض کریں کہ
منفی ہے l مثبت ہے اور یہ منفی لامحدود ہے اگر l ہے لامحدودیت کے برابر اگر gx اوقات fx تو پروڈکٹ فنکشن کی حد
مثبت ہے l مثبت کے معاملے میں ثابت کرتا ہوں لہذا فرض کریں کہ l تو میں اسے
mod تو ہمیں جو دکھانا ہے وہ یہ ہے کہ ہمیں صفر سے بڑا دیا جائے ہمیں ضرورت ہے ہمیں ڈیلٹا مثبت تلاش کرنے کی ضرورت ہے جیسے کہ
سے زیادہ ہے صحیح gx m گنا fx کے برابر نہیں ہے اس کا مطلب یہ ہوگا کہ a سے کم x مائنس ڈیلٹا x
مثبت ہے اس لیے ایپسیلون لینے l کے برابر ہے۔ لینے سے اور l تک جاتی ہے۔ a کی حد g کی xx تو سب سے پہلے ہم جانتے ہیں کہ
مائنس ڈیلٹا mod x کو دو کے برابر کہنا جو کہ مثبت بھی ہے ہم ایک ڈیلٹا تلاش کر سکتے ہیں مجھے ڈیلٹا 1 مثبت لکھنے دیں جیسے کہ l سے
دو کے برابر ہے جس کا مطلب ہے l x مطلق قدر میں ایپسیلون سے کم ہے جو کہ g l مائنس کا x سے کم 0 سے بڑا اس کا مطلب ہے 1
کی g کے صرف اس x دو کے درمیان ہے لیکن ہمیں l x دو اور تین l x سے بڑا ہے اس صورت میں g کے دو g l x کا x
کی حد لامحدودیت کے برابر ہے وہاں ڈیلٹا 2 مثبت موجود ہے جیسے کہ f کی x سے دو سے زیادہ اسی طرح کیونکہ چونکہ l ضرورت ہے۔
ایک آپ لیتے ہیں اور پھر پھر ہم لکھیں گے کہ m اس سے بڑا ہے جو بھی مثبت نمبر x f x کا x مائنس ڈیلٹا ٹو سے کم کا مطلب ہے mod x
یہ ایم ون کیا ہونا چاہیے اس کے لیے اگر ہم ایسا لیں گے اگر ڈیلٹا کم از کم ڈیلٹا ون اور ڈیلٹا ٹو کے برابر ہے
دو سے بڑا ہے اور جو ہم l سے ایک گنا m گنا جی fx کا x مائنس ڈیلٹا سے کم ہے اور 0 سے زیادہ اس کا مطلب یہ ہوگا کہ mod x تو
m کے برابر کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ m دو بار l ایک بار m سے بڑا ہونا چاہئے لہذا ہم m ہے۔ ٹوپی یہ t چاہتے ہیں وہ
کا انتخاب کرتا ہوں m by l ایک کو دو m ہونا چاہئے لہذا اگر میں m x l ایک کے برابر دو بار
ڈیلٹا سے کم ہوتا mod x minus a سے بڑا ہوتا ہے جب بھی fxdx m کے برابر ہے اور یہ کہتا ہے کہ m سے دو l ایک بار m تو
ہے
صفر سے کم کے لیے ثابت کر سکتے ہیں l کی حد لامحدودیت کے برابر ہوتی ہے اسی طرح ہم fxgx تو
صفر کے برابر ہے l تو مجھے اس حصے کو چھوڑنے دیں اگلا حصہ ہم کریں گے۔ دیکھیں کیا ہوتا ہے اگر
تو یہ زیادہ اہم ہے
صفر کے برابر ہے l تو سوال کریں کہ اگر
تو صفر کے برابر کی حد ہے کیا یہ لامحدودیت ہے کیا یہ کچھ اور ہے
مربع کہنے کے برابر g x کا x کے برابر نہیں ہے اور 0 x مربع x کے برابر ہونے کو لیں fx 1 تو آئیے پہلے مثال پر غور کریں آئیے
ہے
کو ضرب دیں تمام ایکس gx اور fx کی لامحدود حد صفر کے برابر بھی ہے اگر ہم g x کی حد 0 پر ہے f کی x تو اس صورت میں یہاں
میں ایک کے برابر ہے اس کا معاملہ t کی حد fxgx کے لیے ایک کے برابر ہے صفر کے برابر نہیں ہے لہذا
