

ਹੈਲੋ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਹੈਲੋ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਇਹ ਤੀਜਾ ਲੈਕਚਰ ਹੈ ਇਸਲਈ ਆਖਰੀ ਲੈਕਚਰ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਆਹ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਨੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਮੈਂ ਇਸਨੂੰ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਆਓ ਮੈਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਾਂ ਕਿ ਅਨੰਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਕੀ ਮਤਲਬ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x \rightarrow a$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ  $m$  ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉੱਥੇ ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਡੈਲਟਾ ਮੌਜੂਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$  ਦਾ  $f$   $m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵੀ  $0 < x - a < \delta$  ਘਟਾਓ ਦੇ ਮਾਡ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਡੈਲਟਾ ਨਾਲੋਂ ਤਾਂ ਜੇ  $x$  ਦਾ  $f$  ਹੈ, ਨੂੰ  $x$  ਨੂੰ  $a$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੋਣ ਲਈ ਪਰ  $a$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਾ ਹੋਣ ਲਈ ਚੁਣ ਕੇ ਮਨਮਾਨੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਡਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਆਓ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਕਿ ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ  $x$  ਦਾ  $f = 1/x$  ਗੁਣਾ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸਮਝੋ। ਵਰਗ ਅਤੇ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਨੂੰ  $x$  ਬਰਾਬਰ  $0$  'ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਪਰ ਇਹ ਸਾਰੇ  $x$  ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਪੁੱਛੀਏ ਕਿ ਸੀਮਾ ਕੀ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੀ ਹੈ ਜਦੋਂ  $x$  ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਉਹ ਹੈ  $1$  ਬਾਇ  $x$  ਵਰਗ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $x$  ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਮਾ ਮੰਨਦਾ ਹਾਂ  $11$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਨੈਗੇਟਿਵ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਫਿਰ  $1$  ਗੁਣਾ  $x$  ਵਰਗ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਦਾਅਵਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਵੇਂ ਹੀ  $x \rightarrow 0$  ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦੀ ਹੈ ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਆਪਣੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਾਬਤ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਜੋ ਦਿਖਾਉਣਾ ਹੈ ਉਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ  $m$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੋਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭਣਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ  $m$  ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $0$  ਮੋਡ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਦਾ  $f = m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਹੁਣ  $x$  ਦਾ  $f$  ਕੀ ਹੈ ਪਰ  $m$  ਤੋਂ  $x$  ਦਾ  $f$  ਵੱਡਾ ਹੈ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ  $x$  ਵਰਗ  $m$  ਨਾਲੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੇ ਇਹ ਲਿਖਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਵਰਗ  $1$  ਗੁਣਾ  $m$  ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਅਤੇ ਜੇ ਕਿ  $\text{mod } x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਹੁਣ  $m$  ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਓ ਅਸੀਂ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ  $m$  ਦੇ ਵਰਗ ਹੁਣ ਦੁਆਰਾ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਮੰਨੀਏ ਕਿਉਂਕਿ  $m$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਮੈਂ  $m$  ਦਾ ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੁਣ ਜੇਕਰ  $\text{mod } x$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ  $x$  ਵਰਗ ਡੈਲਟਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ ਜੇ  $1$  ਗੁਣਾ  $m$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $1$  ਗੁਣਾ  $x$  ਵਰਗ  $m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x > 0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ  $x$  ਦਾ  $f$  ਹੈ ਜੇ  $x$  ਦਾ  $f = m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੋਡ  $x$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ  $x \rightarrow 0$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਣ 'ਤੇ  $1$  ਗੁਣਾ  $x$  ਵਰਗ ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਅਨੰਤਤਾ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੇ ਘਟਾਓ  $f$  ਤੱਕ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੇ ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $f$  ਤੱਕ ਜਾਣ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਜੇ ਭਾਵ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ  $m$  ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਇਹ ਡੈਲਟਾ  $m$  'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਹ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਲਈ  $x$  ਹੋਣਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ ਦੇਖ ਰਹੇ ਹਾਂ।  $a$  ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤਾਂ ਜੇਕਰ  $x \rightarrow a$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ ਵੱਡਾ ਹੈ ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਦਾ  $f = m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਲਈ ਜੇਕਰ  $x \rightarrow a$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਲੱਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਦਾ  $f = m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ  $f = \frac{1}{x}$  ਫੰਕਸ਼ਨ ਲਈ ਦਾ  $x$  ਬਰਾਬਰ  $1$  ਗੁਣਾ  $x \rightarrow 0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ  $x \rightarrow 0$  ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਪਲੱਸ  $x$  ਦਾ  $f$  ਦਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਹ ਇੰਨਾ ਸਬੂਤ ਕਿਉਂ ਹੈ ਕਿ  $m > 0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਲੱਭਣਾ ਪਏਗਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ  $x \rightarrow 0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ  $x$  ਦਾ  $f$  ਬਰਾਬਰ  $1$  ਗੁਣਾ  $x$  ਇਹ  $m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਥੇ ਡੈਲਟਾ ਕੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ  $1$  ਗੁਣਾ  $m$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਮੰਨੋ ਕਿਉਂਕਿ  $m$  ਇੱਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਇਹ ਡੈਲਟਾ ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਮਾਤਰਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਜੇਕਰ  $x$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਜੇ ਕਿ ਇੱਕ ਗੁਣਾ  $m$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਬਾਇ  $x = m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇੱਕ ਬਾਇ  $x$  ਦੇ ਜ਼ੀਰੋ 'ਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤ ਹੋਣ ਲਈ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x \rightarrow a$  ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦੀ ਹੈ, ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਨੈਗੇਟਿਵ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕੋਈ ਵੀ  $n$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਡੈਲਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਦੁਬਾਰਾ ਡੈਲਟਾ  $n$  'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$  ਦਾ  $f$  ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨੈਗੇਟਿਵ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਵੀ ਜ਼ੀਰੋ  $\text{mod } x$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਮੈਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦਾ ਹਾਂ ਅਸੀਂ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਾਰ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $f(x)$  ਦੀ ਉਦਾਹਰਨ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਵੇਖੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜ਼ੀਰੋ 'ਤੇ  $x$  ਦੇ ਇਸ  $f$  ਦੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਬਾਰੇ ਕੀ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਬਾਰੇ

ਇਸ ਲਈ ਦਾਅਵਾ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਹੈ।  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਹੱਥ ਸੀਮਾ ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ  $x$  ਇੱਕ ਨੈਗੇਟਿਵ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ  $1$  ਬਾਇ  $x$  ਵੀ ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ  $x$  ਨੂੰ ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨਦੇ ਹੋ ਜੋ  $0$  ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਹੈ ਤਾਂ  $1$  by  $x$  ਇੱਕ ਵੱਡਾ  $ne$  ਹੋਵੇਗਾ ਗੈਰਿਟਿਵ ਨੰਬਰ ਸਹੀ ਹੈ ਪਰ ਸਖ਼ਤੀ ਨਾਲ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ  $n$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਜਲਦੀ ਲਿਖਣ ਦਿਓ ਤਾਂ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ ਘਟਾਓ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $n$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲਓ, ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਡੈਲਟਾ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ

ਇਸ ਲਈ  $1$  ਬਾਇ  $n$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਇਸਲਈ ਮਾਇਨਸ  $1$  ਬਾਇ  $n$  ਇਹ ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ  $n$  ਵੱਡਾ ਨੈਗੇਟਿਵ ਨੰਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਡੈਲਟਾ ਹੁਣ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਡੈਲਟਾ ਮਾਇਨਸ  $1$  ਬਾਇ  $n$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ

ਇਸ ਲਈ ਲਓ ਜੇਕਰ ਮੇਰਾ  $x \rightarrow 0$  ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $x \rightarrow 0$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਪਰ ਇਹ  $0$  ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਕੀ ਹੈ ਜੇ ਪਲੱਸ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।  $n$  ਦੁਆਰਾ ਠੀਕ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $x$  ਇੱਕ ਨੈਗੇਟਿਵ ਨੰਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ  $x > 1$  ਗੁਣਾ  $n$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ  $1$  ਬਾਇ  $n$  ਹੈ ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਨਸ  $x > 1$  ਗੁਣਾ  $n$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ  $x > 0$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ  $x > 0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਇਹ ਘਟਾਓ  $x$  ਥੀ ਹੈ  $s$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $1$  ਗੁਣਾ  $x$  ਇਹ ਮਾਇਨਸ  $n$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $1$  ਬਾਇ  $x = n$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ  $x \rightarrow 0$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਦਾ  $f$  ਬਰਾਬਰ  $1$  ਬਾਇ  $x$  ਇਹ  $n$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਇਸਲਈ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਮਾਇਨਸ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਆਓ ਹੁਣ ਵੇਖੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤਤਾ ਜਾਂ ਨਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤਤਾ ਹੁਣ ਆਓ ਕੁਝ ਵੇਖੀਏ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $f(x)$  ਹੈ ਅਤੇ  $g(x)$  ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $a$  'ਤੇ  $x$  ਦੀ  $g$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੁਝ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੀ ਹੈ?  $plus$   $g(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਫੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਲਈ ਤਾਂ ਜੋ ਅਸੀਂ  $a$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕੀਏ ਨੋਟੇਸ਼ਨ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਅਨੰਤਤਾ ਪਲੱਸ  $a$  ਹੈ ਤਾਂ

ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ  $a$  ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਰੂਪ ਅਨੰਤ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਅਨੰਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਬਹੁਤ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਸਬੂਤ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਦਿਖਾਓ ਕਿ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਧ  $m$  ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਲੱਭਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ  $m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ  $fx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਅਤੇ  $gx$  ਦੀ ਸੀਮਾ 1 ਹੈ, ਇਸਲਈ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ  $x$  ਦੀ  $g$  ਦੀ ਸੀਮਾ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁਝ ਡੈਲਟਾ ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੋਡ  $x$  ਘਟਾਓ  $a$  ਡੈਲਟਾ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਮਾਇਨਸ 1 ਦਾ  $g$  ਦਾ ਮੋਡ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਇਸਲਈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਜੋ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਹ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਐਪਸੀਲੋਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਡੈਲਟਾ ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਚੁਣਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ  $g$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ।  $x$  ਦਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x a \text{ equ}$  ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ  $a1$  ਤੋਂ 1 ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਐਪਸੀਲੋਨ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਂ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਵੀ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਅਤੇ  $x$  ਬਰਾਬਰ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ  $x$  ਮਾਇਨਸ 1 ਦੇ  $g$  ਦਾ ਮਾਡ ਐਪਸੀਲੋਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੈਂ ਐਪਸੀਲੋਨ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਹੋਣ ਲਈ  $\text{mod } gx$  ਮਾਇਨਸ 1 ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਇਸਲਈ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਦਾ  $g$  1 ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਅਤੇ 1 ਪਲੱਸ ਵਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਹੈ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਸਾਨੂੰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x a$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸਲਈ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਮੈਂ  $x$  ਦੇ  $f$  ਨੂੰ  $x$  ਲਈ ਉਸ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਇਸਲਈ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ 2 ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$  ਦਾ  $f$  ਵੱਡਾ ਹੈ ਮੈਨੂੰ ਇੱਥੇ  $m$  one ਲਿਖਣ ਦਿਓ ਅਤੇ ਮੈਂ ਇਹ ਲਿਖਾਂਗਾ ਕਿ ਇਹ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ  $x$  ਦਾ  $f m$  ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵੀ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੁਣ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਸਾਨੂੰ  $fx$  ਪਲੱਸ ਨੂੰ ਵੇਖਣਾ ਪਏਗਾ  $gx$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ ਡੈਲਟਾ 1 ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ 2 ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਦੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਹੈ  $ve$  ਮਾਤਰਾ ਕਿਉਂਕਿ ਡੈਲਟਾ 1 ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ 2 ਦੋਵੇਂ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹਨ ਤਾਂ  $\text{mod } x$  ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਉਂਕਿ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਡੈਲਟਾ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ  $fx$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ  $m$  1 ਅਤੇ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ 1 ਤੋਂ ਵੀ ਘੱਟ ਹੈ ਇਸਲਈ 1 ਦੁਆਰਾ ਇਹ 1 ਹੈ ਇਹ  $2x$  ਦਾ ਇੱਕ  $g x$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 ਘਟਾਓ ਇੱਕ

ਇਸ ਲਈ ਪਰ ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ  $x$  ਦਾ  $x$  ਪਲੱਸ  $g$  ਦਾ  $f$  ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।  $x m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ  $m$  ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਸੀ ਤਾਂ ਆਓ ਅਸੀਂ ਲਿਖੀਏ ਕਿ ਇਹ  $m$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਹ 1 ਅਤੇ 2 ਦੁਆਰਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਾਡਾ  $m$  ਇੱਕ  $m$  ਇੱਕ ਬਰਾਬਰ  $m$  ਪਲੱਸ ਇੱਕ ਘਟਾਓ 1 ਕੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਚੁਣਦਾ ਹਾਂ  $m$  ਇੱਕ ਨੂੰ  $m$  ਪਲੱਸ ਇੱਕ ਘਟਾਓ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ  $x$  ਦੇ  $f$  ਨੂੰ ਇਸ  $m$  ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਵੀ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਇਸਲਈ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਮੈਨੂੰ ਇਹ ਕਹਿਣ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਰਿਗਰੈਸ ਪਰਫ ਥੇਡਾ ਬਹੁਤ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਲੱਗ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ  $fx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ  $x$  ਨੂੰ  $a$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੋਣ ਲਈ ਚੁਣ ਕੇ  $fx$  ਨੂੰ ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੋ ਵੱਡਾ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਕੁਝ ਸੀਮਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਲਈ ਜੇ  $n$  ਦੁਬਾਰਾ ਵੱਡਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਓ ਪੁੱਛੀਏ ਕਿ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਨੰਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਜੇਕਰ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੀ  $af$  ਤੱਕ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੀ  $g$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਵੀ ਅਨੰਤ ਹੈ ਤਾਂ ਦੁਬਾਰਾ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਹ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ  $m$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਜਲਦੀ ਲਿਖਣ ਦਿਓ ਤਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਮੌਜੂਦ ਡੈਲਟਾ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮਾਡ  $x$  ਮਾਇਨਸ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ  $f$  ਦਾ  $x$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਮੈਨੂੰ ਅੱਧਾ ਮਿਮੀ ਬਾਇ ਦੇ ਚੁਣਨ ਦਿਓ ਅਤੇ ਜੇਕਰ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਵੀ ਅਨੰਤ ਹੈ ਮੈਂ

