

হ্যালো এবং সীমা সংক্রান্ত চতুর্থ বক্তৃতায় স্বাগতম,

তাই শেষ বক্তৃতায় আমরা অসীম সীমা সম্পর্কে আলোচনা করেছি এবং তারপরে আমরা

ফাংশনের যোগফলের সাথে সীমার কিছু বৈশিষ্ট্য দেখেছি এবং তারপরে আমরা ফাংশনের গুণফল দিয়ে শুরু করেছি আমি এটি চালিয়ে যাচ্ছি

তাই শেষবার আমরা এই উপপাদ্যটিতে থামলাম যদি  $x$  এর  $f$  এর সীমা অসীম  $a$  হয় এবং  $x$  এর  $g$  এর সীমা

$l$  হয় এবং ধরুন  $l$  অ-শূন্য হয় তাহলে পণ্য ফাংশনের সীমা  $fx$  বার  $gx$  হল  $l$  ধনাত্মক হলে অসীমের সমান এবং  $l$  ঋণাত্মক হলে এটি ঋণাত্মক অসীম,

তাই আমি  $l$  পজিটিভের ক্ষেত্রে এটি প্রমাণ করি

তাই ধরে নিই  $l$  ধনাত্মক তাহলে আমাদের যা দেখাতে হবে তা হল

তাই শূন্যের চেয়ে  $m$  বড় দেওয়া দরকার।

এর জন্য আমাদের ডেল্টা পজিটিভ খুঁজে বের করতে হবে যেমন  $\text{mod } x$  বিয়োগ  $a$  কম ডেল্টা  $x$  এর সমান নয় এর মানে  $fx$  বার  $gx$   $m$  এর চেয়ে বেশি ডান

তাই প্রথমে আমরা যা জানি যে  $xx$  এর  $g$  এর সীমা  $a$  এ যাচ্ছে  $l$  এর সমান গ্রহণ করে এবং  $l$  পজিটিভ

তাই এপসিলন গ্রহণ করে  $l$  দুই দ্বারা সমান বলতে যা ইতিবাচকও আমরা একটি ডেল্টা খুঁজে পেতে পারি আমাদের ডেল্টা  $1$  পজিটিভ লিখতে দিন যাতে  $\text{mod } x$  বিয়োগ  $a$  কম ডেল্টা  $1$  এর চেয়ে বড়  $0$  এর মানে  $x$  বিয়োগ  $1$  পরম মান এপসিলনের

চেয়ে কম যা  $1$  বাই দুই এর সমান যা বোঝায়  $x$  এর  $g$

$1$  বাই দুই  $g$   $x$  এর চেয়ে বড় এই ক্ষেত্রে  $1$  দ্বারা দুই এবং তিন  $1$  দ্বারা দুই এর মধ্যে তবে আমাদের কেবল  $x$  এর এই  $g$  দরকার দুই দ্বারা  $1$  এর চেয়ে বড়

তাই একইভাবে কারণ যেহেতু  $x$  এর  $f$  এর সীমা অসীমের সমান সেখানে ডেল্টা  $2$  পজিটিভ রয়েছে যেমন  $\text{mod } x$  বিয়োগ একটি ডেল্টা দুই থেকে কম মানে  $x$  এর  $f$

আপনি যে ধনাত্মক সংখ্যা  $m$  একটি গ্রহণ করেন তার থেকে বড় এবং তারপর আবার আমরা লিখব যে এই  $m$  ওয়ানটি কি হওয়া উচিত

তাই যদি আমরা

তাই নিই যদি ডেল্টা ন্যূনতম ডেল্টা ওয়ান এবং ডেল্টা টু এর সমান হয় তবে  $\text{mod } x$  বিয়োগ  $a$  ডেল্টার চেয়ে কম এবং  $0$  এর বেশি এটি বোঝাবে যে  $x$  এর  $fx$  বার  $g$   $m$  একগুণ  $1$  দুই দ্বারা বড় এবং আমরা যা চাই তা হল  $t$  হ্যাট এটি  $m$  এর

চেয়ে বড় হওয়া উচিত

তাই আমরা  $m$  এক বার  $1$  দ্বারা দুই সমান  $m$  বেছে নিই যার অর্থ হল  $m$  এক সমান হওয়া উচিত দ্বিগুণ  $m$  দ্বারা  $1$

তাই আমি যদি  $m$  এককে দুই  $m$  দ্বারা  $1$  বেছে নিই তাহলে  $m$  এক গুণ  $1$  দ্বারা দুইটি  $m$  এর সমান এবং এটি বলে যে  $fxdx$   $m$  এর চেয়ে বড় যখনই  $\text{mod } x$  বিয়োগ  $a$  ডেল্টার চেয়ে কম হয়

তাই  $fxgx$  এর সীমা অসীমের সমান একইভাবে আমরা  $l$  শূন্যের চেয়ে কম প্রমাণ করতে পারি