مربع سے x کی حد صفر ہے اور مصنوعات کی حد اب ایک ہے اگر ہم اسے gx کی حد لامحدود ہے fx تو یہاں ہم ایک مثال دیکھتے ہیں جہاں
تبدیل کرتے ہیں
تو اگر ہم تبدیل کرتے ہیں
کے برابر x پھر g اوقات fx کا x مربع میں ہم دیکھتے ہیں کہ x کو تبدیل کرکے لکھنے دیں۔ کسی بھی مستقل اوقات g کے x تو مجھے
کے برابر ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ مصنوعات کے c کی حد مستقل gx اوقات fx کے برابر ہے صفر کے برابر نہیں ہے اور اس لئے c
لئے اگر ایک جا رہا ہے لامحدودیت کی طرف اور دوسرا صفر پر جا رہا ہے اس حد کو کوئی بھی حقیقی عدد بنایا جا سکتا ہے جسے ہم دوبارہ چاہتے
x کو ایک کے برابر بناتے ہیں fx ہیں آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم اسے لامحدود بنا سکتے ہیں کیا ہم اسے اگلی مثال بنا سکتے ہیں ہم ایک بار پھر
کے برابر ہونا ہے x کا جی x مربع اور
صفر کے x کے بدلے x ایک کے برابر dx اوقات fx کی لامحدود حد صفر ہے لیکن g کی x کی حد ہے f کی x تو یہاں ایک بار پھر
کی بائیں ہاتھ کی حد کا حساب لگائیں gx اوقات fx برابر نہیں ہے اور پھر ہم دیکھتے ہیں کہ لہذا اگر ہم
تو یہ منفی انفینٹی اور دائیں ہاتھ کے برابر ہے حد مثبت انفینٹی ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ اس معاملے میں بائیں ہاتھ کی حدیں اور دائیں ہاتھ کی حدیں
کے برابر لیتا ہوں gx مربع x کو ایک fx برابر نہیں ہیں اور وہ انفینٹی یا مائنس انفینٹی ہیں اگر میں
کیوب کہوں x تو
ہے اور یہ حد 0 ہے x مکعب ہے لہذا مصنوع gx x مربع ہے x ایک gxfx اوقات fx تو اس کی حد
تو لامحدود اوقات کی حد 0 یہ 0 ہوسکتی ہے یہ لامحدود ہوسکتی ہے یہ مائنس انفینٹی ہوسکتی ہے یہ کوئی حقیقی نمبر ہوسکتا ہے لہذا یہ ایک بار
پھر ایک غیر متعین شکل ہے نتیجہ انفینٹی ٹائمز 0 بھی ہے اور غیر متعین شکل اور حد مسئلہ پر منحصر ہے لہذا آپ کو کبھی بھی حد کو صفر کے
برابر لکھنے کی غلطی نہیں کرنی چاہئے کیونکہ ایک فنکشن کی حد صفر ہے آپ کے پاس یہ دیکھنے کے لیے کہ آیا دوسری حد محدود ہے یا نہیں
دونوں کی حد لامحدود ہے gx اور fx دوسری بات یہ ہے کہ اگر
تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مصنوع کی حد کیا ہے
انفینٹی als o کی حد ہے g کی x کی حد لامحدود ہے اور f کی x تو اگر
کی حد انفینٹی ہے f کی x تو مصنوع کی حد انفینٹی ہے اور دوسری ایک ہے اگر حد میں سے ایک انفینٹی ہے اور دوسری منفی انفینٹی ہے اگر
کی حد منفی انفینٹی ہے g کی x اور
کی حد منفی لامحدودیت ہے اور آپ کے پاس منفی لامحدود ہونے کی دونوں حدیں ہوسکتی ہیں پھر دوبارہ مصنوعہ ہے مثبت gx اوقات fx تو
لامحدودیت کے برابر ہونے کی حد ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ دو منفی نمبروں کی پیداوار ایک مثبت نمبر دیتی ہے لہذا آپ ان چیزوں کو دوبارہ
