

नमस्कार सर्वांना हे मर्यादांवरील तिसरे व्याख्यान आहे

त्यामुळे शेवटच्या व्याख्यानाच्या शेवटी आम्ही अनंत मर्यादांबद्दल चर्चा करण्यास सुरुवात केली आहे, म्हणून मी ते पुढे चालू ठेवतो म्हणून मला आठवते की अनंत मर्यादा म्हणजे काय? व्याख्या आपण म्हणतो की  $x \mid a$  च्या जवळ आल्यावर  $x$  ची  $f$  ची मर्यादा अनंततेच्या बरोबरीची आहे  $m$  जर कोणतीही सकारात्मक वास्तविक संख्या दिली असेल तर तेथे एक सकारात्मक डेल्टा असेल जसे की  $x$  चा  $f \mid m$  पेक्षा मोठा असेल जेव्हा  $0 < \delta$  हा  $x$  च्या मोड पेक्षा कमी असेल तेव्हा  $a$  कमी असेल डेल्टा पेक्षा म्हणजे  $x$  चा  $f$  आहे हे  $x$  निवडून अनियंत्रितपणे मोठे केले जाऊ शकते  $a$  च्या पुरेशी जवळ आहे परंतु  $a$  च्या समान नाही म्हणून आपण हे उदाहरणासह समजून घेण्याचा प्रयत्न करूया उदाहरणार्थ  $x$  चा  $f \mid 1 \times x$  च्या बरोबरीचा विचार करूया स्केअर आणि हे फंक्शन  $x$  बरोबर  $0$  वर परिभाषित केलेले नाही परंतु ते सर्व  $x$  शून्य नसलेल्या सर्वांसाठी परिभाषित केले आहे, तर आपण विचारूया की मर्यादा काय आहे तर  $x$  ची  $f$  मर्यादा काय आहे

जेव्हा  $x$  शून्याच्या जवळ येतो तेव्हा आपण जे पाहतो ते  $1$  बाय  $x$  आहे मी  $x$  ला खूप  $\text{small}$  मानल्यास चौरस  $11$  धनात्मक किंवा ऋण वास्तविक संख्या नंतर  $1$  बाय  $x$  चौरस ही मोठी सकारात्मक वास्तविक संख्या बनते म्हणून दावा असा आहे की  $x$  ची मर्यादा  $x \mid 0$  च्या जवळ आल्यावर ही अनंततेच्या बरोबरीची आहे आणि आम्ही ती आमच्या व्याख्या वापरून सिद्ध करू.

आपल्याला काय दाखवायचे आहे की कोणतेही  $m$  पॉझिटिव्ह दिले तर आपल्याला डेल्टा शोधावा लागेल म्हणून शून्यापेक्षा मोठा  $m$  दिला जाऊ द्या आपल्याला  $0$  पेक्षा मोठा डेल्टा शोधणे आवश्यक आहे जसे की  $x$  उणे  $0$  मोड  $0$  पेक्षा मोठा आणि डेल्टा पेक्षा कमी असेल तर  $x$  चा  $f \mid m$  पेक्षा मोठा असायला हवा आता  $x$  चा  $f$  काय आहे पण  $x$  चा  $f \mid m$  पेक्षा मोठा आहे याचा अर्थ  $x$  चा वर्ग  $m$  पेक्षा मोठा व्हायचा आहे जे  $x$  वर्ग  $1$  बाय  $m$  पेक्षा कमी आहे असे लिहिण्यासारखे आहे आणि जे  $\text{mod } x$  च्या समतुल्य आहे  $m$  च्या मुळाने एक पेक्षा कमी

त्यामुळे आपण पाहतो की जर तसे असेल तर  $m$  च्या

वर्गमुळाच्या  $1$  च्या बरोबरीचे डेल्टा घेऊ या कारण  $m$  धन आहे मी  $m$  चे वर्गमूळ घेऊ शकतो