তাই আমাদের পরবর্তী অংশটি এড়িয়ে যেতে দিন দেখুন  $l$  শূন্যের সমান হলে কি হয়

তাই এটি আরও গুরুত্বপূর্ণ

তাই প্রশ্ন করুন যদি  $l$  শূন্যের সমান হয় তাহলে শূন্যের সমান সীমা কি অসীমতা কি এটি অন্য কিছু

তাই আসুন উদাহরণ বিবেচনা করা যাক প্রথমে  $fx$  এর সমান হওয়া যাক  $1$  দ্বারা  $x$  বর্গ  $x$  সমান  $0$  এর সমান নয় এবং  $x$  এর  $g$  সমান  $x$  বর্গ বলতে

তাই এই ক্ষেত্রে এখানে  $x$  এর  $f$  এর সীমা  $0$  এ  $x$  এর অনন্ত সীমা হল  $x$  এর  $g$  এর শূন্যের সমান আবার যদি আমরা  $fx$  এবং  $gx$  এই গুণ করি।

সকলের জন্য একের সমান  $x$  শূন্যের সমান নয়

তাই  $fxgx$ - এর সীমা

টি-তে একের সমান তার ক্ষেত্রে

তাই এখানে আমরা একটি উদাহরণ দেখতে পাচ্ছি যেখানে  $fx$ -এর সীমা হল  $gx$ -এর অসীম সীমা শূন্য এবং পণ্যের সীমা এখন এক যদি আমরা এটিকে  $x$  বর্গ দ্বারা পরিবর্তন করি

তাই যদি আমরা পরিবর্তন করি তাহলে আমাদের

$x$  এর  $g$  পরিবর্তন করে লিখতে দিন যেকোনো ধ্রুবক বার  $x$  বর্গক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাই যে  $x$  এর  $fx$  গুণ  $g$  তারপর  $x$  এর জন্য  $c$  এর সমান  $x$  শূন্যের সমান নয় এবং

তাই  $fx$  গুণের সীমা  $gx$  ধ্রুবক  $c$  এর সমান

তাই আমরা দেখতে পাচ্ছি যে গুণফলের জন্য যদি একটি যাচ্ছে ইনফিনিটি এবং অন্যটি শূন্য যাচ্ছে সীমাটি যেকোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে যা আমরা চাই আবার দেখা যাক আমরা এটিকে অসীম বানাতে পারি কি না আমরা কি পরবর্তী উদাহরণটি

আবার নিই  $fx$  একটির সমান হবে  $x$  এর বর্গ এবং  $x$  এর  $x$  সমান হবে

তাই এখানে আবার  $x$  এর  $f$  এর সীমা হল  $x$  এর  $g$  এর অসীম সীমা শূন্য কিন্তু  $fx$  বার  $dx$  হবে  $x$  এর জন্য  $x$  এর সমান শূন্যের সমান নয় এবং তারপর আমরা দেখতে পাচ্ছি যে

তাই যদি আমরা  $fx$  বার  $gx$  এর বাম হাতের সীমা গণনা করি এটি ঋণাত্মক অসীম এবং ডান হাতের সমান সীমা হল ধনাত্মক অসীমতা

তাই আমরা দেখতে পাই যে এই ক্ষেত্রে বাম হাতের সীমা এবং ডান হাতের সীমা সমান নয় এবং তারা অসীম বা বিয়োগ

অসীম যদি আমি  $f(x)$  এর সমান এক  $x$  বর্গাকার  $g(x)$  সমান বলি  $x$  ঘনক্ষেত্র বলতে তাহলে এর সীমা  $f(x)$  বার  $g(x)f(x)$  হল  $x$   $x$  বর্গক্ষেত্র  $g(x)$  হল  $x$  ঘনক্ষেত্র

তাই গুণফল হল  $x$  এবং এই সীমা  $0$

তাই অসীম গুণের সীমা  $0$  এটি  $0$  হতে পারে এটি অসীম হতে পারে এটি বিয়োগ অসীম হতে পারে এটি যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে

তাই এই আবার একটি অনির্দিষ্ট ফর্ম উপসংহার অসীম গুণ  $0$  ও এবং অনির্দিষ্ট ফর্ম এবং সীমাটি সঠিক সমস্যার উপর নির্ভর করে

তাই আপনার কখনই সীমাটিকে শূন্যের সমান লেখার ভুল করা উচিত নয় কারণ একটি ফাংশনের সীমাটি শূন্য ডান আপনার কাছে অন্য সীমাটি সসীম কিনা তা দেখার জন্য আরেকটি বিষয় হল যদি  $f(x)$  এবং  $g(x)$  উভয়ের সীমা অসীম হয় তবে আমরা বলতে পারি গুণফলের