ਇਸ ਲਈ  $gx$  ਨੂੰ  $m x 2$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੈ ਕੇ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਬਰਾਬਰ ਕਰੋ ਡੈਲਟਾ 1 ਡੈਲਟਾ 2 ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਇਹ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਫਿਰ ਮੌਡ  $x$  ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਨੂੰ  $m$  ਤੋਂ ਦੋ ਪਲੱਸ  $m$  ਗੁਣਾ ਦੇ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੋ  $m$  ਹੈ ਇਸਲਈ ਜੇ  $n$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੁਬਾਰਾ ਅਨੰਤ ਹੈ ਇੱਥੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪੁੱਛ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਮੰਨ ਲਓ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $afx$  ਤੱਕ ਜਾਣ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਂ  $x$  ਦੀ ਇੱਕ ਸਥਿਰ  $c$  ਗੁਣਾ  $f x$  ਤੱਕ ਜਾਣ ਦੀ ਸੀਮਾ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਕੀ ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕੀ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ  $c$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ  $c$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਠੀਕ ਹੈ ਜੇਕਰ  $c 0$  ਹੈ ਤਾਂ  $c$  ਗੁਣਾ  $fx 0$  ਹੈ ਤਾਂ ਥੋੜ੍ਹਾ ਇਹ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ  $c 0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਤਾਂ ਇਹ ਇੰਨਾ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿਉਂ ਹੈ? ਕੇਸ ਇੱਕ ਜੇਕਰ  $c$  ਪਾਜ਼ਿਟਿਵ ਹੈ ਤਾਂ  $m$  ਨੂੰ 0 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ  $c$  ਦੁਆਰਾ  $m$  ਵੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $c$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸਲਈ ਕਿਉਂਕਿ  $fx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤ ਹੈ ਉੱਥੇ ਡੈਲਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $f x$  ਦਾ ਇਸ ਨੰਬਰ  $m$  ਤੋਂ  $c$  ਅਤੇ  $t$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਉਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $c$  ਗੁਣਾ  $fx$  ਦੁਬਾਰਾ  $m$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $c$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ  $c$  ਗੁਣਾ  $fx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ  $c$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ  $m$  ਨੂੰ  $c$  ਦੁਆਰਾ ਨਹੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਜੋ ਕਿ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਾਓ  $c$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਲਈ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $c$  ਦੁਆਰਾ  $n$  ਲਿਖਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $n$  ਨੂੰ ਘਟਾਓ  $c$  ਨਾਲ ਲਿਖਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $n$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਅਤੇ ਘਟਾਓ  $c$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸਲਈ  $n$  ਦੁਆਰਾ ਘਟਾਓ  $c$  ਇੱਕ ਨੈਗੇਟਿਵ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇ ਕਿ  $c$  ਦੁਆਰਾ  $n$  ਹੈ ਇਹ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਅਤੇ  $n$  ਦੁਆਰਾ  $c$  ਇੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਸੀਂ 0 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $\text{mod } x$  ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ  $x$  ਦਾ  $f c$  ਗੁਣਾ  $n$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਜੋ ਮੈਨੂੰ ਦਿਖਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ  $c$  ਗੁਣਾ  $fx$  ਸੀਮਾ ਨਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਮੈਨੂੰ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣਾ ਪਏਗਾ ਕਿ  $c$  ਗੁਣਾ  $xfx n$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹੈ  $minus n \text{ by } minus c$  ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ ਮਾਇਨਸ  $c$  ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਅਸੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਘਟਾਓ  $c$  ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਤਾਂ  $x$  ਦਾ ਘਟਾਓ  $c$  ਗੁਣਾ  $f x$  ਦੁਬਾਰਾ ਘਟਾਓ  $c$  ਗੁਣਾ ਮਾਇਨਸ  $n$  ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ਜੇ ਘਟਾਓ  $c$  ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ  $cfx$  ਘਟਾਓ  $n$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ  $c$  ਗੁਣਾ  $fx$  ਲਿਖਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ  $n$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਇਸਲਈ  $c$  ਵਾਰ  $fx$  ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਸੀਮਾ ਮਾਇਨਸ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਰਸ ਦਾ ਆਖਰੀ ਕੇਸ  $c$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ  $c$  ਵਾਰ  $fx$  ਸਾਰੇ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿੱਥੇ  $fx$  ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ

ਇਸ ਲਈ  $x$  ਦੇ  $c$  ਗੁਣਾ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਣ ਲਈ ਧਿਆਨ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਜਾਂ ਨਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਸੀਮਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਜਾਂ ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਜਾਵੇਗੀ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਸੀਮਾ  $fx$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਦੀ  $c$  ਗੁਣਾ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤ ਜੇ  $c$  ਪਾਜ਼ਿਟਿਵ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੋਵੇਗੀ ਜੇਕਰ  $c$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਅਤੇ 0 ਜੇ  $c 0$  ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $fx$  ਅਤੇ  $gx$  ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਸੀਮਾ ਲਈ ਕੁਝ ਨਿਯਮ ਹਨ ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤ ਹੈ ਪਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਚੀਜ਼ ਹੈ ਨਹੀਂ ਦੇਖਿਆ ਤਾਂ ਅਸੀਂ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ  $fx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਮਾਇਨਸ ਅਨੰਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਕਿ  $fx$  ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ  $gx$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਇਹ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਇਹ ਅਨੰਤ ਵਿੱਚ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਇਹ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤ ਵਿੱਚ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਨੰਤ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ 0 ਹੈ ਪਰ ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵੇਖੀਏ ਤਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ  $f(x)$  ਇੱਕ ਬਾਇ  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ  $g(x)$  ਮਾਇਨਸ 1 ਬਾਇ  $x$  ਵਰਗ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ  $x$  ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਫਿਰ ਇੱਥੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ 0 ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਪਹੁੰਚ 0 ਮਾਇਨਸ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਦਾ  $g(x)$  ਦਾ ਘਟਾਓ 1 ਗੁਣਾ  $f(x)$  ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੀ ਪਿਛਲੀ ਚੀਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਘਟਾਓ 1 ਨੈਗੇਟਿਵ ਸਥਿਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਮਾਇਨਸ ਅਨੰਤਤਾ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਹੁਣ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦਾ ਕੀ ਹੈ?  $x$  ਵਰਗ ਪਲੱਸ ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਬਾਇ  $x$  ਵਰਗ ਜੋ ਕਿ ਸਾਰੇ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਜੋ ਕਿ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਫੰਕਸ਼ਨ ਜ਼ੀਰੋ ਵਾਲੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ 0 ਹੈ, ਇਸਲਈ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚਣ ਲਈ ਪਰਤਾਏ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਹੈ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੈ ਪਰ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੂਜੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖੀਏ, ਆਉ ਹੁਣ ਦੁਬਾਰਾ  $f(x)$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਵੇਖੀਏ ਮੈਂ  $f(x)$  ਨੂੰ  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ ਪਲੱਸ ਵਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲਵਾਂਗਾ ਅਤੇ  $g(x)$  ਬਰਾਬਰ ਘਟਾਓ ਇੱਕ  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜ਼ੀਰੋ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ  $x$  ਦੀ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$  ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਪਹਿਲੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ ਤੱਕ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਵਰਗ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਸੀਮਾ ਹੈ ਇੱਕ ਫੰਕਸ਼ਨ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਅਨੰਤ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋੜ ਦੁਬਾਰਾ ਅਨੰਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ  $x$  ਦੀ  $g(x)$  ਦੀ ਅਨੰਤਤਾ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਹ ਅਨੰਤ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਪਰ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਬਾਰੇ ਕੀ ਅਤੇ ਇੱਥੇ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਨਹੀਂ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ

ਇਸ ਲਈ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਖਾਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੇਕਰ  $f(x)$  ਨੂੰ  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ ਪਲੱਸ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲੈਣ ਦੀ ਬਜਾਏ ਅਸੀਂ  $f(x)$  ਨੂੰ ਕੁਝ ਸਥਿਰ  $c$  ਜੋੜ 1  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਜਿੱਥੇ  $c$  ਕੋਈ ਵੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਨੈਗੇਟਿਵ ਜਾਂ 0 ਹੈ ਤਾਂ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਇੱਥੇ  $c$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇਸਲਈ ਇਹ ਅਨੰਤ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤ ਇਹ ਕੋਈ ਵੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ  $c$  ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸਲਈ ਇਹ ਅਨੰਤ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਮਤਲਬ ਨਹੀਂ ਬਣਦਾ ਕਿ ਇਹ  $b$  ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਇਸ ਲਈ ਸਵਾਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਅਨੰਤਤਾ ਜਾਂ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜਵਾਬ ਦੁਬਾਰਾ ਹਾਂ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਆਉ  $f(x)$  ਨੂੰ ਵੇਖੀਏ ਅਤੇ  $g(x)$  ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ,