त्यामुळे हे धन आहे आता वास्तविक संख्या जर  $\text{mod } x$  डेल्टा पेक्षा कमी असेल आणि  $x$  शून्य असेल तर  $x$  चौरस डेल्टा स्केअरपेक्षा कमी आहे जो  $1$  बाय  $m$  च्या बरोबरीचा आहे आणि याचा अर्थ  $1$  बाय  $x$  स्केअर  $m$  पेक्षा मोठा आहे कारण  $x \mid 0$  च्या बरोबरीचा नाही आणि हा आपला  $x$  चा  $f$  आहे  $x$  चा  $f \mid m$  पेक्षा मोठा आहे जर मोड असेल तर  $x$  डेल्टा पेक्षा कमी आहे आणि  $x$  हे शून्याच्या बरोबरीचे नाही

त्यामुळे हे सिद्ध होते की

म्हणून  $x \mid 0$  च्या जवळ येताच  $1$  बाय  $x$  चौरसाची मर्यादा ही अनंताच्या बरोबरीची आहे म्हणून आपण पाहिले आहे की आपण डाव्या हाताची आणि उजव्या हाताची मर्यादा परिभाषित करू शकतो.

त्याचप्रमाणे व्याख्येत आपण डाव्या हाताची किंवा उजव्या हाताची मर्यादा अनंत अशी परिभाषित करू शकतो ज्याचा अर्थ असा होईल की  $x$  च्या वजा  $f$  वर जाणारी  $x$  ची मर्यादा अनंत किंवा अनुक्रमे  $x$  ची मर्यादा  $x$  च्या अधिक  $f$  वर जाणारी मर्यादा आहे जी म्हणजे उजव्या हाताची मर्यादा अनंताच्या बरोबरीची आहे जर कोणतीही सकारात्मक वास्तविक संख्या  $m$  दिली असेल तर डेल्टा अस्तित्वात असेल तर हा डेल्टा  $m$  वर अवलंबून असू शकतो हे सकारात्मक आहे जसे की जर आपल्याकडे  $x$  असेल तर डाव्या हाताच्या मर्यादेसाठी आपण फक्त मध्यांतर पाहत आहोत  $a$  च्या डावीकडे म्हणजे  $x$  जर  $a$  पेक्षा कमी आणि मोठा असेल वजा डेल्टा पेक्षा याचा अर्थ असा असावा की  $x$  चा  $f \mid m$  पेक्षा मोठा आहे आणि उजव्या हाताच्या मर्यादेसाठी अनुक्रमे  $x \mid a$  पेक्षा मोठा आणि अधिक डेल्टापेक्षा कमी असेल तर  $x$  चा  $f \mid m$  पेक्षा मोठा असावा, उदाहरणार्थ  $f$  फंक्शनसाठी च्या  $x$  समान  $1$  बाय  $x \mid 0$  च्या बरोबर नाही उजव्या हाताची मर्यादा मर्यादा  $x$  शून्यावर जाणे  $+ x$  च्या  $f$  च्या अनंततेच्या बरोबरीचे आहे हा इतका पुरावा का आहे  $m \mid 0$  पेक्षा मोठा असू द्या आपल्याला डेल्टा पॉझिटिव्ह शोधणे आवश्यक आहे जसे की जर  $x \mid 0$  पेक्षा मोठा आणि डेल्टा पेक्षा कमी असेल तर याचा अर्थ  $x$  चा  $f \mid 1$  बाय  $x$  पेक्षा मोठा असावा तर येथे डेल्टा काय असावा म्हणून डेल्टा  $1$  बाय  $m$  बरोबर असू द्या कारण  $m$  ही वास्तविक संख्या सकारात्मक आहे वास्तविक संख्या हा डेल्टा एक धनात्मक परिमाण आहे आणि नंतर जर  $x$  शून्यापेक्षा मोठा असेल आणि डेल्टापेक्षा कमी असेल जो  $m$  पेक्षा एक असेल तर एक  $x \mid x \mid m$  पेक्षा मोठा आहे म्हणून उजव्या हाताची मर्यादा शून्य बाय  $x$  च्या शून्यावर आहे.

