

அனைவருக்கும் வணக்கம் இது வரம்புகள் பற்றிய மூன்றாவது விரிவுரை, எனவே கடந்த விரிவுரையின் முடிவில் கடைசி விரிவுரையில் எல்லையற்ற வரம்புகள் பற்றி விவாதிக்கத் தொடங்கினோம், எனவே அதைத் தொடர்கிறேன், எனவே எல்லையற்ற வரம்புகள் என்றால் என்ன என்பதை நினைவுபடுத்துகிறேன்.

எந்த நேர்மறை உண்மையான எண்  $m$  கொடுக்கப்பட்டால்  $x$  இன்  $f$  வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்று வரையறை கூறுகிறோம், அதாவது  $x$  இன்  $\text{mod } m$  ஐ விட  $0$  குறைவாக இருக்கும் போதெல்லாம்  $m$  ஐ விட  $x$  பெரியதாக இருக்கும் நேர்மறை  $\text{mod } m$  உள்ளது.

டெல்டாவை விட  $x$  இன்  $f$  ஐ தன்னிச்சையாக பெரிதாக்கலாம் சதுரம் மற்றும் இந்த செயல்பாடு  $x$  க்கு சமமாக  $0$  இல் வரையறுக்கப்படவில்லை, ஆனால் இது அனைத்து  $x$  அல்லாத பூஜ்ஜியத்திற்கும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது, வரம்பு என்ன என்று கேட்போம், எனவே  $x$  பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது  $x$  இன்  $f$  இன் வரம்பு என்ன, எனவே நாம் பார்ப்பது  $1 \text{ by } x$  நான்  $x$  ஐ மிகவும் ஸ்மா என்று எடுத்துக் கொண்டால் சதுரம்  $11$  நேர்மறை அல்லது எதிர்மறை உண்மையான எண் பின்னர்  $x$  சதுரத்தால்  $1$  ஒரு பெரிய நேர்மறை உண்மையான எண்ணாக மாறுகிறது, எனவே கூற்று என்பது  $x \neq 0$  ஐ நெருங்கும் போது  $x$  இன்  $f$  இன் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் மற்றும் அதை எங்கள் வரையறையைப் பயன்படுத்தி நிரூபிப்போம்.

நாம் காட்ட வேண்டியது என்னவென்றால், எந்த  $m$  பாசிட்டிவ் கொடுக்கப்பட்டாலும் நாம் ஒரு டெல்டாவைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும், எனவே பூஜ்ஜியத்தை விட அதிகமாக இருந்தால்,  $0$  ஐ விட பெரிய டெல்டாவைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும், அதாவது  $x$  கழித்தல்  $0 \text{ mod } 0$  ஐ விட பெரியதாகவும் டெல்டாவை விட குறைவாகவும் இருந்தால்.

$f$  இன்  $x$  இப்போது  $m$  ஐ விட பெரியதாக இருக்க வேண்டும்  $x$  இன்  $f$  என்றால் என்ன, ஆனால்  $f$  இன்  $x$   $m$  ஐ விட பெரியதாக இருக்க வேண்டும், அதாவது  $m$  ஐ விட ஒரு  $x$  சதுரம் பெரிதாக இருக்க வேண்டும், இது  $x$  சதுரம்  $1 \text{ by } m$  என்று எழுதுவதற்கு சமம் மேலும் இது  $\text{mod } x$  க்கு சமமான ஒன்றுக்கு சமமானதாகும், எனவே டெல்டாவை  $m$  இன் வர்க்கமூலத்தின் மூலம்  $1$  க்கு சமமாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்போது உண்மையான எண்  $\text{mod } x$  டெல்டாவை விட குறைவாகவும்,  $x$  பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லாவிட்டால்  $x$  சதுரம் டெல்டா சதுரத்தை விட குறைவாக உள்ளது, இது  $1 \text{ by } m$  க்கு சமம் மற்றும் இது  $1 \text{ by } x$  சதுரம்  $m$  ஐ விட பெரியது,  $x \neq 0$  க்கு சமம் அல்ல, இது  $x$  இன்  $f$  என்பது  $\text{mod } m$  என்றால்  $m$  ஐ விட பெரியது  $x$  என்பது டெல்டாவை விட குறைவாக உள்ளது மற்றும்  $x$  என்பது பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லை, எனவே  $x \neq 0$  ஐ நெருங்கும் போது  $x$  சதுரத்தின்  $1$  வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்பதை இது நிரூபிக்கிறது, எனவே இடது கை மற்றும் வலது கை வரம்பை நாம் வரையறுக்கலாம்.

இதேபோல் வரையறையில் இடது கை அல்லது வலது கை வரம்பை முடிவிலி என்று வரையறுக்கலாம், அதாவது  $x$  இன் மைனஸ் எஃப் க்கு செல்லும் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் அல்லது முறையே  $x$  இன் கூட்டல் எஃப் வரம்புக்கு சமம் என்று சொல்கிறோம்.