সীমা কত

তাই যদি  $x$  এর  $f$  এর সীমা অসীম হয় এবং  $x$  এর  $g$  এর সীমা হয়  $a$ ।  $0$  অসীম তাহলে গুণফলের সীমা হল অসীম এবং অন্য একটি হল যদি সীমার একটি অসীম হয় এবং অন্যটি ঋণাত্মক অসীম হয় যদি  $x$  এর  $f$  এর সীমা অসীম হয় এবং  $x$  এর  $g$  এর সীমা ঋণাত্মক অসীম হয় তাহলে  $f(x)$  গুণের সীমা  $g(x)$  ঋণাত্মক অসীম হল এবং আপনার উভয় সীমা ঋণাত্মক অসীম হতে পারে তারপর আবার গুণফল হল গুণফলের সীমা ধনাত্মক অসীমের সমান হতে পারে কারণ দুটি ঋণাত্মক সংখ্যার গুণফল একটি ধনাত্মক সংখ্যা দেয়

তাই আপনি এই জিনিসগুলি আবার ব্যবহার করে প্রমাণ করতে পারেন রিগ্রেস সংজ্ঞা কিন্তু সেগুলি স্বজ্ঞাতভাবে পরিষ্কার হওয়া উচিত কারণ আপনার যদি  $f(x)$  এবং  $g(x)$  উভয়ই বড় ধনাত্মক সংখ্যা হয় তবে পণ্যটিকে আবার বড় ধনাত্মক সংখ্যা হতে হবে যদি  $f(x)$  এর একটি বড় ধনাত্মক সংখ্যা অন্যটি বড় ঋণাত্মক সংখ্যা হয় তবে পণ্যটি আপনাকে দেবে বড় ঋণাত্মক সংখ্যা এবং যদি উভয়ই বড় ঋণাত্মক সংখ্যা হয় তবে গুণফলটি বড় ধনাত্মক সংখ্যা হবে

তাই এই উপপাদ্যটি যা বলছে তা কিন্তু সমস্যা হল আপনার যদি একটি বড় নেগ পজিটিভ নম্বর থাকে অন্যটি একটি ছোট ধনাত্মক সংখ্যা সেক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি না যে গুণফলটি একটি বড় ধনাত্মক সংখ্যা হবে বা একটি ছোট ধনাত্মক সংখ্যা হবে নাকি এটি অন্য কোন ধ্রুবক হবে

তাই আসুন সংক্ষিপ্ত করা যাক আমরা সীমা ফর্মগুলি লিখব

তাই যদি আমাদের অসীম থাকে একটি সীমা অসীম অন্যটি কিছু ধ্রুবক তাহলে এটি সর্বদা অসীমের সমান আমাদের কাছে বিয়োগ অসীম প্লাস যেকোনো ধ্রুবক আছে তাহলে এটি বিয়োগ অসীম এর সমান নোট করুন যে এটি বলার জন্য শুধুমাত্র স্বরলিপি।

যদি একটি ফাংশনের সীমা অসীম হয় অন্যটি একটি ধ্রুবক  $c$  তাহলে এই যোগফলটি অসীম হয় একইভাবে একটি ফাংশনের সীমাটি অন্য ফাংশনের ঋণাত্মক অসীম সীমা একটি ধ্রুবক তাহলে সীমাটি ঋণাত্মক ইনফিনিটি ইনফিনিটি প্লাস ইনফিনিটি হতে হবে এটি ইনফিনিটি মাইনাস ইনফিনিটি দেয় তাহলে মাইনাস ইনফিনিটি যা আপনাকে মাইনাস ইনফিনিটি দেবে এবং যদি আমার কাছে ইনফিনিটি গুন ইনফিনিটি থাকে তাহলে এটি ইনফিনিটি ইনফিনিটি গুন মাইনাস ইনফিনিটির সমান হজ মাইনাস ইনফিনিটি মাইনাস ইনফিনিটি টাইমস মাইনাস ইনফিনিটি টাইমস ইনফিনিটির সমান

তাই এই ক্ষেত্রে লিমিট ডিটারমিনেন্ট করা হয় এগুলোর সমান হওয়ার জন্য দেওয়া হয় কিছু অনির্দিষ্ট ফর্ম আমরা দেখেছি যে ইনফিনিটি মাইনাস ইনফিনিটি এটা আমরা বলতে পারি না এটা কি একইভাবে জিরো বার অসীম এটি একটি অনির্দিষ্ট রূপ  $0$  দ্বারা  $0$  এটি আমরা আগে দেখেছি যে যদি লব এবং হর উভয়ের সীমা  $0$  হয় তবে ভাগফলের সীমা এটি সমস্যা থেকে সমস্যা পর্যন্ত নির্ভর করে এটি একটি বাস্তব সংখ্যা হতে পারে বা এটি  $0$  বা হতে পারে এটি অসীম দ্বারা অসীম অসীম হতে পারে যা আবার একটি অনির্দিষ্ট রূপ এবং পরে আমরা আরও কিছু অনিশ্চিত ফর্ম দেখতে পাব

তাই আমি একটি উদাহরণ দিই যেখানে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের জন্য সীমা অসীম হয় আমি নিশ্চিত আপনি

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন দেখেছেন

তাই একটি উদাহরণ হল কি আমরা কি  $x$  এর  $\tan$  এর সীমা বলতে পারি যখন  $x$  পাই  $2$  এর কাছে আসে।