دونوں بڑے gx اور fx استعمال کرکے ثابت کرسکتے ہیں۔ ریگریس تعریف لیکن وہ بدیہی طور پر واضح ہونا چاہئے کیونکہ اگر آپ کے پاس
مثبت نمبر ہیں
میں سے ایک بڑا مثبت نمبر دوسرا بڑا منفی نمبر ہے fx تو پروڈکٹ کو دوبارہ بڑا مثبت نمبر ہونا چاہئے اگر
تو پروڈکٹ آپ کو دے گا۔ بڑا منفی نمبر اور اگر دونوں بڑے منفی نمبر ہیں
تو مصنوع بڑا مثبت نمبر ہو گا لہذا یہ وہی ہے جو یہ تھیوری بتا رہا ہے لیکن مسئلہ یہ ہے کہ اگر آپ کے پاس ایک بڑا منفی مثبت نمبر ہے
تو دوسرا ایک چھوٹا مثبت نمبر ہے اس صورت میں ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ آیا پروڈکٹ بڑا مثبت نمبر ہوگا یا چھوٹا مثبت نمبر ہوگا یا یہ کوئی اور
مستقل ہوگا

تو آئیے اس کا خلاصہ کرتے ہیں۔ ہم حد کی شکلیں لکھیں گے لہذا اگر ہمارے پاس لامحدودیت ہے
تو ایک حد انفینٹی ہے دوسری کچھ مستقل ہے
تو یہ ہمیشہ انفینٹی کے برابر ہے ہمارے پاس مائنس انفینٹی ہے اور کوئی مستقل ہے
ہے c تو یہ مائنس انفینٹی کے برابر ہے نوٹ کریں کہ یہ صرف یہ کہنے کے لئے اشارے ہیں۔ اگر ایک فنکشن کی حد انفینٹی ہے دوسری مستقل
تو یہ رقم انفینٹی ہے اسی طرح ایک فنکشن کی حد دوسرے فنکشن کی منفی لامحدود حد ہے ایک مستقل ہے
تو حد کو منفی انفینٹی انفینٹی پلس انفینٹی ہونا چاہئے یہ انفینٹی مائنس انفینٹی دیتا ہے۔ پھر مائنس انفینٹی جو آپ کو مائنس انفینٹی دے گا اور اگر میرے
پاس انفینٹی ٹائم انفینٹی ہے
تو یہ انفینٹی انفینٹی گنا مائنس انفینٹی کے برابر ہے مائنس انفینٹی مائنس انفینٹی ٹائمز مائنس انفینٹی انفینٹی کے برابر ہے لہذا ان صور
توں میں حدود متعین ہیں ان کو اس کے برابر ہونے کے لئے دیا گیا ہے اور کچھ غیر متعین شکلیں ہم نے دیکھی ہیں کہ انفینٹی مائنس انفینٹی یہ ہم
نہیں کہہ سکتے کہ یہ اسی طرح صفر اوقات کیا ہے لامحدودیت یہ ایک غیر متعین شکل بھی ہے 0 سے 0 یہ ہم نے پہلے دیکھا ہے کہ اگر ہندسہ
اور ڈینومینیٹر دونوں کی حدیں 0 ہیں
بذریعہ infinity infinity تو جز کی حد اس مسئلے سے مسئلہ تک منحصر ہے یہ ایک حقیقی عدد ہو سکتا ہے یا یہ 0 ہو سکتا ہے۔ یہ
infinity ہو سکتا ہے جو کہ پھر سے ایک غیر متعین شکل ہے اور بعد میں ہم کچھ اور غیر متعین شکلیں دیکھیں گے
تو میں ایک مثال دیتا ہوں کہ ٹرگونومیٹرک فنکشنز کے لیے حد انفینٹی کہاں ہے مجھے یقین ہے کہ آپ نے مثلثی فنکشنز دیکھے ہوں گے
کے قریب 2 تک پہنچتا ہے۔ x pi کے ٹین کی حد کہہ سکتے ہیں کیونکہ x تو ایک مثال یہ ہے کہ کیا ہم
cos of pi برابر ہے 1 اور pi by 2 بھی ہے cos x بذریعہ x کا ٹین سائن x تو ہم جو جانتے ہیں وہ یہ ہے کہ ہم جانتے ہیں کہ
کی وضاحت نہیں کی گئی ہے لیکن tan of pi by two ہے لہذا tan pi by two undefined صفر کے برابر ہے لہذا by 2