அதாவது வலது கை வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்றால் ஏதேனும் நேர்மறை உண்மையான எண்  $m$  கொடுக்கப்பட்டால் டெல்டா உள்ளது, இந்த டெல்டா  $m$  ஐச் சார்ந்து இருக்கலாம் இது நேர்மறை, அதாவது இடது கை வரம்புக்கு  $x$  இருந்தால் நாம் இடைவெளியை மட்டுமே பார்க்கிறோம்  $a$  க்கு இடதுபுறம்,  $x$  என்பது  $a$  ஐ விட குறைவாகவும் அதிகமாகவும் இருந்தால் மைனஸ் டெல்டாவை விட இது  $x$  இன்  $f$  என்பது  $m$  ஐ விட அதிகமாகவும் வலது கை வரம்பிற்கு முறையே  $x$   $a$  ஐ விட பெரியதாகவும் பிளஸ் டெல்டாவை விட குறைவாகவும் இருந்தால்  $x$  இன்  $f$  என்பது  $m$  ஐ விட பெரியதாக இருக்க வேண்டும், எடுத்துக்காட்டாக  $f$  செயல்பாட்டிற்கு  $x$  இன்  $1$  க்கு சமம்  $xx \neq 0$  க்கு சமம் இல்லை வலது கை வரம்பு  $x$  பூஜ்ஜியத்திற்குச் செல்லும் வரம்பு  $x$   $x$  இன்  $f$  இன் ஃபிளினிட்டிக்கு சமம் ஏன் இது இவ்வளவு ஆதாரம் ஏன்  $0$  ஐ விட  $m$  பெரியதாக இருக்க வேண்டும், நாம் ஒரு டெல்டா நேர்மறையை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$x \neq 0$  ஐ விட அதிகமாகவும், டெல்டாவை விட குறைவாகவும் இருந்தால், இது  $x$  இன்  $x$  க்கு சமமான  $x$  க்கு சமமாக இருந்தால், இது  $m$  ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும், எனவே இங்கே டெல்டாவாக என்ன இருக்க வேண்டும், எனவே  $m$  ஒரு உண்மையான எண் நேர்மறை என்பதால் டெல்டா  $1 \text{ by } m$  க்கு சமமாக இருக்கட்டும் உண்மையான எண் இந்த டெல்டா ஒரு நேர்மறையான அளவு, பின்னர்  $x$  என்பது பூஜ்ஜியத்தை விட பெரியதாகவும், டெல்டாவை விட குறைவாகவும் இருந்தால், அது  $m$  க்கு சமமாக இருந்தால்,

ஒன்று  $x \equiv m$  ஐ விட பெரியதாக இருக்கும்,

எனவே வலது கை வரம்பு ஒன்று பூஜ்ஜியத்தில்  $x$  க்கு சமம் முடிவிலி அதே போல நாம் சொல்லும் நெகட்டிவ் இன்ஃபினிட்டி என்று வரம்பு வரையறுப்போம்

$x$  இன்  $f$  இன் வரம்பு  $x$  ஐ நெருங்கும் போது எதிர்மறை எண்ணுக்கு சமம் எதிர்மறையான முழு எண் கொடுக்கப்பட்டால், பூஜ்ஜியத்திற்குக் குறைவான  $n$  டெல்டா பாசிட்டிவ் உள்ளது, டெல்டா  $n$  ஐச் சார்ந்தது, அதாவது  $x$  இன்  $f$  கொடுக்கப்பட்ட எதிர்மறை எண்ணை விட குறைவாக இருக்க வேண்டும்

பூஜ்ஜியம்  $\text{mod } x$  கழித்தல்  $a$  டெல்டாவை விட குறைவாக இருக்கும் போதெல்லாம் டெல்டாவை விட குறைவாக இருக்கும், எனவே நான் இதைப் போலவே எழுதுகிறேன்

,  $x$  இன் இடது கை வரம்பு  $x$  இன் மைனஸ் முடிவிலிக்கு சமம் மற்றும்  $x$  இன் வலது கை வரம்பு எதிர்மறை முடிவிலிக்கு சமமாக இருக்கும் எனவே நாம் மீண்டும் ஒரு உதாரணம்  $fx$  க்கு சமமாக  $x$  ஐப் பார்ப்போம், எனவே பூஜ்ஜியத்தில் உள்ள  $x$  இன் இந்த  $f$  இன் வலது கை வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்பதைக் கண்டோம், வலது கையைப் பற்றி என்ன இடது கை வரம்பைப் பற்றி உரிமை கோருவது இடது கை  $x$  இன்  $f$  இன் கை வரம்பு எதிர்மறை முடிவிலிக்கு சமம், இது மீண்டும் தெளிவாக இருக்க வேண்டும், ஏனெனில்  $x$  எதிர்மறை உண்மையான எண்ணாக இருந்தால்,  $x$  ஆல் 1 என்பதும் எதிர்மறையாக இருக்கும், மேலும்  $x$  ஐ எதிர்மறை உண்மையான எண்ணாக எடுத்துக் கொண்டால் 0 க்கு மிக அருகில் இருக்கும் 1 ஆல்  $x$  ஒரு பெரிய  $ne$  ஆக இருக்கும் இலக்க எண் சரியானது ஆனால் கண்டிப்பாக நாம் நிரூபிக்க வேண்டுமென்றால்,

பூஜ்ஜியத்தை விட குறைவாக  $n$  கொடுக்கப்பட வேண்டும், நீங்கள் டெல்டாவைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும், அப்படியானால் விரைவாக எழுதுகிறேன், எனவே டெல்டாவை மைனஸ் 1 க்கு சமமாக எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்.