তাই আমরা যা জানি তা হল আমরা জানি যে  $x$  এর ট্যান  $\sin x$  দ্বারা  $\cos x$  এর সাইন  $\pi$  by  $2$  সমান  $1$  এবং  $\pi$  এর  $\cos 2$  দ্বারা শূন্য সমান

তাই  $\tan \pi$  by  $2$  undefined

তাই  $\tan$  of  $\pi$  by  $2$  সংজ্ঞায়িত করা হয় না কিন্তু  $x$  এর  $\tan$  একটি ছোট ব্যবধানে সংজ্ঞায়িত করা হয় যেখানে  $\pi$  দুই দ্বারা এবং

তাই যদি আমরা এটি দেখতে পাচ্ছি আরেকটি জিনিস যা আমরা জানি যে  $x$  এর  $\cos$  যদি  $x$  থেকে  $\pi$  থেকে  $2$  হয় তাহলে  $x$  এর  $\cos$  ধনাত্মক এবং  $x$  এর  $\cos$  যদি  $x$  হয় ঋণাত্মক যদি  $x$   $\pi$  থেকে দুই দ্বারা  $\pi$  হয় তাহলে হয়ত আমি  $\cos$  এর গ্রাফ আঁকতে পারি।

$x$

তাই এটি শূন্য  $z$  এটি  $x$  এর কারণে একটি গ্রাফটি এমন দেখাচ্ছে আপনার কাছে দুই দ্বারা শূন্য পাই এবং তারপরে এটি পাই

তাই  $x$   $\cos$  এর  $x$   $\cos \pi$  এর দুই দ্বারা শূন্য এবং আপনি যখন ব্যবধানে থাকবেন তখন এটি ধনাত্মক  $0$  থেকে পাই বাই  $2$  পর্যন্ত এটি ঋণাত্মক যখন আপনি  $\pi$  থেকে  $2$  দ্বারা  $\pi$  পর্যন্ত আসলে  $3 \pi$  বাই  $2$  পর্যন্ত এটি ঋণাত্মক

তাই তাই 1 এর সীমা  $\cos x$  হিসাবে  $x$  বাম থেকে 2 দ্বারা  $\pi$  এ যায়  $\cos x$  দ্বারা 1 এর হাতের সীমা এটি ধনাত্মক অসীমের সমান হবে এবং  $\cos x$  দ্বারা একটির ডান হাতের সীমা এটি ঋণাত্মক অসীমের সমান এবং  $x$  এর সাইনের সীমা  $\pi$  দুই দ্বারা এটি একের সমান

তাই পণ্যের নিয়ম অনুসারে আমরা জানি যে

তাই  $x$  এর ট্যানের বাম হাতের সীমা এটি অসীমের সমান

এবং  $x$  এর ট্যানের ডান হাতের সীমা ঋণাত্মক অসীমের সমান এটি আপনি দেখতে পারেন  $x$  এর  $\tan$  এর গ্রাফ থেকে যা এই  $\pi$  এ 2 দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়নি এবং 0 থেকে আপনি যখন 2 দ্বারা  $\pi$  এ যান এটি অনন্তে যায় তারপর আবার এটি 0 এ পাই এবং এই পাশে এটি ঠিক এভাবে যায়

তাই 2 দ্বারা পাই এ আপনি যদি বাম দিক থেকে 2 দ্বারা  $\pi$  এর কাছে যান তবে  $x$  এর ট্যান বড় এবং বড় ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়ে যায়

তাই  $\tan x$  অসীমতায় যায় যেমন  $x$  বাম থেকে 2 দ্বারা  $\pi$  এ যায় যেখানে আপনি যদি ডান দিক থেকে 2 দ্বারা  $\pi$  এর কাছে যান তবে

$x$  এর ট্যান বৃহত্তর এবং বৃহত্তর ঋণাত্মক সংখ্যায় পরিণত হয়

তাই  $\tan x$  এর সীমাটি  $\tan x$  এর ডান হাতের সীমা  $\pi$  এ 2 দ্বারা ঋণাত্মক অসীম সমান একইভাবে আপনি  $x$   $\cotangent x$   $\secant x$  এবং  $\cscant x$  ok এর জন্য লিখতে পারেন

তাই পরের জিনিস আমি করব সম্পর্কে কথা বলতে আমরা কি বোঝাতে সীমা অনন্ত অসীম সীমা এবং মাই nus ইনফিনিটি

তাই ধরুন  $x$  এর  $f$  একটি ফাংশন যা  $m$  এর চেয়ে বড়  $x$  এর জন্য সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে বা কিছু  $m$  ধনাত্মক যদি  $m$  এর চেয়ে বড়  $x$  এর জন্য সংজ্ঞায়িত করা হয় তবে আমরা অসীমে  $x$  এর  $f$  এর সীমা সম্পর্কে কথা বলতে পারি