اور pi by two ایک چھوٹے وقفے میں بیان کیا گیا ہے جس میں x کا tan
cos کی x سے 2 تک ہے اور pi سے 0 x بھی مثبت ہے اگر cos کی x تو اگر ہم یہ ایک اور چیز دیکھتے ہیں جو ہم جانتے ہیں کہ
تک ہے pi سے دو سے x pi منفی ہے اگر
x کا گراف کھینچ سکتا ہوں۔ cos تو شاید میں
ہے لہذا pi ہے اور پھر یہ pi by two کی وجہ سے ایک ہے گراف اس طرح لگتا ہے کہ آپ کے پاس صفر x ہے یہ z تو یہ صفر پر
سے 2 تک pi تک یہ منفی ہوتا ہے جب آپ pi by 2 صفر ہے اور یہ مثبت ہے جب آپ وقفہ میں ہوں 0 سے x cos of pi by two
تک جاتی ہے۔ باتھ کی حد 1 pi 2 بائیں سے x کے طور پر cos x تک یہ منفی ہے لہٰذا 1 کی حد pi by 2 ہوتے ہیں درحقیقت 3
کی سائن کی xa کے ایک کی دائیں ہاتھ کی حد یہ منفی انفینٹی کے برابر ہے اور cos x یہ مثبت انفینٹی کے برابر ہوگی اور cos x بذریعہ
کے ٹین کی بائیں ہاتھ کی حد یہ انفینٹی کے برابر x یہ ایک کے برابر ہے لہذا پروڈکٹ کے اصول سے ہم جانتے ہیں کہ t pi by two حد
کے ٹین کی دائیں ہاتھ کی حد منفی انفینٹی کے برابر ہے جسے آپ بھی دیکھ سکتے ہیں۔ ایکس کے ٹین کے گراف سے جس کی وضاحت x ہے اور
پر 2 پر جاتے ہیں pi اس پائی پر 2 سے نہیں کی گئی ہے اور 0 سے جب آپ
پر 0 ہے اور اس طرف یہ اسی طرح جاتا ہے pi تو یہ لامحدودیت پر جاتا ہے پھر یہ
تک پہنچتے ہیں pi 2 پر 2 سے اگر آپ بائیں سے pi تو
تک جاتا ہے جبکہ اگر آپ pi 2 بائیں سے x انفینٹی میں جاتا ہے جیسا کہ tan x کا ٹین بڑا اور بڑا مثبت حقیقی نمبر بن جاتا ہے لہذا x تو
تک پہنچتے ہیں pi 2 دائیں سے
منفی انفینٹی کے برابر ہے pi at 2 by کی دائیں ہاتھ کی حد tan x کی حد tan x کا ٹین بڑا اور بڑا منفی نمبر بن جاتا ہے لہذا x تو
کے لئے لکھ سکتے ہیں لہذا اگلی چیز میں کروں گا cot کے cosecant x ok اور cotangent x secant x اسی طرح آپ
nus infinity اس کے بارے میں بات یہ ہے کہ لامحدودیت کی حد انفینٹی اور ایم آئی سے ہمارا کیا مطلب ہے۔
کے x سے بڑے m مثبت کے لئے بیان کیا گیا ہے اگر یہ m کے لئے یا کچھ x سے بڑے m ایک فنکشن ہے جو f کا x تو فرض کریں کہ
لئے بیان کیا گیا ہے
لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے x جب f کا x کی حد کے بارے میں بات کر سکتے ہیں لہذا ہم حد کہتے ہیں۔ f کی x تو ہم انفینٹی پر
کے برابر ہوتا ہے اگر کسی بھی ایپیلون مثبت کو دیا جائے l تو یہ
سے بڑا ہو x k جب بھی l مائنس کا موڈ fx تو وہاں ایک مثبت مستقل موجود ہے وہاں ایک مثبت ہے جیسے
کو f کے x اگر آپ l کی حد ہے لامحدودیت کے برابر ایک عدد ہے x سے کم ہوتا ہے صرف اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ epsilon تو یہ
بہت بڑا ہو x کے قریب کر سکتے ہیں جب بھی l من مانی طور پر
