ہیلو سب کو ہیلو یہ حدود پر تیسرا لیکچر ہے لہذا آخری لیکچر میں آخری لیکچر کے آخر میں ہم نے لامحدود حدود کے بارے میں بات کرنا شروع
کی
کی حد جب f کی x تو میں اسے جاری رکھتا ہوں لہذا مجھے یاد کرنے دیں کہ لامحدود حدود سے ہمارا کیا مطلب ہے؟ تعریف ہم کہتے ہیں کہ
x a کے قریب پہنچتی ہے
دیا جائے m تو لامحدودیت کے برابر ہوتی ہے اگر کوئی مثبت حقیقی عدد
کا x کے موڈ سے کم ہے ڈیلٹا کے مقابلے میں a مائنس x سے بڑا ہے جب بھی f m 0 کا x تو وہاں ایک مثبت ڈیلٹا موجود ہے جیسے کہ
کے برابر نہیں a کے قریب ہونا لیکن a کا انتخاب کرکے کافی حد تک x ہے کو من مانی طور پر بڑا بنایا جا سکتا ہے f
کے مربع اور اس x x برابر ہے 1 f کا x تو آئیے اسے ایک مثال سے سمجھنے کی کوشش کریں تاکہ مثال کے طور پر غور کریں کہ
غیر صفر کے لئے بیان کی گئی ہے آئیے ہم پوچھتے ہیں کہ حد کیا ہے x کے برابر 0 پر نہیں کی گئی ہے لیکن یہ تمام x فنکشن کی وضاحت
صفر کے قریب پہنچتا ہے x کی حد کیا ہے جب f کی x تو
مربع ایک بڑا مثبت x مثبت یا منفی حقیقی نمبر پھر 1 ll سمجھتا ہوں۔ sma کو بہت x مربع اگر میں x x تو ہم کیا دیکھتے ہیں کہ 1
کے قریب آنے پر یہ لامحدودیت کے برابر ہے اور ہم اسے اپنی تعریف کا 0 x کی حد f کی x حقیقی نمبر بن جاتا ہے لہذا دعویٰ یہ ہے کہ
مثبت کو دیکھتے ہوئے ہمیں ڈیلٹا تلاش کرنا ہوگا لہذا صفر m استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں گے۔ ہمیں جو دکھانا ہے وہ یہ ہے کہ کسی بھی
مائنس 0 موڈ 0 سے بڑا اور ڈیلٹا سے چھوٹا ہے x کو دیا جائے ہمیں 0 سے بڑا ڈیلٹا تلاش کرنا ہوگا جیسے کہ اگر m سے زیادہ
سے بڑا m مربع سے ایک ہم x سے بڑا ہے اس کا مطلب ہے کہ f m کا x کیا ہے لیکن f کا x سے بڑا ہونا چاہئے اب f m کا x تو
m کے مساوی ہے ایک سے کم از روٹ mod x سے کم ہے اور جو کہ m مربع x ہونا چاہتے ہیں جو یہ لکھنے کے مترادف ہے کہ
تو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایسا ہے
کا مربع جڑ لے سکتا ہوں m مثبت ہے میں m کے مربع جڑ کے برابر لیں کیونکہ m تو آئیے ہم ڈیلٹا کو 1 بذریعہ
x m مربع ڈیلٹا مربع سے کم ہے جو 1 x صفر کے برابر نہیں ہے۔ x ڈیلٹا سے کم ہے اور mod x تو یہ ایک مثبت ہے اصلی نمبر اب اگر
سے f m کا x ہے جو f کا x کے برابر نہیں ہے اور یہ 0 x سے بڑا ہے کیونکہ m مربع x x کے برابر ہے اور اس کا مطلب ہے 1
کے قریب 0 x مربع کی حد جب x صفر کے برابر نہیں ہے لہذا اس سے ثابت ہوتا ہے کہ 1 x ڈیلٹا سے کم ہے اور x mod بڑا ہے اگر
پہنچتی ہے