ஒரு நேர்மறை உண்மையான எண் எனவே 1 ஆல்  $n$  எதிர்மறையானது, இது 1 ஆல்  $n$  என்பது நேர்மறை எண் மற்றும்  $n$  பெரிய எதிர்மறை எண்ணாக இருந்தால், இந்த டெல்டா இப்போது சிறிய நேர்மறை எண்ணாக இருக்கும், டெல்டா மைனஸ் 1 ஆல்  $n$  க்கு சமமாக இருந்தால், நாம் என்  $x > 0$  க்கு இடதுபுறமாக இருந்தால், அதாவது  $x > 0$  ஐ விட குறைவாக உள்ளது, ஆனால் அது 0 மைனஸ் டெல்டாவை விட அதிகமாக இருந்தால், அதாவது  $x$  மைனஸ் டெல்டாவை விட பெரியது, இது பிளஸ் 1 க்கு சமமான மைனஸ் டெல்டாவை விட  $x$  என்ன பெரியது என்பதைக் குறிக்கிறது  $n$  ஆல் சரி,  $x$  என்பது எதிர்மறை எண்ணாகவும், மைனஸ் டெல்டாவை விட அதிகமாகவும் இருந்தால்,  $x$  ஆனது  $n$  ஆல் 1 ஐ விட அதிகமாக இருக்கும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும், இந்த 1 ஆல்  $n$  என்பது எதிர்மறையானது, எனவே இது மைனஸ்  $x$  ஆனது  $n$  ஆல் மைனஸ் 1 ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதைக் குறிக்கிறது மற்றும்  $x > 0$  க்கும் குறைவானது  $x > 0$  ஐ விட பெரியது மற்றும் இப்போது இந்த கழித்தல்  $x \text{ th}$  s நேர்மறை எனவே இது மைனஸ்  $n$  ஐ விட 1 ஆல் மைனஸ்  $x$  அதிகமாக இருக்க வேண்டும் என்பதையும் இது 1 ஆல்  $x > n$  ஐ விட குறைவாக இருக்க வேண்டும் என்பதையும் குறிக்கிறது, எனவே  $x > 0$  க்கும் குறைவாகவும் மைனஸ் டெல்டாவை விட அதிகமாகவும் இருந்தால்

$x$  இன் 1 ஆல் சமமாக இருக்கும்  $x$  இது  $n$  ஐ விடக் குறைவாக உள்ளது, எனவே  $x$  இன் இடது கை வரம்பு மைனஸ் முடிவிலிக்கு சமம் சரி, எனவே இப்போது பார்ப்போம், எனவே ஒரு செயல்பாட்டின் வரம்பு நேர்மறை முடிவிலி அல்லது எதிர்மறை முடிவிலி என்று என்ன அர்த்தம் என்று இப்போது பார்க்கலாம்.

பண்புகள் எனவே முதலில் நம்மிடம்  $fx$  மற்றும்  $gx$  உள்ளன என்று வைத்துக்கொள்வோம், மேலும்  $x$  இன்  $f$  இன் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்றும்

,  $a$  இல்  $x$  இன்  $g$  இன் வரம்பு சில 1 க்கு சமம், இது ஒரு உண்மையான எண்ணாகும், பிறகு  $fx$  இன் வரம்பு என்ன பிளஸ்  $gx$  எனவே இது மீண்டும் முடிவிலிக்கு சமமாக இருக்க வேண்டும், எனவே ஒரு செயல்பாட்டின் வரம்பு நேர்மறை முடிவிலி மற்றும் மற்ற செயல்பாட்டின் வரம்பு உள்ளது மற்றும் வரையறுக்கப்பட்ட இரண்டு செயல்பாடுகளின் கூட்டுத்தொகை இருந்தால், தொகையின் வரம்பு முடிவிலியாக இருக்க வேண்டும்.

இதை நினைவில் வைத்துக் கொள்ள நாம் ஒரு என எழுதலாம் நமக்கு ஏதேனும் முடிவிலி இருந்தால் மற்றும்  $a$  என்பது முடிவிலிக்கு சமம் என்றால் அது எந்த உண்மையான எண்ணாக இருந்தாலும் சரி, எனவே வடிவ முடிவிலியின் வரம்பு மற்றும் முடிவிலியாக இருக்க வேண்டிய ஒரு உண்மையான எண் இருக்கும்போதெல்லாம் இது மிகவும் தெளிவாக இருக்க வேண்டும் என்பதற்கான ஆதாரம் நமக்கு உள்ளது  $fx$  மற்றும்  $gx$  இன் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்பதைக் காட்டவும், எனவே பூஜ்ஜியத்தை விட  $m$  அதிகமாக கொடுக்கப்பட்டால், டெல்டாவை விட  $\text{mod } x$  கழித்தல் டெல்டாவை விட குறைவாகவும்,  $x$  சமமாக இல்லாத டெல்டா பாசிட்டிவ்

ஒன்றைக் கண்டறிய வேண்டும்.