منفی انفینٹی تک پہنچتا ہے لا حقیقی نمبر کے برابر ہوتا ہے x کی حد کہتے ہیں۔ جیسا کہ f کی x ایک حقیقی نمبر ہے اسی طرح ہم l تو یہاں
اگر ایپیلون کو 0 سے بڑا دیا جائے
مطلق قدر میں ایپیلون سے کم ہے l مائنس x کا f کا مطلب ہے n سے کم x موجود ہے جیسے کہ n تو کچھ منفی نمبر
اور پھر اگر میں کسی بھی ایپیلون کا l برابر ہے y ہے یہاں یہ ہمارا l ہمارے پاس کچھ supp ose تو تصویر اس طرح نظر آتی ہے
کی حد فراہم f کی x پلس ایپسیلون میں لیتا ہوں اور ہم کہیں گے کہ لامحدودیت پر l مائنس ایپسیلون کو l انتخاب کرتا ہوں اور پھر اگر میں
سے بڑا ہو kf کے x x موجود ہے اس طرح کہ جب بھی k کے برابر ہے۔ یہاں کچھ l کردہ
کے درمیان ہونا چاہئے epsilon جمع l مائنس ایپسیلون سے l تو
کا مطلب ہے کہ l ہے اور فعل کچھ اس طرح ہوسکتا ہے اس صورت میں ہم کہیں گے کہ حد برابر ہے اسی طرح منفی لامحدودیت پر k تو یہ
اگر آپ کے پاس یہ رقم موجود ہے
کا انتخاب کرسکتے ہیں n تک صحیح طور پر جانا پڑتا ہے لہذا کسی بھی ایپیلون کو دیکھتے ہوئے آپ اس l سے پہلے فنکشن کو اس n تو اس
تاکہ فنکشن کی قدر یہاں دونوں کے درمیان کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ اس کا کیا مطلب ہے اب آئیے کچھ مثالوں سے دیکھتے ہیں
لامحدودیت پر جاتا x کی حد کیا ہے جیسا کہ f کی x کی حد کیا ہے اور f کی x کے برابر لیں اور x کو fx تو ایک یہ ہے کہ اگر ہم
کے برابر لیتا ہوں x ایک f کا x ہے آہ مجھے یہ نہیں لکھنے دو۔ میں
انفینٹی کلیم پر جاتا ہے x کا بطور f کے x تو حد کیا ہے۔
لیتے ہیں x کو 1 بذریعہ fx تو کیا ہوتا ہے اگر آپ
کو ایک بڑا اور بڑا مثبت حقیقی نمبر لیتے ہیں x تو اگر آپ
چھوٹا اور چھوٹا ہو جائے گا اس کا مطلب ہے کہ اگر آپ کسی بھی مثبت لیکن چھوٹے مثبت حقیقی نمبر کو لیتے ہیں x by 1 تو
کی یہ حد صفر کے برابر ہونی چاہئے آئیے ہم اسے سختی سے ثابت کرنے کی f کی x اس سے چھوٹا بنا سکتے ہیں لہذا x تو آپ 1 بذریعہ
کوشش کریں تاکہ یہ ثابت کرنے کے لئے ہمیں کیا دکھانا ہے۔ کہ کوئی بھی ایپیلون دیا جائے

تو صفر سے بڑا ایپیلون دیا جائے
سے بڑا ہے x k تو ہمیں ایک کو تلاش کرنا ہوگا کہ اگر
لیں k ایپسیلن سے چھوٹا ہے لہذا اگر ہم f کا x تو
سے 1 کے برابر ہے epsilon تو
ہے اس کو ایپسیلون سے کم ہونا چاہئے x جو ایک بذریعہ fx مساوی 1 بذریعہ ایپسیلون اس کا مطلب یہ ہے کہ k اس سے بڑا ہے۔ x تو
k کو مثبت نمبر x کے برابر ہے اور کیونکہ ہم x x اور مائنس صفر جو x x برابر ایک f کا x مائنس صفر کا موڈ ہے لہذا fx جو
کی xx سے بڑا ہے اس لیے k کے لیے x تمام han epsilon ہے۔ t مائنس صفر یہ کم fx سے بڑا سمجھ رہے ہیں لہذا
کی حد صفر کے برابر ہے x کے منفی لامحدود پر جانے کی طرح ایک بار x کی حد صفر کے برابر ہے اسی طرح f لامحدودیت پر جانے والی
ایک منفی حقیقی نمبر ہے x یہ دوبارہ 0 ہے نوٹ کریں کہ اگر