تو یہ لامحدودیت کے برابر ہے لہذا جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے کہ ہم بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کی حد کی وضاحت کر سکتے ہیں۔ اسی طرح تعریف میں
کے x کی حد x ہم بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ کی حد کو لامحدودیت سے تعبیر کر سکتے ہیں جس کا مطلب یہ ہوگا کہ اس طرح ہم کہتے ہیں کہ
تک جاتی ہے جو اس کا مطلب ہے کہ دائیں ہاتھ کی حد f کے جمع x کی حد x تک جانے والی حد انفینٹی کے برابر ہے یا بالترتیب f مائنس
دیا جائے m لامحدودیت کے برابر ہے اگر کوئی مثبت حقیقی نمبر
ہونا ہے x پر منحصر ہوسکتا ہے یہ مثبت ہے اس طرح کہ اگر ہمارے پاس بائیں ہاتھ کی حد کے لئے m تو وہاں ایک ڈیلٹا موجود ہے یہ ڈیلٹا
کے بائیں طرف a تو ہم صرف وقفہ کو دیکھ رہے ہیں۔
سے بڑا ہے اور دائیں ہاتھ کی حد کے لئے f m کا x سے کم اور بڑا ہے۔ مائنس ڈیلٹا سے اس کا مطلب یہ ہونا چاہئے کہ x a تو اگر
سے بڑا اور جمع ڈیلٹا سے کم ہے x a بالترتیب اگر
سے بڑا ہونا چاہئے f m کا x تو
x کا f صفر جمع x کے برابر نہیں 0 کے دائیں ہاتھ کی حد کی حد x xx مساوی 1 x کا x فنکشن کے لئے f تو مثال کے طور پر
سے بڑا اور ڈیلٹا سے 0 x سے بڑا ہونے دیں ہمیں ایک ڈیلٹا پازیٹو تلاش کرنا ہوگا کہ اگر m 0 لامحدودیت کے برابر ہے یہ اتنا ثبوت کیوں ہے
کم ہے
سے بڑا ہونا چاہئے m یہ x x برابر 1 f کا x تو اس کا مطلب ہے
ایک حقیقی عدد مثبت ہے حقیقی نمبر یہ ڈیلٹا ایک مثبت مقدار ہے m کے برابر ہونے دیں کیونکہ x m تو یہاں ڈیلٹا کیا ہونا چاہئے لہذا ڈیلٹا کو 1
کے برابر ہے x m صفر سے بڑا ہے اور ڈیلٹا سے کم ہے جو ایک x اور پھر اگر
کے ایک کے برابر ہے لامحدودیت اسی طرح ہم منفی لامحدودیت کی حد کی x x سے بڑا ہے اس لئے دائیں ہاتھ کی حد صفر x x m تو ایک
کے قریب پہنچتی ہے منفی انفینٹی کے برابر ہے اگر کوئی منفی عدد دیا x a کی حد جیسے ہی f کی x وضاحت کریں گے جو ہم کہتے ہیں۔
جائے
دیئے گئے منفی نمبر سے کم f کا x پر انحصار کر سکتا ہے اس طرح کہ n صفر سے کم موجود ہے ڈیلٹا مثبت دوبارہ ڈیلٹا n تو کوئی بھی
ڈیلٹا سے کم ہوتا ہے a سے کم ہوتا ہے مائنس mod x ہونا چاہئے۔ جب بھی صفر
کی دائیں ہاتھ کی حد کو f کے x کی بائیں ہاتھ کی حد کو مائنس انفینٹی کے برابر اور f کی x تو مثال کے طور پر میں اسی طرح لکھتا ہوں ہم
منفی انفینٹی کے برابر قرار دے سکتے ہیں۔
x x ایک کے برابر fx تو آئیے ایک بار پھر مثال کے طور پر دیکھیں
کی صفر پر دائیں ہاتھ کی حد لامحدودیت کے برابر ہے دائیں ہاتھ کے بارے میں کیا ہے بائیں ہاتھ کی حد کے f کے اس x تو ہم نے دیکھا کہ