$m$  ஐ விட அதிகமாக இருக்கும், ஆனால்  $fx$  இன் வரம்பு முடிவிலி மற்றும்  $gx$  இன் வரம்பு  $1$  என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, எனவே இந்த வரம்பின் வரையறையின்படி  $x$  இன்  $g$  வரம்பு  $1$  க்கு சமம் என்பதால், சில டெல்டா ஒரு நேர்மறையான மோட் உள்ளது என்பதை நாங்கள் அறிவோம்.

$x$  கழித்தல்  $a$  டெல்டா  $1$  ஐ விட குறைவானது, இது  $x$  மைனஸ்  $1$  இன்  $g$  இன் மோட் ஒன்றுக்குக் குறைவாக இருப்பதைக் குறிக்கிறது, எனவே நாம் இங்கு  $1$

க்கு சமமான  $\epsilon$  க்கு சமமான டெல்டா ஒன்றைத் தேர்வு செய்கிறோம் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்.

$x$  இன்  $x$ ,  $a$  க்கு செல்லும் போது சமம்  $a1$  முதல்  $1$  வரை ஏதேனும் எப்சிலான் பாசிட்டிவ் கொடுக்கப்பட்டால், நான் ஒரு டெல்டாவைக் காணலாம், அதாவது  $\text{mod } x$  மைனஸ்  $a$  டெல்டாவை விட குறைவாகவும்,  $x$  ஆனது  $x$  மைனஸ்  $1$  இன்  $g$  இன்  $\text{mod}$  க்கு சமமாக இல்லாத போதெல்லாம்  $\epsilon$  ஐ விட குறைவாக இருக்க வேண்டும் எனவே குறிப்பாக நான்  $\epsilon$  ஐ தேர்ந்தெடுத்துள்ளேன் மோட் ஜிஎக்ஸ் மைனஸ் எல் ஒன்றுக்கு குறைவாக உள்ளது, எனவே மோட்  $x$  கழித்தல் டெல்டாவை விட பூஜ்ஜியத்தை விட ஒன்று அதிகம், இது எல் மைனஸ் ஒன் மற்றும் எல் பிளஸ் ஒன் ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ளதைக் குறிக்கிறது, எனவே இதுவே நமக்குக் கிடைக்கும்.

$x$  ன்  $f$  இன் வரம்பு,  $x$  ஐ நெருங்கும் போது முடிவிலிக்கு சமம், எனவே எந்த நேர்மறை உண்மையான எண்ணுக்கும் நான்  $x$  இன்  $f$  ஐ அந்த உண்மையான எண்ணை விட பெரியதாக மாற்ற முடியும், எனவே  $x$  இன்  $f$  அதிகமாக இருக்கும் டெல்டா  $2$  நேர்மறை உள்ளது.

நான் இங்கே  $m$  one என்று எழுதுகிறேன், இது என்ன என்பதை நான் பின்னர் எழுதுகிறேன், எனவே  $\text{mod } x$  minus  $a$  டெல்டா இரண்டை விட குறைவாகவும் பூஜ்ஜியத்தை விட அதிகமாகவும் இருக்கும் போதெல்லாம்  $x$  இன்  $f$   $m$  ஐ விட அதிகமாகும், எனவே இப்போது என்ன நடக்கிறது என்பது  $fx$  plus ஐப் பார்க்க வேண்டும்.

$gx$  எனவே டெல்டாவை குறைந்தபட்சம் டெல்டா  $1$  மற்றும் டெல்டா  $2$  என்று எடுத்துக் கொண்டால் அது மீண்டும் ஒரு பாசிட்டிவ் அளவு டெல்டா  $1$  மற்றும் டெல்டா  $2$  இரண்டும் நேர்மறையாக இருப்பதால், மோட்  $x$  கழித்தல் டெல்டாவை விட குறைவாகவும், பூஜ்ஜியத்தை விட அதிகமாகவும் இருப்பதால் இது  $fx$  மற்றும்  $gx$  ஐக் குறிக்கும், ஏனெனில்  $\delta 2$   $fx$  ஐ விட குறைவாக இருக்கும்  $\text{mod } x$  minus  $a$  டெல்டாவை விட குறைவாக உள்ளது.