ہمیشہ منفی ہوتا ہے لیکن پھر یہ چھوٹا اور چھوٹا منفی بن جاتا ہے x by تو 1
تو یہ ایک منفی حقیقی نمبر بن جاتا ہے لیکن صفر کے بہت قریب
تو یہ بھی درست ہے اب آئیے ہم ان دو چیزوں کو یکجا کرتے ہیں لہذا تعریفوں کو یکجا کرتے ہیں
تو ہم نے دیکھا کہ ایک کی تعریف ہے۔ حد لامحدود ہے اور ایک اور ایک لامحدودیت کی حد ہے لہذا لامحدود حد اور لامحدود کی حد کی تعریف کو
صفر سے بڑا m انفینٹی میں جانا لامحدودیت کے برابر ہوگا اگر کوئی x کی حد کو متعین کر سکتے ہیں کیونکہ f کی x یکجا کرتے ہوئے ہم
دیا جائے
سے بڑا ہے اس لئے ہم کہتے ہیں کہ k کے لئے x سے بڑا ہے تمام f m کا x صفر سے بڑا اس طرح کہ k تو وہاں کچھ موجود ہے۔
ہے۔ اسی طرح ہم لامحدودیت کی حد s کی قدر بڑی f کی x کی کسی بڑی قدر کے لئے x کی حد انفینٹی ہے اگر f کی x لامحدودیت پر
کی fx کو x کو مائنس انفینٹی کے برابر اور حد fxx کو مائنس انفینٹی یا منفی انفینٹی کی حد کو لامحدود قرار دے سکتے ہیں اسی طرح ایک حد
کی منفی لامحدودیت fx کی وضاحت کر سکتے ہیں۔ x کو انفینٹی کے برابر اور حد x منفی لامحدودیت کو مائنس انفینٹی کے برابر اور حد
کے لامحدود پر جائیں x کی حد f کی x کے برابر لیں اور x کو x کی f منفی لامحدودیت کے برابر ہے لہذا مثال کے طور پر اگر ہم
منفی لامحدودیت کے برابر ہے۔ منفی لامحدودیت درست ہے کیونکہ ہمارے پاس x کی لامحدودیت کی حد کے برابر ہے کیونکہ f کی x تو یہ
بڑا مثبت نمبر ہے x ہے لہذا اگر fx کے برابر x
بڑا منفی نمبر ہے x اگر f کا x بھی ایک بڑا مثبت نمبر ہے اور اگر fx تو
لامحدودیت کے قریب پہنچتی x کی حد جب g کی x مربع کے پھر یہاں x کے برابر x کا لیں g بڑا منفی نمبر ہے اگر ہم f کا x تو
ہے
منفی لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے لیکن آئیے انفینٹی پر کچھ حد x کی حد بھی ہے کیونکہ g کی x تو یہ لامحدودیت کے برابر ہے اور یہ
st دیکھتے ہیں جو خارج نہیں ہوتی
لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے x کے سائن کہنے کی سوال کی حد جب x تو
کی سائن ایک م x تو کیا یاد کریں کہ
pi by two جمع pi لیں m اور سائن کے صفر کے برابر ہے اگر ہم کوئی دو m کی سائن یہ تمام عدد m pi تواتر فعل ہے اور کسی بھی
کے لیے دوبارہ ایک کے برابر ہے m پھر یہ تمام عدد
کی سائن کی حد کا تعین کرنے کے لیے ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ اس فنکشن کا کیا x کا سائن x تو اب اگر ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے اگر
pi اور پھر pi 2 برابر ہے x 0 بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے لیکن جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ اس فنکشن میں آپ کے پاس x ہوتا ہے بطور