بارے میں
ایک x کی ہاتھ کی حد منفی لامحدودیت کے برابر ہے یہ دوبارہ واضح ہونا چاہئے کیونکہ اگر f کے x تو دعویٰ کریں کہ بائیں ہاتھ کی حد ہے
منفی حقیقی نمبر ہے
کو ایک منفی حقیقی نمبر لیں جو 0 کے بہت قریب ہے x بھی منفی ہے اور اگر آپ x x تو 1
ہوگا۔ گیٹیو نمبر صحیح لیکن سختی سے اگر ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں ne ایک بڑا x x تو 1
صفر سے کم دیں n تو
تو آپ کو ڈیلٹا تلاش کرنا ہوگا کہ اگر ایسا ہے
تو مجھے جلدی لکھنے دیں
کے برابر لیں نوٹ کریں کہ ہمیں ڈیلٹا کی ضرورت ہے۔ ایک مثبت حقیقی نمبر n تو ڈیلٹا کو مائنس 1 بذریعہ
منفی ہے n تو 1 بذریعہ
بڑا منفی نمبر ہے n یہ ایک مثبت حقیقی نمبر ہے اور اگر n تو مائنس 1 بذریعہ
کے برابر ہے n تو یہ ڈیلٹا ایک چھوٹا مثبت حقیقی نمبر ہوگا اب اگر ڈیلٹا مائنس 1 بذریعہ
کے بائیں طرف ہے 0 x تو اگر ہم اگر میرا
مائنس ڈیلٹا سے بڑا ہے اس کا مطلب یہ ہے x سے کم ہے لیکن یہ 0 مائنس ڈیلٹا سے بڑا ہے اس کا مطلب ہے کہ 0 x تو اس کا مطلب ہے کہ
ٹھیک ہے n مائنس ڈیلٹا سے بڑا کیا ہے جو جمع 1 کے برابر ہے بذریعہ x کہ

ایک منفی نمبر ہے اور مائنس ڈیلٹا سے بڑا ہے x تو اگر ہمارے پاس
یہ منفی ہے n سے بڑا ہے نوٹ کریں کہ یہ 1 بذریعہ n بذریعہ x 1 تو
سے بڑا ہے اور اب یہ مائنس x 0 سے کم ہے مائنس 0 x سے کم ہے اور چونکہ n مائنس 1 بذریعہ x تو اس کا مطلب یہ ہے کہ مائنس
x x سے بڑا ہونا چاہئے اور جس کا مطلب ہے کہ n 1 یہ مائنس x مثبت ہے لہذا اس کا مطلب یہ ہے کہ 1 بذریعہ مائنس s ہے۔ x thi
سے کم اور مائنس ڈیلٹا سے بڑا ہے x 0 سے کم ہونا چاہئے لہذا اگر n
کی بائیں ہاتھ کی حد مائنس انفینٹی کے برابر ہے ٹھیک ہے f کی x سے کم ہے لہذا n یہ x کے by برابر f 1 کا x تو
تو اب دیکھتے ہیں
تو ہم نے دیکھا کہ فنکشن کی حد سے ہمارا کیا مطلب ہے مثبت انفینٹی یا منفی انفینٹی اب آئیے کچھ دیکھتے ہیں۔ خصوصیات
پر a کی حد لامحدودیت کے برابر ہے اور f کی x کام کرنا ہے اور فرض کریں کہ gx ہے اور fx تو پہلے فرض کریں کہ ہمارے پاس
کے برابر ہے جو ایک حقیقی نمبر ہے l کی حد کچھ g کی x
plus gx کی حد کیا ہے؟ fx تو
تو یہ دوبارہ لامحدودیت کے برابر ہونا چاہیے لہذا اگر ہمارے پاس دو فنکشنز کا مجموعہ ہے جہاں ایک فنکشن کی حد مثبت لامحدود ہے اور
دوسرے فنکشن کی حد موجود ہے اور محدود ہے
ہے a تو جمع کی حد کو لامحدود ہونا چاہئے لہذا اسے یاد رکھنے کے لیے تاکہ ہم بطور لکھ سکیں اشارے اگر ہمارے پاس کوئی انفینٹی پلس
کوئی حقیقی نمبر صحیح ہے a تو یہ انفینٹی کے برابر ہے اگر