अनंत त्याचप्रमाणे आपण नकारात्मक अनंत असण्याची मर्यादा परिभाषित करू  $x$  ची  $f$  ची मर्यादा  $x$  च्या जवळ आल्यास  $a$  ही ऋणात्मक पूर्णांक दिल्यास ऋण अनंताच्या बरोबरीची असते

त्यामुळे कोणताही  $n$  शून्यापेक्षा कमी असेल तेथे डेल्टा पॉझिटिव्ह पुन्हा डेल्टा  $n$  वर अवलंबून असेल अशा प्रकारे  $x$  चा  $f$  दिलेल्या ऋण संख्येपेक्षा कमी असावा जेव्हा शून्य मॉड  $x$  उणे  $a$  पेक्षा कमी असेल तेव्हा डेल्टा पेक्षा कमी असेल तर उदाहरणार्थ मी असेच लिहूया की आपण  $x$  ची डाव्या हाताची मर्यादा उणे अनंताच्या बरोबरीची आणि  $x$  च्या  $f$  ची

उजव्या हाताची मर्यादा ऋण अनंताच्या बरोबरीने परिभाषित करू शकतो तर आपण पुन्हा उदाहरण पाहू या  $f \mid x$  समान एक बाय  $x$  म्हणजे  $x$  च्या या  $f$  ची उजव्या हाताची मर्यादा शून्यावर असीमतेच्या बरोबरीची आहे उजव्या हाताचे काय, डाव्या हाताच्या मर्यादेचे काय म्हणून दावा डावीकडे आहे  $x$  च्या  $f$  ची हात मर्यादा ऋण अनंताच्या बरोबरीची आहे हे पुन्हा स्पष्ट असले पाहिजे कारण  $x$  जर ऋण वास्तविक संख्या असेल तर  $1$  बाय  $x$  देखील ऋण असेल आणि जर तुम्ही  $x$  ही ऋण वास्तविक संख्या घेतली जी  $0$  च्या अगदी जवळ असेल तर  $1$  बाय  $x$  हा मोठा  $n \in$  असेल गेटिव संख्या बरोबर आहे पण कठोरपणे जर सिद्ध करायचे असेल तर

$n$  शून्य पेक्षा कमी द्या मग तुम्हाला डेल्टा शोधावा लागेल असे म्हटले आहे की तसे असल्यास मला पटकन लिहू द्या म्हणून डेल्टा द्या वजा  $1$  बाय  $n$  लक्षात घ्या की आपल्याला डेल्टा असणे आवश्यक आहे एक सकारात्मक वास्तविक संख्या म्हणजे  $1$  बाय  $n$  ही ऋण आहे त्यामुळे  $1$  बाय  $n$  ही एक सकारात्मक वास्तविक संख्या आहे आणि जर  $n$  मोठी ऋण संख्या असेल तर हा डेल्टा एक लहान धनात्मक वास्तविक संख्या असेल आता जर डेल्टा उणे  $1$  बाय  $n$  असेल तर आपण जर माझे  $x \mid 0$  च्या डावीकडे असेल तर ते द्या म्हणजे  $x \mid 0$

पेक्षा कमी आहे परंतु तो 0 वजा डेल्टा पेक्षा मोठा आहे म्हणजे  $x$  हा उणे डेल्टापेक्षा मोठा आहे याचा अर्थ  $x$  हा उणे डेल्टा पेक्षा मोठा आहे जो प्लस 1 च्या बरोबरीचा आहे.