$m$   $1$  மற்றும்  $\text{mod } x$  minus  $a$  என்பது டெல்டா  $1$  ஐ விடக் குறைவு, எனவே  $1$  ஆல்  $1$  இது  $2$  by one  $g$   $x$  என்பது நமக்குத் தெரிந்ததை விட அதிகமாக உள்ளது  $1$  மைனஸ் ஒன் எனவே ஆனால் நாம் விரும்புவது என்னவென்றால்,  $x$  இன்  $f$  கூட்டல்  $g$  வேண்டும்  $x$  என்பது  $m$  ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும், அங்கு  $m$  கொடுக்கப்பட்ட நேர்மறை எண்ணாக இருக்க வேண்டும், எனவே இதை  $m$  க்கு சமம் இது  $1$  மற்றும்  $2$  ஆல் எழுதலாம்.

எனவே நமது  $m$  ஒன்று  $m$  ஒன்று  $m$  க்கு சமம் ஒன்று மைனஸ்  $1$  என நான் தேர்வு செய்தால் என்னவாக இருக்க வேண்டும்  $m$  ஒன்று  $m$  பிளஸ் ஒன் மைனஸ்  $1$  க்கு சமமாக இருக்க வேண்டும் பிறகு  $\text{mod } x$  minus  $a$  டெல்டா இரண்டை விட குறைவாக இருக்கும் போதெல்லாம்  $x$  இன்  $f$  ஐ இந்த  $m$  ஐ விட அதிகமாக ஆக்கலாம் எனவே  $fx$  மற்றும்  $gx$  வரம்பு இது முடிவிலிக்கு சமம்.

இந்த பின்னடைவு ஆதாரம் கொஞ்சம் சிக்கலானதாகத் தோன்றலாம் என்று சொல்கிறேன், ஆனால்  $fx$  இன் வரம்பு என்றால் நீங்கள் புரிந்து கொள்ள வேண்டும் முடிவிலி என்பது  $x$  ஐத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் நீங்கள் விரும்பும் அளவுக்கு பெரியதாக இருக்கும்படி  $fx$  ஐ உருவாக்க முடியும்.

இரண்டு வரம்புகளும் முடிவிலியாக இருந்தால் என்ன நடக்கும் என்று கேட்போம், எனவே  $x$  இன்  $a$   $f$  க்கு செல்லும் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் மற்றும்  $x$  இன்  $g$  இன் எல்லையும் முடிவிலி என்றால், மீண்டும்  $fx$  மற்றும்  $gx$  இன் வரம்பு இதுவாக இருக்கும்.

முடிவிலிக்கு சமம் மீண்டும் ஆதாரம் பூஜ்ஜியத்தை விட  $m$  பெரியதாக இருக்கட்டும், பின்னர் விரைவாக எழுதுகிறேன், எனவே பூஜ்ஜியத்தை விட ஒன்று பெரிய டெல்டாவும், பூஜ்ஜியத்தை விட இரண்டு பெரிய டெல்டாவும் உள்ளன, அதாவது மோட்  $x$  கழித்தல் டெல்டாவை விட பூஜ்ஜியத்தை விட ஒன்று பெரியது இது  $f$  குறிக்கிறது மிமீயின் பாதியை இரண்டாகத் தேர்வுசெய்வதை விட  $x$  அதிகமாக உள்ளது, மேலும் மோட்  $x$  கழித்தல்  $a$  டெல்டா இரண்டை

விடக் குறைவாக இருந்தால்,  $x$  இன்  $g$  வரம்பும் எல்லையற்றது என்பதால்,  $gx$  ஐ  $m$  ஐ விட 2 ஆல் பெரியதாக மாற்றலாம்.

டெல்டாவை மீண்டும் சமமாக எடுத்துக் கொள்ளுங்கள் குறைந்தபட்சம் டெல்டா 1 டெல்டா 2 இது நேர்மறை, பின்னர்  $\text{mod } x$  கழித்தல் டெல்டாவை விட பூஜ்ஜியத்தை விட சிறியது, இது  $fx$  மற்றும்  $gx$  என்பது  $m$  ஐ விட இரண்டு கூட்டல்  $m$  ஆல் இரண்டு,  $m$  ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும், எனவே தொகையின் வரம்பு மீண்டும் முடிவிலி இங்கே இதேபோல் நீங்கள்  $afx$  க்கு செல்லும்  $x$  வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்று நீங்கள் கேட்கலாம், பின்னர்  $x$  இன் ஒரு நிலையான  $c$  மடங்கு  $f$  க்கு செல்லும் வரம்பு பற்றி நான் என்ன சொல்ல முடியும், அது முடிவிலிக்கு சமம்

அதனால் நாம் பார்ப்பது இதுதான் முடிவிலிக்கு சமம்

$c$  நேர்மறையாக இருந்தால் இது எதிர்மறை முடிவிலிக்கு சமம்  $c$  எதிர்மறையாக இருந்தால் சரி  $c = 0$  என்றால்  $c$  மடங்கு  $fx = 0$  எனவே நிச்சயமாக இது 0 க்கு சமம்  $c$  என்றால் 0.