تو جب بھی ہمارے پاس فارم انفینٹی کی حد ہوتی ہے اور ایک حقیقی نمبر ہوتا ہے جو انفینٹی ہوتا ہے اور یہ بہت واضح ہونا چاہئے اس کا ثبوت
صفر سے بڑا دیا جائے m کی حد لامحدودیت کے برابر ہے لہذا gx پلس fx ہمارے پاس ہے ظاہر کریں کہ
ہونا gx جمع fx برابر نہ ہو اس کا مطلب x مائنس ڈیلٹا سے کم اور mod x تو ہمیں ایک ڈیلٹا پازیٹو تلاش کرنے کی ضرورت ہے جیسے کہ
کے برابر l کی حد g کی x ہے لہذا چونکہ l کی حد gx کی حد لامحدود ہے اور fx سے بڑا ہو لیکن ہمیں بتایا گیا ہے کہ m چاہئے۔
x مائنس ڈیلٹا 1 سے کم اس کا مطلب یہ ہے کہ x ہے اس حد کی تعریف کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ کچھ ڈیلٹا موجود ہے ایک مثبت جیسا کہ موڈ
کا موڈ ایک سے کم ہے لہذا نوٹ کریں کہ ہم جو کچھ کر رہے ہیں وہ یہ ہے کہ ڈیلٹا ون کا انتخاب کریں جو 1 کے برابر ایپیلون g کا l مائنس
اگر کوئی ایپسیلون مثبت دیا جائے al to l ہے۔ equ پر جاتا ہے x a کے طور پر x کے مساوی مثبت ہے۔
کے برابر نہ ہو x ڈیلٹا سے کم ہو اور a مائنس mod x تو میں ایک ڈیلٹا تلاش کرسکتا ہوں کہ جب بھی
کا موڈ ایپلون سے کم ہونا چاہئے لہذا خاص طور پر میں نے ایپسیلون کا انتخاب کیا ہے۔ ایک ہونا g کے l مائنس x تو
مائنس ون l g کا x مائنس ڈیلٹا سے کم ایک صفر سے بڑا اس کا مطلب یہ ہے کہ mod x ایک سے کم ہے اس لیے l مائنس mod gx تو
جمع ایک کے درمیان ہے l اور
کے قریب آتی ہے لامحدودیت کے برابر ہوتی ہے لہذا x a کی حد جیسے ہی f کی x تو یہ وہی ہے جو ہمیں ملتا ہے ہمیں بھی دیا جاتا ہے۔
کے حقیقی نمبر سے بڑا بنا سکتا ہوں اس لئے وہاں ایک ڈیلٹا 2 مثبت موجود ہے جیسا x کو f کے x کسی بھی مثبت حقیقی نمبر کے لئے میں
ایک سے بڑا ہوتا m f کا x ایک لکھتا ہوں اور میں یہ لکھوں گا کہ یہ بعد میں کیا ہے لہذا m بڑا ہے۔ اس کے بجائے میں یہاں f کا x کہ
ڈیلٹا ٹو سے کم اور صفر سے بڑا ہوتا ہے a مائنس mod x ہے جب بھی
gx پلس دیکھنا ہوگا۔ fx تو اب کیا ہوتا ہے ہمیں
mod x مقدار چونکہ ڈیلٹا 1 اور ڈیلٹا 2 دونوں مثبت ہیں پھر ve تو اگر ہم ڈیلٹا کو ڈیلٹا 1 اور ڈیلٹا 2 کا کم از کم مانیں جو کہ پھر ایک مثبت ہے
ڈیلٹا سے کم ہے جو ڈیلٹا 2 a مائنس mod x اس لیے کیونکہ gx پلس fx مائنس ڈیلٹا سے کم اور صفر سے زیادہ اس کا مطلب یہ ہوگا کہ
مائنس اے ڈیلٹا 1 سے بھی کم ہے mod x اور m 1 سے کم ہے fx
کا g کا پلس x مائنس ون ہے لیکن ہم کیا چاہتے ہیں کہ ہمیں l اس سے بڑا ہے جو ہم جانتے ہیں کہ g کا ایک x x تو 1 سے یہ 1 ہے یہ 2
دیا گیا مثبت نمبر تھا m سے بڑا ہونا جہاں m کا x چاہئے f