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਹ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਬਹੁਤ ਹੀ ਸਧਾਰਨ ਹੈ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $f(x)$  ਨੂੰ ਦੋ ਗੁਣਾ  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ  $g(x)$  ਨੂੰ ਮਾਇਨਸ ਇੱਕ ਬਾਇ  $x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜ਼ੀਰੋ 'ਤੇ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $g(x)$  ਦੀ ਅਨੰਤ ਸੀਮਾ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੋ ਗੁਣਾ  $x$  ਵਰਗ ਹੈ।

ਪਲੱਸ ਘਟਾਓ ਇੱਕ  $x$  ਵਰਗ ਜੋ ਕਿ  $x$  ਵਰਗ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਾਇ  $x$  ਵਰਗ ਅਨੰਤਤਾ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜ਼ੀਰੋ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਤੱਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ  $x$  ਵਰਗ  $x$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਲੈ ਕੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ  $f(x)$  ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ  $x$  ਵਰਗ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ  $g(x)$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਘਟਾਓ ਦੋ ਗੁਣਾ  $x$  ਵਰਗ ਸੀਮਾ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਇਹ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ  $x$  ਵਰਗ ਸੀਮਾ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੀ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਅਨੰਤ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ ਕੁਝ ਵੀ ਲੈ ਸਕਦੀ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸਿੱਟਾ ਇਹ ਅਨੰਤ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਿੰਟ ਦਾ ਰੂਪ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿ ਇਹ ਸੀਮਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ਇਸਲਈ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਅਨੰਤਤਾ ਵੱਲ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਅਨੰਤ ਅਨੰਤ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋੜ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਤੋਂ ਸਮੱਸਿਆ ਤੱਕ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਕੀ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਪਲੱਸ ਜਾਂ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸਾਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਜਿੱਠਣਾ ਪਵੇਗਾ।  $r$  ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਫੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਕੁਝ  $a$  'ਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ  $xx$  ਦੀ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਨੰਤਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੀ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੁਝ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਂ ਸੀਮਾ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦਾ ਹਾਂ?  $x$  ਦਾ  $f(x)$  ਗੁਣਾ  $g(x)$

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੇਸ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਜਿੱਥੇ  $x$  ਦਾ  $g(x)$  ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਸੱਜੇ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਹ ਸਥਿਰਾਂਕ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਸੀਮਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਅਨੰਤਤਾ ਘਟਾਓ ਅਨੰਤਤਾ ਜਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜੋ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ ਉਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਅਨੰਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ 1 ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨੈਗੇਟਿਵ ਅਨੰਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ 1 ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੁੱਛਾਂਗੇ ਕਿ ਜੇਕਰ 1 0 ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਥੇ ਸਥਿਰ ਫੰਕਸ਼ਨ 0 ਹੈ ਤਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਵਾਰ  $f(x)$  ਦਾ ਜੋ ਕਿ 0 ਹੈ, ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ 0 ਹੈ ਪਰ ਜੇ  $x$  ਦੀ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਸਵਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ 1 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਸਵਾਲਾਂ ਦੇ ਜਵਾਬ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਰਾਂਗੇ ਅਗਲੇ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤਤਾ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣੇ ਤੁਹਾਡਾ ਧੰਨਵਾਦ