எனவே இது ஏன் முதலில் கேஸ் ஒன்று நேர்மறையாக இருந்தால், 0 ஐ விட  $m$  அதிகமாக கொடுக்கப்பட்டால்,  $c$  ஆல்  $m$  என்பது நேர்மறையாக இருக்கும், ஏனெனில்  $c$  நேர்மறையாக இருப்பதால்,  $fx$  இன் வரம்பு முடிவிலி என்பதால், டெல்டா பாசிட்டிவ் உள்ளது, அதாவது மோட்  $x$  மைனஸ் டெல்டாவை விட குறைவாக உள்ளது, இது எஃப் என்பதைக் குறிக்கிறது  $x$  இன் இந்த எண்ணை விட  $m$  ஆல்  $c$  மற்றும்  $t$  அதிகமாக உள்ளது  $c$  டைம்ஸ்  $fx$  மீண்டும்  $m$  ஐ விட அதிகமாக உள்ளது என்று அவர் குறிப்பிடுகிறார், ஏனெனில்  $c$  பாசிட்டிவ் ஆக இருப்பதால்  $c$  முறை  $fx$  இன் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் என்று அர்த்தம்  $c$  எதிர்மறையாக இருந்தால்  $m$  ஆல்  $c$  மூலம் எழுத முடியாது, அது நேர்மறை அல்ல, எனவே கழித்தல்  $c$  நேர்மறையாக மாறும் எனவே பூஜ்ஜியத்தை விட குறைவாக இருந்தால், நான்  $n$  ஐ  $c$  ஆல் எழுதினால், நான்  $n$  ஐ மைனஸ்  $c$  ஆல் எழுதினால், இது மீண்டும் எதிர்மறையாகிறது, ஏனெனில்  $n$  எதிர்மறை மற்றும் கழித்தல்  $c$  நேர்மறை எனவே  $n$  ஆல் கழித்தல் உண்மையான எண் அதாவது  $n$  ஆல்  $c$  இது நேர்மறையாகிறது, எனவே  $x$  இன்  $f$  இன் வரம்பு நேர்மறை முடிவிலி மற்றும்  $n$  மூலம்  $c$  நேர்மறை உண்மையான எண் என்பதால், 0 ஐ விட பெரிய டெல்டாவைக் காணலாம், அதாவது மோட்  $x$  மைனஸ் டெல்டாவை விடக் குறைவானது இது  $x$  இன்  $f$  ஐக் குறிக்கிறது நான் காட்ட வேண்டியது என்னவென்றால்,  $c$  மடங்கு  $fx$  வரம்பு எதிர்மறை முடிவிலி என்று காட்ட வேண்டும்.

மைனஸ்  $n$  ஆல் மைனஸ் சி மற்றும் மைனஸ் சி பாசிட்டிவ் என்பதால் நம்மால் முடியும் இருபுறமும் கழித்தல்  $c$  ஆல் பெருக்கினால்,  $x$  இன் கழித்தல்  $c$  பெருக்கல்  $f$  ஆனது மைனஸ்  $c$  மடங்கு கழித்தல்  $n$  ஐக் காட்டிலும் அதிகமாகும்  $c$  டைம்ஸ்  $fx$  இன் வரையறை வரம்பு மைனஸ் இன்ஃபினிட்டிக்கு சமம் மற்றும்  $c$  க்கு சமம் பூஜ்ஜியம்  $c$  க்கு சமம்  $fx$  ஆனது அனைத்து  $x$  க்கும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமம், எனவே  $x$  இன்  $c$  மடங்கு  $f$  இன் வரம்பு பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும் சரி, இங்கே நீங்கள் மட்டும் கவனமாக இருக்க வேண்டும், வரம்பு நேர்மறை முடிவிலிக்கு அல்லது எதிர்மறை முடிவிலிக்கு வருமா என்பதைக் கூறுவதற்கு மாறிலி நேர்மறையா அல்லது எதிர்மறையா என்பதைச் சொல்ல வேண்டும்.

எதிர்மறை முடிவிலி  $c$  நேர்மறையாக இருந்தால் இது நேர்மறை முடிவிலியாக இருக்கும்,  $c$  எதிர்மறையாக இருந்தால், 0 என்றால் 0 சரி, எனவே  $fx$  மற்றும்  $gx$  தொகை இருந்தால், வரம்பு முடிவிலியாக இருந்தாலும் வரம்பிற்கு சில விதிகள் இருப்பதைப் பார்த்தோம்.