کے برابر ہے یہ 1 اور 2 سے ہے۔ m تو آئیے لکھیں یہ
کے برابر کیا ہونا چاہئے l جمع ایک مائنس m ایک m ایک m تو ہمارا
کے برابر کرنا ہے l جمع ایک مائنس m ایک کو m تو اگر میں منتخب کروں
کی حد یہ gx جمع fx ڈیلٹا ٹو سے کم ہے لہذا a مائنس mod x ایک سے بڑا بنا سکتے ہیں جب بھی m کو اس f کے x تو ہم
لامحدودیت کے برابر ہے۔ مجھے یہ کہنے دیں کہ یہ رجعت کا ثبوت تھوڑا سا بہت پیچیدہ لگ سکتا ہے لیکن آپ کو اس خیال کو سمجھنا چاہئے کہ
کے قریب منتخب کر کے اور a کو x کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا آپ چاہیں fx اگر ایف ایکس کی حد لامحدودیت ہے اس کا مطلب ہے کہ آپ
کی حد محدود ہے لہذا یہ کسی محدود تعداد کے قریب ہے اور اس وجہ سے رقم کو دوبارہ بڑا بنایا جا سکتا ہے۔ جیسا کہ آپ g کی x کیونکہ
چاہتے ہیں اسی طرح آئیے پوچھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے اگر دونوں حدود لامحدود ہوں
کی حد بھی لامحدود ہے g کی x تک جانے والی حد انفینٹی کے برابر ہے اور x کی af کی حد x تو اگر
صفر سے بڑا دیا جائے پھر مجھے جلدی سے لکھنے m کی حد یہ ہوگی لامحدودیت کے برابر ایک بار پھر ثبوت یہ ہے کہ gx جمع fx تو پھر
دیں
مائنس ڈیلٹا سے کم ایک صفر سے بڑا اس کا مطلب ہے mod x تو وہاں موجود ڈیلٹا ایک صفر سے بڑا اور ایک ڈیلٹا دو صفر سے بڑا اس طرح کہ
ڈیلٹا دو سے کم ہے a مائنس mod x اس سے بڑا ہے مجھے آدھے ملی میٹر سے دو کا انتخاب کرنے دیں اور اگر x کا x f
سے 2 سے بڑا بنا سکتا ہوں اور پھر اس طرح ڈیلٹا کو دوبارہ کے m کو gx کی حد بھی لامحدود ہے میں اس کے لئے g کی x تو چونکہ
m کو gx جمع fx مائنس ڈیلٹا سے کم صفر سے زیادہ اس کا مطلب ہے mod x برابر لے لو ڈیلٹا 1 ڈیلٹا 2 کی کم از کم یہ مثبت ہے پھر
ہے لہذا جمع کی حد دوبارہ لامحدود ہے یہاں اسی طرح آپ پوچھ سکتے ہیں کہ فرض کریں m سے دو جو کہ m سے زیادہ ہونا چاہئے دو جمع
پر جانے کی حد لامحدودیت کے برابر ہے afx کی x
تک جاتا ہے کیا یہ لامحدودیت کے برابر ہے f x گنا c کی حد کے بارے میں کیا کہہ سکتا ہوں جو ایک مستقل a کی x تو میں
مثبت ہے c تو ہم دیکھیں گے کہ یہ ہے لامحدودیت کے برابر ہے اگر
منفی ہے c تو یہ منفی انفینٹی کے برابر ہے اگر
ہے c 0 تو ٹھیک ہے اگر
ہے fx 0 بار c تو
کے برابر ہے۔ c 0 تو یقیناً یہ 0 کے برابر ہے اگر
مثبت ہے c تو یہ اتنا پہلے کیوں ہے؟ ایک صورت اگر
کی حد انفینٹی ہے وہاں ڈیلٹا مثبت موجود ہے fx مثبت ہے لہذا چونکہ c بھی مثبت ہے کیونکہ c بذریعہ m سے بڑا دیا جائے پھر m 0 تو

Prutor@IITK