তাই আমরা সীমা বলি  $x$  এর  $f$  যখন  $x$  অসীমতায় কাছাকাছি আসে এটি 1 এর সমান যদি কোনো এপসিলন পজিটিভ থাকে সেখানে একটি ধনাত্মক  $\epsilon$  থাকে সেখানে  $ak$  পজিটিভ থাকে যেমন  $f(x)$  বিয়োগের মোড 1 এটি এপিসিলনের থেকে কম যখনই  $x$   $k$  থেকে বড় হয়

তাই অসীমে সীমাবদ্ধ শুধু মানে এই যে এটি  $x$  এর সীমা অসীমের সমান একটি সংখ্যা 1 যদি আপনি  $x$  এর  $f$  করতে পারেন ইচ্ছাকৃতভাবে 1 এর কাছাকাছি হতে যখনই  $x$  খুব বড় হয় ঠিক

তাই এখানে 1 একটি বাস্তব সংখ্যা

তাই একইভাবে আমরা বলি  $x$  এর  $f$  এর সীমা যেহেতু  $x$  ঋণাত্মক অসীমের কাছে আসে, তাহলে লা বাস্তব সংখ্যার সমান হয় যদি 0 এর চেয়ে বড় এপসিলন দেওয়া হয় সেখানে কিছু ঋণাত্মক সংখ্যা  $n$  থাকে যেমন  $x$  এর থেকে কম  $n$  বোঝায়  $f$  এর  $x$  বিয়োগ 1 পরম মান এপিসিলনের চেয়ে কম ডান

তাই ছবিটি এই  $\supp$  এর মত দেখাচ্ছে  $\text{ose}$  আমাদের এখানে কিছু 1 আছে এটি আমাদের  $y$  এর সমান 1 এবং তারপর যদি আমি যেকোন এপসিলন বেছে নিই এবং তারপর যদি আমি 1 বিয়োগ এপসিলনকে 1 প্লাস এপসিলন গ্রহণ করি এবং আমরা বলব যে অসীমে  $x$  এর  $f$  এর সীমা 1 দেওয়া 1 এর সমান এখানে কিছু  $k$  আছে যেমন  $x$  যখনই  $x$  এর  $k$  থেকে বড় হয় তখন 1 বিয়োগ এপসিলন থেকে 1 প্লাস এপসিলনের মধ্যে হওয়া উচিত

তাই এটি  $k$  এবং ফাংশনটি এরকম কিছু হতে পারে এই ক্ষেত্রে আমরা বলব যে সীমা সমান 1 একইভাবে ঋণাত্মক অসীমতার মানে হল যদি আপনার সেখানে এই যোগফল থাকে যে এই  $n$  এর আগে ফাংশনটিকে এই 1 হিসাবে সঠিকভাবে এপ্রোচ করতে হবে

তাই যেকোনো এপিসিলন দেওয়া হলে আপনি এই  $n$  বেছে নিতে পারেন যাতে ফাংশনের মান এখানে এর মধ্যে যেকোনো কিছু হতে পারে।

এটার মানে হল এখন কিছু উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক,

তাহলে একটা হল যদি আমরা  $x$  এর সমান  $f(x)$  নিই এবং  $x$  এর  $f$  এর সীমা কত এবং  $x$  এর  $f$  এর সীমা যেমন  $x$  অসীমে যায় আহ আমি এটা লিখি না

তাই যাক আমি  $x$  এর  $f$  এর সমান  $x$  এক দ্বারা নিই

তাই সীমা কত?  $x$  এর  $f$  এর হিসাবে  $x$  অসীম দাবিতে যায়

তাই আপনি যদি 1 দ্বারা  $x$  এর সমান  $f(x)$  নেন তাহলে আপনি যদি  $x$  কে একটি বড় এবং বৃহত্তর ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হিসাবে নেন তাহলে 1 দ্বারা  $x$  ছোট থেকে ছোট হয়ে যাবে

তাই এর মানে হল আপনি যদি কোনো ধনাত্মক তবে ছোট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা গ্রহণ করেন তবে আপনি 1 দ্বারা  $x$  এর চেয়ে ছোট করতে পারেন

তাই  $x$  এর  $f$  এর এই সীমাটি শূন্যের সমান হওয়া উচিত আসুন আমরা এটি কঠোরভাবে প্রমাণ করার চেষ্টা করি

তাই এটি প্রমাণ করার জন্য আমাদের যা দেখাতে হবে তা হল যে কোন এপসিলন দেওয়া হয়েছে

তাই শূন্যের চেয়ে বড় এপিসিলন দেওয়া যাক তাহলে আমাদেরকে এমন  $ak$  খুঁজে বের করতে হবে যে যদি  $x$   $k$  থেকে বড় হয় তাহলে  $x$  এর  $f$  এপিসিলনের চেয়ে কম

তাই আমরা যদি  $k$  কে 1 এর থেকে  $\epsilon$  নিয়ে নিই তাহলে  $x$  এর চেয়ে বড়।

$k$  এর সমান 1 বাই এপিসিলন এটি বোঝায় যে  $f(x)$  যেটি  $x$  দ্বারা এক হয় সেটি এপিসিলনের চেয়ে কম হতে হবে যেটি  $f(x)$  বিয়োগ শূন্যের মোড

তাই  $x$  এর  $f$  এক দ্বারা  $x$  এবং বিয়োগ শূন্য এক দ্বারা  $x$  এর সমান এবং কারণ আমরা  $x$  কে একটি ধনাত্মক সংখ্যা  $k$

থেকে বড় হিসাবে নিচ্ছি

তাই  $f(x)$  বিয়োগ শূন্য এটি কম  $t$   $k$  এর থেকে বড় সকল  $x$  এর জন্য হ্যান এপসিলন

তাই  $xx$  এর  $f$  এর সীমা শূন্যের সমান একইভাবে  $x$  এর সীমা এক দ্বারা  $x$  ঋণাত্মক অসীমে যায় এটি আবার  $0$  নোট করুন যে  $x$  যদি একটি ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় তবে  $1$  দ্বারা  $x$  সবসময় ঋণাত্মক হয় কিন্তু তারপর এটি একটি ছোট এবং ছোট ঋণাত্মক হয়ে যায়

তাই এটি  $aa$  ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়ে যায় কিন্তু শূন্যের খুব কাছাকাছি

তাই এটিও সত্য এখন আসুন আমরা এই দুটি জিনিসকে একত্রিত করি

তাই সংজ্ঞাগুলিকে একত্রিত করি

তাই আমরা দেখেছি একটি হল এর সংজ্ঞা।

সীমা হল অসীম এবং অন্য একটি হল অসীমের সীমা

তাই অসীম সীমা এবং অসীমের সীমার সংজ্ঞাগুলিকে একত্রিত করে আমরা  $x$  এর  $f$  এর সীমাকে সংজ্ঞায়িত করতে পারি কারণ  $x$  অসীম থেকে অনন্তের সমান হবে যদি

শূন্যের থেকে বড় কোনো  $m$  দেওয়া হয় তবে সেখানে কিছু বিদ্যমান থাকে  $k$  শূন্যের চেয়ে বড় যেমন  $x$  এর  $f$   $m$  থেকে বড় সব  $x$  এর জন্য  $k$  থেকে বড়

তাই আমরা বলি যে অসীমে  $x$  এর  $f$  এর সীমা অসীম হয় যদি  $x$  এর কোনো বড় মানের জন্য  $x$  এর  $f$  এর মান বড়  $s$  হয় একইভাবে আমরা অসীমের সীমাকে বিয়োগ অসীম হতে বা ঋণাত্মক অসীমের সীমাকে অসীম হিসাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি একইভাবে একজন সীমা  $f(x)$  অসীমকে বিয়োগ অসীমের সমান এবং সীমা  $x$   $f(x)$ -এর ঋণাত্মক অসীমকে অসীমের সমান এবং সীমা  $x$ কে অসীম হিসাবে নির্ধারণ করতে পারে।

$f(x)$  এর ঋণাত্মক অসীম সমান ঋণাত্মক অসীম,

তাই উদাহরণ যদি আমরা  $x$  এর  $f$  এর  $x$  এর সমান এবং  $x$  এর  $f$  এর সীমা  $x$  হিসাবে নিই যেমন  $x$  অসীমে যায় এটি  $x$  এর  $f$  এর অসীম সীমার সমান যেমন  $x$  ঋণাত্মক অসীমে যায় এটি এর সমান ঋণাত্মক অসীম ডান কারণ আমাদের কাছে  $x$  এর সমান  $f(x)$  আছে

তাই  $x$  যদি বড় ধনাত্মক সংখ্যা হয় তবে  $f(x)$  ও একটি বড় ধনাত্মক সংখ্যা এবং  $x$  এর  $f$  যদি  $x$  একটি বড় ঋণাত্মক সংখ্যা হয় তবে  $x$  এর  $f$  বড় ঋণাত্মক সংখ্যা যদি আমরা জি নিই।

$x$  এর সমান  $x$  বর্গক্ষেত্র তাহলে এখানে  $x$  এর  $g$  এর সীমা যখন  $x$  অনন্তের কাছে আসে এটি অসীমের সমান এবং এটি  $x$  এর  $g$  এর সীমা যখন  $x$  ঋণাত্মক অসীমের কাছে যায় তবে অসীমের কিছু সীমা দেখা যাক যা এক্সি নয়  $st$

তাই  $x$  এর সাইন বলার সীমা  $x$  যখন অসীমের কাছাকাছি

আসে তখন  $x$  এর সাইনটি একটি পর্যায়ক্রমিক ফাংশন এবং যে কোনো  $m$   $\pi$  এর সাইন এটি সমস্ত পূর্ণসংখ্যা  $m$  এর জন্য শূন্যের সমান এবং যদি আমরা যেকোন দুই  $m$  নিই তাহলে সাইন বলে প্রশ্ন সীমা  $\pi$  plus  $\pi$  by two তারপর এটি সব পূর্ণসংখ্যা  $m$  এর জন্য আবার একের সমান