$n$  द्वारे ठीक आहे, जर आपल्याकडे  $x$  ही ऋण संख्या असेल आणि उणे डेल्टा पेक्षा मोठी असेल तर  $x$  ही 1 बाय  $n$  पेक्षा मोठी आहे हे लक्षात घ्या की हे 1 बाय  $n$  आहे हे ऋण आहे म्हणून याचा अर्थ असा होतो की वजा  $x$  ही उणे 1 बाय  $n$  पेक्षा कमी आहे आणि कारण  $x \neq 0$  पेक्षा कमी आहे वजा  $x \neq 0$  पेक्षा मोठा आहे आणि आता हे उणे  $x$  थि आहे  $s$  सकारात्मक आहे म्हणून याचा अर्थ असा होतो की 1 बाय वजा  $x$  हा वजा  $n$  पेक्षा मोठा असावा आणि याचा अर्थ असा होतो की 1 बाय  $x$   $n$  पेक्षा कमी असावा म्हणून जर  $x \neq 0$  पेक्षा कमी आणि उणे डेल्टा पेक्षा मोठा असेल तर  $x$  चा  $f$  1 बाय बरोबर असेल  $x$  हे  $n$  पेक्षा कमी आहे म्हणून  $x$  ची  $f$  ची डायवा हाताची मर्यादा उणे अनंताच्या समान आहे ठीक आहे, तर आता आपण पाहूया म्हणजे फंक्शनची मर्यादा पॉझिटिव्ह अनंत किंवा नकारात्मक अनंत आहे याचा अर्थ काय आहे ते आपण पाहू या.

गुणधर्म म्हणून प्रथम समजा आपल्याकडे  $fx$  आहे आणि  $gx$  हे कार्य करायचे आहे आणि समजा  $x$  ची  $f$  ची मर्यादा अनंताच्या बरोबरीची आहे आणि  $x$  ची  $g$  ची मर्यादा  $a$  येथे काही 1

आहे जी वास्तविक संख्या आहे तर

$fx$  ची मर्यादा किती आहे?  $plus$   $gx$  म्हणून हे पुन्हा अनंताच्या बरोबरीचे असले पाहिजे, म्हणून जर आपल्याकडे दोन फंक्शन्सची बेरीज असेल जिथे एका फंक्शनची मर्यादा पॉझिटिव्ह अनंत असेल आणि दुसऱ्या फंक्शनची मर्यादा अस्तित्वात असेल आणि ती मर्यादित असेल तर बेरीजची मर्यादा अनंत असावी.

हे लक्षात ठेवण्यासाठी म्हणून आपण  $a$  म्हणून लिहू शकतो नोटेशन जर आपल्याकडे कोणतीही अनंतता अधिक  $a$  असेल तर हे अनंताच्या बरोबरीचे आहे जर  $a$  कोणतीही वास्तविक संख्या असेल तर जेव्हा जेव्हा आपल्याकडे अनंत स्वरूपाची मर्यादा असते आणि वास्तविक संख्या असते जी अनंत असावी लागते आणि हे अगदी स्पष्ट असले पाहिजे याचा पुरावा आपल्याला आहे दाखवा की  $fx$  अधिक  $gx$  ची मर्यादा अनंताच्या बरोबरीची आहे म्हणून  $m$  शून्यापेक्षा जास्त द्या मग आपल्याला डेल्टा पॉझिटिव्ह शोधणे आवश्यक आहे जसे की  $mod$   $x$  उणे डेल्टापेक्षा कमी आणि  $x$  समान नाही याचा अर्थ  $fx$  अधिक  $gx$  असावा.

$m$  पेक्षा मोठे असावे परंतु आम्हाला दिलेले आहे की  $fx$  ची मर्यादा अनंत आहे आणि  $gx$  ची मर्यादा 1 आहे त्यामुळे या मर्यादेच्या व्याख्येनुसार  $x$  च्या  $g$  ची मर्यादा 1 च्या बरोबरीची असल्याने आम्हाला माहित आहे की काही डेल्टा एक सकारात्मक आहे जसे की मोड  $x$  वजा  $a$  डेल्टा 1 पेक्षा कमी याचा अर्थ असा होतो की  $x$  वजा 1 चा  $g$  चा मोड एका पेक्षा कमी आहे म्हणून लक्षात घ्या की आपण जे करत आहोत ते 1 च्या बरोबरीच्या एप्सिलॉनशी संबंधित डेल्टा वन पॉझिटिव्ह निवडा.