بار c سے بڑا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ t اور c سے m کا اس نمبر f x مائنس ڈیلٹا سے کم اس کا مطلب ہے کہ mod x جیسے
منفی ہے c کی حد لامحدودیت کے برابر ہے اگر fx اوقات c مثبت ہے اس کا مطلب ہے کہ c سے بڑا ہے کیونکہ m دوبارہ fx
سے نہیں لکھ سکتے جو مثبت نہیں ہے c کو m تو ہم
مثبت ہو جاتا ہے اور اس لیے اگر ہمارے پاس ہے اور صفر سے کم دیا جائے c تو مائنس
سے لکھتا ہوں c کو n تو اگر میں
سے لکھتا ہوں c کو مائنس n تو یہ ہو جاتا ہے اگر میں
مثبت ہے c منفی ہے اور مائنس n تو یہ دوبارہ منفی ہے کیونکہ
کی حد مثبت لامحدود ہے اور f کی x یہ مثبت ہو جاتا ہے لہذا چونکہ c بذریعہ n ایک منفی حقیقی عدد ہے۔ جو کہ c بذریعہ مائنس n تو
کا x مائنس ڈیلٹا سے کم ہے اس کا مطلب ہے mod x ایک مثبت حقیقی نمبر ہے ہم 0 سے بڑا ڈیلٹا تلاش کر سکتے ہیں اس طرح c بذریعہ n
c حد منفی انفینٹی ہے اس کا مطلب ہے کہ مجھے یہ دکھانا ہوگا کہ fx گنا c سے بڑا ہے جو مجھے دکھانا ہے وہ یہ ہے کہ c سے f n
مائنس ڈیلٹا سے کم ہے mod x سے کم ہے اگر ہمارے پاس xfx n گنا
سے ضرب کریں c مثبت ہے ہم کر سکتے ہیں۔ دونوں اطراف کو مائنس c اور چونکہ مائنس c بذریعہ مائنس n تو یہ برابر ہے مائنس
c سے بڑا ہے اور جو n ہے مائنس cfx جو کہ مائنس c سے مائنس n سے زیادہ ہے مائنس c دوبارہ مائنس f گنا c کا مائنس x تو
سے کم ہے لہذا سی ٹائمز ایف ایکس کی تعریف کی حد مائنس انفینٹی کے برابر ہے اور آخری کیس کورس کے n لکھنے کے برابر ہے fx بار
x کی تعریف کی گئی ہے اور اس لیے fx بار ایف ایکس تمام ایکس کے لیے صفر کے برابر ہے جہاں c سی کے برابر صفر کے برابر ہے
کی حد صفر ہونی چاہیے۔ ٹھیک ہے f بار c کے
تو یہاں آپ کو محتاط رہنا ہوگا کہ مستقل مثبت ہے یا منفی یہ کہنے کے لئے کہ کیا حد مثبت لامحدودیت پر جائے گی یا منفی لامحدود اسی طرح
منفی لامحدود ہے fx اگر حد
مثبت ہے c کی حد اس کے برابر ہوگی۔ منفی انفینٹی اگر f بار c کے x تو
ٹھیک ہے c 0 منفی ہے اور 0 اگر c تو یہ مثبت انفینٹی ہوگی اگر
کا مجموعہ ہے gx اور fx تو ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ہمارے پاس
تو ہمارے پاس حد کے لئے کچھ اصول ہیں چاہے حد لامحدود ہو لیکن ایک چیز ہمارے پاس ہے۔ نہیں دیکھا
کی حد مائنس انفینٹی ہے g کی x کی حد انفینٹی ہے اور fx کی حد کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں اگر gx پلس fx تو ہم
منفی انفینٹی کے قریب آرہا ہے gx انفینٹی کے قریب آرہا ہے اور fx تو اس معاملے میں کیا ہو رہا ہے کہ