তাই এখন যদি আমরা এখানে দেখি  $x$  এর সাইনের সীমা নির্ধারণের জন্য  $x$  এর সাইন হলে কি হবে আমাদের দেখতে হবে  $x$  হিসাবে এই ফাংশনটির কি হবে বৃহত্তর এবং বৃহত্তর হয় কিন্তু আমরা যা দেখতে পাই তা হল এই ফাংশনটি হল আপনার কাছে  $x$  সমান  $0$   $\pi$  এবং তারপর  $2$   $\pi$  এবং তারপরে এটি সঠিকভাবে পুনরাবৃত্তি করতে থাকে

তাই

আপনি  $x$  এর সাইন যত বড়ই নিন না কেন ঋণাত্মক এক এবং একের মধ্যে দোদুল্যমান থাকে এটি একটি এটি মাইনাস ওয়ান

তাই এই ক্ষেত্রে যেহেতু  $x$  এর সাইন দুই পাই দৈর্ঘ্যের যেকোনো ব্যবধানে

ঋণাত্মক এক এবং একের মধ্যে দোদুল্যমান থাকে আমরা দেখতে পাই যে

$x$  এর সাইনের সীমা অসীমের কাছে আসা  $x$  এর সীমা নেই

তাই এটি একটি উদাহরণ যেখানে  $\inf$  এ ফাংশনের সীমা  $\infty$  সঠিকভাবে বিদ্যমান নেই

তাই এখানে আপনি  $1$  এর যে মানই গ্রহণ করুন না কেন আপনি ফাংশনটিকে  $1$  বিয়োগ এপসিলন থেকে  $1$  প্লাস এপসিলনের মধ্যে হতে  $x$  বেছে নিতে পারবেন না কারণ আপনি জানেন যে ফাংশনটি নেতিবাচক একের মধ্যে সমস্ত মান গ্রহণ করবে এবং একটি

তাই  $1$  আপনি যাই বেছে নিন না কেন

$x$  এর সমস্ত বড় মানের জন্য  $1$  এর কাছাকাছি থাকা সম্ভব হবে না

তাই  $x$  এর সাইনের সীমা একইভাবে  $x$  এর  $\cos$ -এর সীমা যেমন  $x$  অসীমের কাছে আসে একইভাবে বিদ্যমান থাকে না একইভাবে অসীমের কাছে আসা  $xx$ -এর সীমা সীমা আবার কিছু বৈশিষ্ট্যের অস্তিত্ব নেই,

তাই ধরুন  $x$ -এর  $f$ -এর সীমা যখন  $x$ -এর কাছে পৌঁছায় অসীমতা  $1$  একের সমান এবং  $xx$ -এর  $g$ -এর সীমা অসীমের কাছে  $1$  দুইয়ের সমান যেখানে  $1$  এক এবং  $1$  দুটি হল বাস্তব সংখ্যা তাহলে অনন্তে  $f(x)$  প্লাস  $g(x)$  এর সীমা

$1$  এক যোগ  $1$  দুই এর সমান

তাই এটি একটি বিন্দুতে

সীমার জন্য এই যোগফলের নিয়ম ফাংশনের  $1$  এক এবং  $1$  এক যোগ  $1$  দুই এর সীমার যোগফল

তাই এটি প্রমাণ করা যেতে পারে যেভাবে আমরা অন্যান্য ক্ষেত্রে দেখিয়েছি একইভাবে যদি আমাদের  $x$  এর  $f$  এর সীমা

থাকে 1 এক এবং  $x$  এর  $g$  এর সীমা থাকে 1 দুই তাহলে এর সীমা গুণফল  $f(x)$  গুণ  $dx$  সমান 1 এক গুণ 1 দুই  
ভাগফলের জন্যও হর শূন্য হওয়া উচিত নয়

তাই যদি অসীমে  $f(x)$ -এর সীমা 1 এক হয় এবং  $x$ -এর সীমা 1 দুই এর সমান হয় যেখানে 1 1 কোন বাস্তব সংখ্যা এবং  
1 2 হল একটি অ-শূন্য বাস্তব সংখ্যা 1 2  $z \in \mathbb{R}$  দুই শূন্যের সমান নয় তাহলে  $f(x)$  দ্বারা  $g(x)$  এর সীমা 1 এক দ্বারা 1  
দুই এর সমান,

তাই এখানে 1 এক শূন্য হতে পারে কিন্তু 1 দুই হতে হবে এই উপসংহারের জন্য নন শূন্য হবে এখন যদি সীমা 1 2 0 হয়  
তাহলে আমরা একটি অনির্দিষ্ট ফর্ম পাব

তাই উদাহরণ স্বরূপ আমি একটি উদাহরণ দেই

তাই  $f(x)$  এর সমান বলতে একটি  $x$   $x$  এবং  $g(x)$  সমান  $1/x$  বর্গক্ষেত্র

তাই এখানে  $x$  এর সীমা যাচ্ছে এফএক্সের অসীম হল 0 এর সীমা অনন্তে  $x$  এর

সীমা যা 0 হল  $f(x)$  এর সীমা  $g(x)$  দ্বারা  $g(x)$  দ্বারা এক দ্বারা সমান  $x$ কে  $x$  বর্গ দ্বারা এক দ্বারা ভাগ করা হয়