کی سائن کو کتنا ہی بڑا لیں منفی ایک اور ایک کے درمیان دوہرتا x اور پھر یہ صحیح دہرتا رہتا ہے لہذا اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کہ آپ
رہتا ہے یہ ایک ہے یہ مائنس ون ہے
کا سائن منفی ایک اور ایک کے درمیان دو پائی کی لمبائی کے کسی بھی وقفے میں گھومتا رہتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ x تو اس معاملے میں چونکہ
صحیح inity پر فنکشن کی حد inf لامحدودیت کے قریب پہنچنے پر یہ موجود نہیں ہے لہذا یہ ایک مثال ہے جہاں x کی سائن کی حد x
پلس ایپیلون l مائنس ایپسیلون سے l کی کتنی بھی قیمت لیتے ہیں آپ l موجود نہیں ہے لہذا یہاں اس بات سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کہ آپ
کو بڑے ہونے کا انتخاب کر کے فنکشن کو نہیں بنا سکتے کیونکہ آپ جانتے ہیں کہ فنکشن منفی ایک کے درمیان تمام قدروں کو لے x کے درمیان
جائے گا۔ اور ایک
x کے قریب نہیں رہے گا لہذا l کی تمام بڑی قدروں کے لئے x منتخب کرتے ہیں یہ l تو اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کہ آپ جو بھی
کے قریب پہنچنے xx کی حد لامحدودیت کے قریب پہنچتی ہے۔ اسی طرح cos کی x کی سائن کی حد اسی طرح موجود نہیں ہے جس طرح
ایک کے l کی حد f کی x والی لامحدودیت کی حد بھی موجود نہیں ہے اسی طرح کچھ خصوصیات دوبارہ موجود نہیں ہیں لہذا فرض کریں کہ
fx دو حقیقی اعداد ہیں پھر لامحدودیت پر l ایک اور l دو کے برابر ہے جہاں l کی حد انفینٹی تک پہنچتی ہے g کی xx برابر ہے اور
ایک l اگر حدیں محدود ہوں a دو کے برابر ہے لہذا یہ صرف ایک نقطہ پر حد کے لئے رقم کا یہ اصول ہے l ایک جمع l کی حد gx جمع
دو l اور
دو کی حدوں کا مجموعہ ہے لہذا یہ ثابت کیا جا سکتا ہے جیسا کہ ہم نے دوسری صور l ایک جمع l ایک اور l تو جمع کی حد فنکشن کا
دو ہے l کی حد g کی x ایک ہے اور l کی حد f کی x توں کے لیے دکھایا ہے اسی طرح اگر ہمارے پاس
دو بھی حصص کے لیے ڈینومینیٹر صفر نہیں ہونا چاہیے لہٰذا اگر لامحدود پر l ایک بار l برابر ہے dx اوقات fx تو اس کی حد پروڈکٹ
ایک غیر صفر اصلی نمبر l 2 کوئی بھی حقیقی نمبر ہے اور l 1 دو کے برابر ہے جہاں l کی حد g کی x ایک ہے اور l کی حد fx
دو صفر کے برابر نہیں ہے l 2 zen rl ہے
دو دائیں l ایک سے l کے برابر ہے gx کی حد fx تو
ہے 0 l2 دو کو اس نتیجے کے لیے صفر رہو اب اگر حد l ایک صفر ہو سکتا ہے لیکن l تو یہاں
تو ہمیں ایک غیر متعین شکل ملتی ہے
مربع کہے x کے برابر gx 1 اور x کے برابر ایک بذریعہ fx تو مثال کے طور پر میں ایک مثال پیش کرتا ہوں تاکہ
کے gxfx by gx کی حد fx کی 0 حد ہے جو کہ 0 بھی ہے g کی x کی لامحدودیت لامحدود پر fx کی حد ہو جائے گی۔ x تو یہاں
مربع سے تقسیم کیا x کو ایک سے x برابر ہے
جب لامحدودیت کے قریب پہنچتی ہے x کے ذریعے gx کی حد fx کے برابر ہے اور اس لئے x تو یہ