تو یہ انفینٹی مائنس انفینٹی کی شکل کا ہے لہذا آپ میں سے کچھ لوگ یہ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ یہ انفینٹی میں جا رہا ہے یہ مائنس انفینٹی میں جا
رہا ہے لہذا انفینٹی مائنس انفینٹی 0 ہے لیکن یہ سچ نہیں ہے
تو آئیے کچھ مثالوں سے دیکھتے ہیں
غیر صفر کے لئے بیان کیا گیا ہے x مربع کے برابر ہونا دونوں کو x مائنس 1 gx مربع کے برابر اور x تو آئیے ہم ایف ایکس لیتے ہیں۔ ایک
کے طور پر اپروچ 0 x کی حد g کی x کے قریب پہنچتا ہے 0 انفینٹی کے برابر ہے اور x کی حد ہے کیونکہ fx پھر یہاں ہمارے پاس
کے سوا کچھ نہیں ہے اور ہماری پچھلی چیز کے مطابق کیونکہ یہ مائنس 1 f کے مائنس 1 گنا x صرف g کا x مائنس انفینٹی ہے کیونکہ
منفی مستقل ہے اگر ہم ضرب کرتے ہیں
مربع پلس مائنس ون بائی ایکس مربع جو کہ تمام ایکس کے لیے x کا کیا ہوگا gx پلس gxfx پلس fx تو یہ مائنس انفینٹی پر جاتا ہے اب
کی حد صفر کے برابر ہے gx پلس fx صفر ہے 0 دائیں کے برابر نہیں ہے لہذا یہ فنکشن صفر پر مشتمل وقفہ میں یکساں طور پر 0 ہے لہذا
کے برابر کو fx لہذا آپ کو یہ سوچنے کا لالچ ہو سکتا ہے کہ یہ ہے ہمیشہ سچ ہے لیکن آئیے دوسری مثال دیکھتے ہیں آئیے ایک بار پھر
کو ون پلس ون بائے ایکس مربع کے برابر لیتا ہوں اور جی ایکس مائنس ون بائی ایکس مربع کے برابر ہوتا ہے اور دونوں fx دیکھتے ہیں اب میں
کی تعریف ایکس کے برابر نہیں ہوتی۔ صفر
صفر کے قریب پہنچتا ہے یہ پھر سے پہلے فنکشن کی حد ہے یہ ایک پر جاتا ہے اور x کی حد کو دیکھتے ہیں جیسے ہی f کی x تو اگر ہم
مربع کی حد انفینٹی ہے اور ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ہمارے پاس اس کی حد ہے ایک فنکشن ایک حقیقی نمبر ہے اور دوسرا لامحدود پر جاتا x ایک
ہے
تو رقم دوبارہ انفینٹی ہے
کی لامحدود حد کے برابر ہے یہ مائنس انفینٹی ہے لیکن ایف ایکس پلس جی ایکس کا کیا ہوگا اور یہاں ایف ایکس پلس جی ایکس ایک g کی x تو یہ
کی حد ہے۔ یہاں ایک کے برابر ہے اور یہاں ایک کے بارے میں کوئی خاص gx جمع fx نہیں صفر کے برابر ہے لہذا x کے برابر ہے لہذا
بات نہیں ہے اگر میں اسے کسی حقیقی نمبر میں بدل دوں
مربع کے برابر لیتے ہیں۔ جہاں x جمع c 1 کو کچھ مستقل fx مربع کے برابر لینے کے بجائے ہم x کو ایک جمع ایک کے برابر fx تو اگر
کوئی بھی حقیقی نمبر مثبت منفی یا 0 ہے c
کے برابر ہے c کی حد gx جمع fx تو یہاں
ہوسکتا b لے سکتا ہے لہذا یہ انفینٹی مائنس انفینٹی جس کا کوئی مطلب نہیں ہے کہ یہ c تو یہ انفینٹی مائنس انفینٹی یہ کوئی بھی حقیقی نمبر
ہے۔ حقیقی نمبر بھی
تو سوال یہ ہے کہ کیا یہ انفینٹی یا مائنس انفینٹی بھی ہوسکتا ہے