তাই এটি  $x$  এর সমান এবং

তাই  $x$  এর সীমা  $g(x)$  দ্বারা  $x$  অসীমের কাছে যাওয়ার সাথে সাথে এটি অসীমের সমান তবে আমি যদি  $f(x)$  দ্বারা  $g(x)$  দেখি  
এবং এটি  $x$  এর সমান কোনো  $x$  কোনটির জন্য সমান শূন্য থেকে

তাই  $f(x)$  দ্বারা  $g(x)$  এর সীমা এটি 0 এর সমান এবং  $f(x)$  সমান গ্রহণ করে একটি ধ্রুবককে  $x$  দ্বারা ভাগ করে এবং  $g(x)$  এর  
সমান একটি  $x$  দ্বারা আমরা দেখতে পাই যে আমাদের কাছে  $x$  এর  $f$  এর সীমা আছে যখন  $x$  অসীমের কাছাকাছি আসে 0  
যা  $x$  এর  $g$  এর সীমা যখন  $x$  অনন্তের কাছে আসে এবং  $x$  এর  $g$  দ্বারা  $f(x)$  এর সীমা আপনি দেখতে পান যে  $x$  এর  $g$

দ্বারা  $f(x)$  এই ক্ষেত্রে ধ্রুবক  $c$

তাই সীমাটি  $c$  ডানের সমান

তাই এটি আবার দেয় এটা অনির্দিষ্ট রূপ বলে যদি  $f(x)$  এবং  $g(x)$  এর সীমা উভয়ই 0 হয় একইভাবে যদি উভয়ই অসীম হয়  
তাহলে অনির্দিষ্ট রূপ পাবে

তাই শূন্য দ্বারা শূন্য বা অসীম দ্বারা অসীম অসীমের সীমার জন্য অনিশ্চিত রূপ একইভাবে যদি আমাদের কাছে  $x$  এর  $f$   
এর সীমা থাকে  $x$  এর  $g$  এর অসীমতা এবং সীমা হল ঋণাত্মক অসীম  $n$  আমরা সাধারণভাবে বলতে পারি না যে  $f(x)$   
বিয়োগ  $g(x)$  এর সীমা কত

তাই অসীম বিয়োগ অসীম এটিও একটি অনিশ্চিত ফর্ম এছাড়াও শূন্য গুণ অসীম ঠিক আছে

তাই আমরা যা আলোচনা করেছি তা হল আমরা এখন পর্যন্ত সীমা বাম হাত এবং ডান হাতের সীমাতে আলোচনা করেছি  
আমরা দেখেছি যে সীমা বলতে একটি বাস্তব সংখ্যা বলতে কী বোঝায় 1 আমরা এমন কিছু উদাহরণও দেখেছি যেখানে  
সীমার অস্তিত্ব নেই 1 আমরা দেখেছি সীমার অর্থ কী অসীম বা বিয়োগ অসীম এখন যে অসীম এবং বিয়োগ অসীম এগুলো  
সংখ্যা নয় কিন্তু আমরা বলি অসীমের সমান সীমা যদি ফাংশনটিকে ইচ্ছাকৃতভাবে বড় করা যায় এবং ঋণাত্মক অসীমকে  
ইচ্ছাকৃতভাবে ছোট করা যায় তবে এটিকে যথেষ্টভাবে বড় ঋণাত্মক সংখ্যা করা যেতে পারে তবে আমরা অসীমে সীমা এবং  
ঋণাত্মক অসীমে সীমার অর্থও দেখেছি এই সমস্ত ধারণা।

ফাংশনের বৈশিষ্ট্য নির্ধারণের ক্ষেত্রে খুবই উপযোগী যেমন ফাংশনের গ্রাফ আঁকা যদি আপনি অসীম ঋণাত্মক অসীমের  
সীমা জানেন এবং কোথায়  $\lim$  অসীম বা ঋণাত্মক অসীমের সমান তারপর আপনি সহজেই ফাংশনের গ্রাফ আঁকতে  
পারেন এবং ফাংশন সম্পর্কে নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যগুলিও বের করতে পারেন

তাই পরবর্তী লেকচারে আমরা ক্যালকুলাসে একটি খুব দরকারী ধারণা সংজ্ঞায়িত করতে সীমা ব্যবহার করব যা  
ডেরিভেটিভের ধারণা।

ফাংশনের ফাংশন এবং আমরা দেখব কিভাবে ফাংশনের ডেরিভেটিভ গণনা করা যায় তার শারীরিক তাৎপর্য কী এবং  
তারপরে আমরা ডেরিভেটিভের অনেকগুলি প্রয়োগ দেখতে পাব এছাড়াও আমরা একটি ক্রমাগত ফাংশন সংজ্ঞায়িত করতে  
সীমা ব্যবহার করব এবং তারপর ধারাবাহিক ফাংশনের কিছু বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করব ধন্যবাদ আপনাকে