fx کے برابر نہیں ہوتا ہے صفر تک اس لیے x سے دیکھتا ہوں اور یہ کسی بھی fx کو gx تو یہ لامحدودیت کے برابر ہے لیکن اگر میں
سے ہم دیکھتے ہیں کہ x کے برابر ایک gx اور x کے برابر لے کر ایک مستقل تقسیم fx کی حد 0 کے برابر ہے اور gx کے ذریعے
لامحدودیت x کی حد بھی ہے جیسے ہی g کی x لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے۔ 0 جو کہ x کی حد ہے کیونکہ f کی x ہمارے پاس

کے دائیں c ہے لہذا حد c اس معاملے میں مستقل x کے fx x سے آپ دیکھتے ہیں کہ g کے x کی حد fx کے قریب پہنچتا ہے اور کی حد دونوں 0 ہیں اسی طرح اگر دونوں لامحدود ہیں gx اور fx کے برابر ہے لہذا یہ دوبارہ دیتا ہے۔ اسے غیر متعین شکل کہتے ہیں اگر x تو غیر متعین شکلیں ملیں گی لہذا صفر بہ صفر یا انفینٹی بذریعہ انفینٹی لامحدود حدوں کے لئے غیر متعین شکلیں ہیں اسی طرح اگر ہمارے پاس کی حد کیا gx مائنس fx ہم عام طور پر یہ نہیں کہہ سکتے کہ n کی حد منفی لامحدود ہے . g کی x کی حد ہے لامحدودیت اور f کی ہے لہذا انفینٹی مائنس انفینٹی یہ بھی ایک غیر متعین شکل ہے صفر گنا لامحدود بھی ٹھیک ہے لہذا ہم نے جو بحث کی ہے وہ یہ ہے کہ ہم نے اب تک ہم نے کچھ l کی حدوں پر ایک نقطہ پر بحث کی ہے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کی حدود ہم نے دیکھا ہے کہ حد کا حقیقی نمبر ہونے کا کیا مطلب ہے مثالیں بھی دیکھی ہیں جہاں حدود موجود نہیں ہیں ہم نے دیکھا ہے کہ حد کا کیا مطلب ہے انفینٹی یا مائنس انفینٹی اب جبکہ انفینٹی اور مائنس انفینٹی یہ نمبر نہیں ہیں لیکن ہم کہتے ہیں حدیں لامحدود کے برابر ہیں اگر فنکشن کو من مانی طور پر بڑا بنایا جا سکتا ہے اور منفی انفینٹی کو اگر من مانی طور پر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے

تو اسے من مانی طور پر بڑا منفی نمبر بنایا جا سکتا ہے

تو ہم نے انفینٹی پر حد اور منفی انفینٹی پر حد کے معنی بھی دیکھے۔ فنکشن کی خصوصیات کا تعین کرنے میں بہت کارآمد ہیں جیسے فنکشن کا لامحدودیت یا منفی لامحدودیت کے برابر ہے پھر آپ آسانی سے li mit گراف کھینچنا اگر آپ کو انفینٹی نیگیٹو انفینٹی کی حدود اور کہاں فنکشن کا گراف کھینچ سکتے ہیں اور فنکشن کے بارے میں کچھ خاصیتیں بھی نکال سکتے ہیں لہذا اگلے لیکچر میں ہم کیلکولس میں ایک بہت مفید تصورات کی وضاحت کرنے کے لیے حدود کا استعمال کریں گے جو کہ مشتقات کے تصورات ہیں۔ فنکشن کا اور ہم دیکھیں گے کہ فنکشن کے مشتق کا حساب کس طرح کیا جائے اس کی جسمانی اہمیت کیا ہے اور پھر ہم مشتقات کے بہت سے اطلاقات بھی دیکھیں گے ہم ایک مسلسل فنکشن کی وضاحت کے لیے حدود کا استعمال کریں گے اور پھر مسلسل افعال کی کچھ خصوصیات پر تبادلہ خیال کریں گے شکریہ۔