ஒரு விஷயம் நாம் ஹா பார்க்கவில்லை எனவே  $fx$  இன் வரம்பு முடிவிலி மற்றும்  $g$  இன்  $g$  இன் மைனஸ் முடிவிலி என்றால்  $fx$  மற்றும்  $gx$  வரம்பு பற்றி என்ன சொல்ல முடியும், எனவே இந்த விஷயத்தில் என்ன நடக்கிறது என்றால்  $fx$  முடிவிலியை நெருங்குகிறது மற்றும்  $gx$  எதிர்மறை முடிவிலியை நெருங்குகிறது இது இன்ஃபினிட்டி மைனஸ் இன்ஃபினிட்டி வடிவம் எனவே இது முடிவிலிக்கு போகிறது என்று உங்களில் சிலர் யூகிக்கலாம், இது மைனஸ் இன்ஃபினிட்டிக்கு போகிறது எனவே இன்ஃபினிட்டி மைனஸ் இன்ஃபினிட்டி 0 ஆகும் ஆனால் அது உண்மையல்ல,

எனவே சில உதாரணம் மூலம் பார்க்கலாம் உதாரணங்களை எப்எக்ஸ் எடுப்போம்  $x$  சதுரம் மற்றும்  $gx$  மைனஸ் 1 க்கு சமம்  $x$  சதுரம் இரண்டும்  $x$  பூஜ்ஜியம் அல்லாதவற்றுக்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது, பின்னர் இங்கே

$x = 0$  ஐ நெருங்கும்போது  $fx$  இன் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் மற்றும்  $x$  இன்  $g$  இன் வரம்பு  $x$  ஆக இருக்கும் அணுகுமுறைகள் 0 மைனஸ் முடிவிலி, ஏனெனில்  $x$  இன்  $g$  என்பது  $x$  இன் 1 மடங்கு  $f$  ஐத் தவிர வேறு ஒன்றும் இல்லை, மேலும் நமது முந்தைய விஷயத்தின்படி இந்த கழித்தல் 1 என்பது நாம் பெருக்கினால் எதிர்மறை மாறிலி ஆகும், பிறகு இது மைனஸ் முடிவிலிக்கு

செல்கிறது, இப்போது  $fx$  மற்றும்  $gx$  மற்றும்  $gx$  என்பது ஒன்று  $x$  சதுரம் பிளஸ் மைனஸ் ஒன்று  $x$  சதுரம், இது அனைத்து  $x$  க்கும் 0 க்கு சமமாக இருக்காது, எனவே இந்த செயல்பாடு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்ட இடைவெளியில் ஒரே மாதிரியாக 0 ஆகும், எனவே  $fx$  மற்றும்  $gx$  இன் வரம்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு சமம், எனவே இது இது என்று நீங்கள் நினைக்கலாம்.

எப்பொழுதும் உண்மை ஆனால் இரண்டாவது உதாரணத்தைப் பார்ப்போம், இப்போது எஃப்எக்ஸ் சமமாக இருப்பதைப் பார்ப்போம்.

பூஜ்ஜியம் எனவே  $x$  பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும் போது  $x$  இன்  $f$  இன் வரம்பைப் பார்த்தால், இது மீண்டும் முதல் செயல்பாட்டின் வரம்பு ஆகும், இது ஒன்றுக்கு செல்லும் ஒன்று மற்றும்  $x$  சதுரம் ஒன்றின் வரம்பு முடிவிலி என்று நாம் பார்த்தோம்.

ஒரு சார்பு ஒரு உண்மையான எண் மற்றும் மற்றொன்று முடிவிலிக்கு செல்கிறது, பின்னர் கூட்டுத்தொகை மீண்டும் முடிவிலி, எனவே இது  $x$  இன் முடிவிலி வரம்பிற்கு சமம் இது  $x$  இன் மைனஸ் முடிவிலி, ஆனால்  $fx$  மற்றும்  $gx$  என்றால் என்ன, இங்கே  $fx$  கூட்டல்  $gx$  என்பது ஒன்றுக்கு சமம் எனவே  $x$  இல்லை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமம் எனவே  $fx$  மற்றும்  $gx$  இன் வரம்பு இங்கே ஒன்றுக்கு சமம் மற்றும் நான் இதை ஏதேனும் உண்மையான எண்ணாக மாற்றினால் இங்கு ஒன்றில் சிறப்பு எதுவும் இல்லை, எனவே  $fx$  ஐ ஒரு பிளஸ் ஒன் பை  $x$  சதுரத்திற்கு சமமாக எடுத்துக் கொண்டால்

, சில நிலையான  $c$  கூட்டல் 1 ஆல்  $x$  சதுரத்திற்கு சமமாக  $fx$  ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$c$  என்பது எந்த நிஜ எண் நேர்மறை எதிர்மறையாகவோ அல்லது 0 ஆகவோ இருந்தால்  $fx$  மற்றும்  $gx$  இன் வரம்பு  $c$  க்கு சமமாக இருக்கும், எனவே இந்த முடிவிலியை கழித்தல் முடிவிலி எந்த உண்மையான எண்ணையும்  $c$  ஆகலாம், எனவே இந்த முடிவிலி கழித்தல் முடிவிலிக்கு எந்த அர்த்தமும் இல்லை.