تو جواب پھر ہاں میں ہے
تو اگر ہم غور کرتے ہیں
انفینٹی کے برابر ہوگا لہذا اگر میں لوں gx پلس fx کہتا ہے کہ gx دیکھتے ہیں اور fx تو دیکھتے ہیں
مربع کے برابر لیتا ہوں x کو مائنس ون gx مربع کے برابر اور x کو دو fx تو یہ بہت آسان ہے۔ ایسا کرنے کے لیے اگر میں
مربع کے برابر ہے پلس مائنس ون بائی x دو gx پلس fx کی انفینٹی کی حد مائنس انفینٹی کے برابر ہے اور gx کی حد صفر ہے Fx تو
پلس fx کی حد صفر x مربع لامحدودیت کے قریب پہنچتا ہے اس لئے x x مربع ہے لہذا ہم جانتے ہیں کہ x ایکس مربع جو ایک بذریعہ
صفر تک پہنچنے والی حد کے برابر ہے جو کہ لامحدودیت کے برابر ہے اور اسی طرح اگر ہم لے کر لیں x مربع x تک جاتی ہے یہ ایک gx
یہ مائنس انفینٹی بن جاتی ہے کیونکہ gx پلس fx مربع کی حد x x کے برابر مائنس دو gx اور fx مربع کی حد x کے برابر ایک fx
کی حد مائنس انفینٹی ہے g کی x انفینٹی ہے اور fx مربع حد x x مائنس ون gx پلس fx یہاں
تو جو ہم نے دیکھا وہ یہ ہے کہ یہ انفینٹی مائنس انفینٹی کچھ بھی لے سکتی ہے لہذا نتیجہ یہ ہے کہ یہ انفینٹی مائنس انفینٹی ایک غیر متعین منٹ کی
شکل ہے جس کا مطلب ہے کہ آپ پہلے سے یہ فیصلہ نہیں کرسکتے کہ یہ حد کیا ہوگی لہذا اگر ایک انفینٹی میں جا رہا ہے اور دوسرا مائنس
انفینٹی ہے

تو رقم کا انحصار مسئلہ سے مسئلہ تک ہوگا یہ کیا ہے یہ ایک غیر متعین شکل ہے اور کوئی بھی حقیقی عدد یا جمع یا مائنس انفینٹی ہوسکتی ہے
بات یہ ہے کہ ٹھیک ہے r لہذا ہمیں اس طرح کی حدوں کو احتیاط سے نمٹنا ہوگا۔
تو افعال کی پیداوار کے لیے خصوصیات ہیں
کے برابر ہے جو ایک حقیقی نمبر ہے l کی حد کچھ g کی x پر جانے کے برابر ہے اور a کی حد کچھ f کی xx تو فرض کریں کہ
g اوقات fx کی x تو میں اس حد کے بارے میں کیا کہہ سکتا ہوں؟
صرف ایک مستقل حق ہے g کا x تو ہم نے اس کی ایک خاص صورت دیکھی ہے جہاں
تو ہم نے دیکھا کہ یہ مستقل کے نشان پر منحصر ہے کہ آیا حد مثبت انفینٹی مائنس انفینٹی یا صفر کے برابر ہے۔ یہاں ہمیں جو ملے گا وہ یہ ہے
0 l منفی ہے اور ہم یہ بھی پوچھیں گے کہ اگر l مثبت ہے اور یہ منفی لامحدود کے برابر ہے اگر l کہ یہ لامحدودیت کے برابر ہے اگر
ہے
تو کیا ہوتا ہے
تو اگر ہمارے یہاں مستقل فعل 0 ہے
کی حد صفر ہے g کی x کا جو کہ 0 ہے اس صورت میں حد 0 ہے لیکن اگر x f تو مستقل اوقات
تو یہ زیادہ اہم ہے
کے برابر ہے 0 l تو سوال کریں کہ اگر
تو کیا ہوگا
تو ہم اگلے لیکچر میں ان سوالات کا جواب دیں گے اور ہم بھی اگلے لیکچر میں انفینٹی کی حدود کے بارے میں جانیں۔ آپ کا شکریہ

Prutor@IITK