உண்மையான எண்ணும்

கூட, அது முடிவிலி அல்லது கழித்தல் முடிவிலியாக இருக்க முடியுமா என்பதுதான் கேள்வி, எனவே பதில் மீண்டும் ஆம், எனவே நாம் பரிசீலித்தால்  $fx$  ஐப் பார்ப்போம் மற்றும்  $gx$  ஆனது  $fx$  மற்றும்  $gx$  முடிவிலிக்கு சமமாக இருக்கும் என்று கூறுகிறது, எனவே நான் இதை எடுத்தால் மீண்டும் மிகவும் எளிது அவ்வாறு செய்ய நான்  $fx$  ஐ  $x$  சதுரத்தால் இரண்டுக்கு சமமாகவும்,  $gx$  என்பது மைனஸ் ஒன்றுக்கு  $x$  சதுரமாகவும் இருக்க வேண்டும் என்று எடுத்துக் கொண்டால், பூஜ்ஜியத்தில்  $fx$  வரம்பு என்பது  $gx$  இன் முடிவிலி வரம்பு மைனஸ் முடிவிலிக்கு சமம் மற்றும்  $fx$  கூட்டல்  $gx$  என்பது  $x$  சதுரம் இரண்டு பிளஸ் மைனஸ் ஒன் பை  $x$  சதுரம்  $x$  சதுரத்தால் ஒன்று, எனவே  $x$  சதுரத்தால் ஒன்று முடிவிலியை நெருங்குகிறது என்பதை அறிவோம், எனவே  $x$  இன் வரம்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு செல்லும்  $fx$  பிளஸ்  $gx$  வரம்பு இது  $x$  சதுரம்  $x$  பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும் வரம்புக்கு சமம், இது முடிவிலிக்கு சமம்.

$fx$  சமம் ஒன்று  $x$  சதுரம் மற்றும்  $gx$  சமம் மைனஸ் இரண்டு  $x$  சதுர வரம்பு  $fx$  பிளஸ்  $gx$  இது மைனஸ் முடிவிலி ஆகிறது ஏனெனில் இங்கே  $fx$  plus  $gx$  என்பது  $fx$  இன்  $x$  சதுர வரம்பு முடிவிலி மற்றும்  $x$  இன்  $g$  இன் வரம்பு கழித்தல் முடிவிலி நாம் பார்த்தது என்னவென்றால், இந்த முடிவிலியை கழித்தல் முடிவிலி எதையும் எடுக்கலாம், எனவே இந்த முடிவிலியை கழித்தல் முடிவிலி ஒரு நிச்சயமற்ற நிமிட வடிவம் ஆகும், அதாவது

இந்த வரம்பு என்னவாக இருக்கும் என்பதை நீங்கள் முன்பே தீர்மானிக்க முடியாது, எனவே ஒன்று முடிவிலிக்கும் மற்றொன்று மைனஸ் முடிவிலிக்கும் தொகையானது சிக்கலில் இருந்து சிக்கலைச் சார்ந்து இருக்கும் அது என்ன என்பது உறுதியற்ற வடிவம் மற்றும் ஏதேனும் உண்மையான எண் அல்லது கூட்டல் அல்லது கழித்தல் முடிவிலியாக இருக்கலாம், எனவே இதுபோன்ற வரம்புகளை நாம் கவனமாக கையாள வேண்டும்.

$r$  விஷயம் என்னவென்றால், செயல்பாடுகளின் தயாரிப்புக்கான பண்புகள் சரி, எனவே  $xx$  இன் சில  $a$  க்கு செல்லும் வரம்பு முடிவிலிக்கு சமம் மற்றும்  $x$  இன்  $g$  வரம்பு சில  $l$  க்கு சமம் இது ஒரு உண்மையான எண்ணாகும், பின்னர் வரம்பை பற்றி நான் என்ன சொல்ல முடியும்  $x$  இன்  $fx$  முறை  $g$  இன் ஒரு சிறப்பு நிகழ்வைப் பார்த்தோம், இங்கு  $g$  of  $x$  என்பது ஒரு நிலையான உரிமையாகும், எனவே வரம்பு நேர்மறை முடிவிலி கழித்தல் முடிவிலி அல்லது பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக உள்ளதா என்பது மாறிலியின் அடையாளத்தைப் பொறுத்தது என்று பார்த்தோம்.

இங்கே நாம் பெறுவது என்னவென்றால்,  $l$  நேர்மறையாக இருந்தால் இது முடிவிலிக்கு சமம்,  $l$  எதிர்மறையாக இருந்தால் இது எதிர்மறை முடிவிலிக்கு சமம், மேலும்  $l = 0$  ஆக இருந்தால் என்ன நடக்கும் என்று கேட்போம், எனவே இங்கு நிலையான செயல்பாடு 0 இருந்தால், நிலையான நேர்மங்கள்  $f$   $x$  இன் 0 என்றால் வரம்பு 0 ஆனால்  $x$  இன்  $g$  இன் வரம்பு பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் அது மிகவும் முக்கியமானது, எனவே

1 0 க்கு சமமாக இருந்தால் என்ன என்று கேள்வி எழுப்புங்கள், எனவே அடுத்த விரிவுரையில் இந்தக் கேள்விகளுக்குப் பதிலளிப்போம்.

முடிவிலியில் உள்ள வரம்புகளைப் பற்றி அடுத்த விரிவுரையில் அறிக நான் உங்களுக்கு

Prutor@iitk