त्यामुळे  $g$  ची मर्यादा काय आहे हे आपल्याला माहित आहे.

$x$  चा  $x$   $a$  ला जातो म्हणून  $equ$  आहे  $a$  1 ते 1 कोणतेही एप्सिलॉन पॉझिटिव्ह दिले असल्यास मला डेल्टा सापडेल की जेव्हा जेव्हा  $mod$   $x$  उणे  $a$  डेल्टापेक्षा कमी असेल आणि  $x$  समान नसेल तेव्हा  $x$  वजा 1 च्या  $g$  चा मोड एप्सिलॉनपेक्षा कमी असावा म्हणून विशेषतः मी एप्सिलॉन निवडले आहे एक असण्यासाठी  $mod$   $gx$  उणे 1 एकापेक्षा कमी आहे म्हणून  $mod$   $x$  उणे डेल्टा पेक्षा कमी एक शून्यापेक्षा मोठा याचा अर्थ असा होतो की  $x$  चा  $g$  1 वजा एक आणि 1 प्लस वन मधील आहे म्हणून हे देखील आपल्याला मिळते.

$x$  ची  $f$  ची मर्यादा  $x$  च्या जवळ आल्यावर  $a$  ही अनंततेच्या बरोबरीची आहे म्हणून कोणत्याही सकारात्मक वास्तविक संख्येसाठी मी  $x$  च्या  $f$  चा  $x$  साठी त्या वास्तविक संख्येपेक्षा मोठा बनवू शकतो म्हणून तेथे डेल्टा 2 सकारात्मक आहे जसे की  $x$  चा  $f$  मोठा आहे त्यापेक्षा मी इथे  $m$  one लिहू दे आणि मी हे नंतर लिहीन म्हणजे  $x$  चा  $f$   $m$  one पेक्षा मोठा असतो जेव्हा  $mod$   $x$  उणे  $a$  हा डेल्टा टू पेक्षा कमी आणि शून्यापेक्षा मोठा असतो तेव्हा आता काय होते ते आपल्याला  $fx$   $plus$  पहावे लागेल  $gx$  म्हणून जर आपण डेल्टा किमान डेल्टा 1 आणि डेल्टा 2 घेतला तर ते पुन्हा एक पॉझिटिव्ह आहे  $ve$  प्रमाण कारण डेल्टा 1 आणि डेल्टा 2 दोन्ही धनात्मक आहेत तर  $mod$   $x$  उणे डेल्टा पेक्षा कमी आणि शून्य पेक्षा जास्त याचा अर्थ  $fx$  अधिक  $gx$  असा होतो, कारण  $mod$   $x$  उणे  $a$  डेल्टापेक्षा कमी आहे जे डेल्टा 2  $fx$  पेक्षा कमी आहे.

$m$  1 आणि  $mod$   $x$  उणे  $a$  डेल्टा 1 पेक्षा कमी आहे म्हणून 1 ने हे 1 हे 2 बाय एक  $g$   $x$  पेक्षा मोठे आहे 1 वजा एक तर आपल्याला माहित आहे की आपल्याला  $x$  चा अधिक  $g$  चा  $f$  हवा आहे  $x$   $m$  पेक्षा मोठा असेल जेथे  $m$  दिलेली धन संख्या होती म्हणून आपण लिहूया की हे  $m$  च्या बरोबरीचे आहे हे 1 आणि 2 ने आहे.

तर आपला  $m$  एक  $m$  एक म्हणजे  $m$  अधिक एक वजा 1 किती असावा म्हणून मी निवडल्यास  $m$  एक बरोबर  $m$  अधिक एक वजा 1 असेल तर आपण  $x$  चा  $f$  या  $m$  वन पेक्षा मोठा बनवू शकतो जेव्हा जेव्हा  $mod$   $x$  उणे  $a$  डेल्टा दोन पेक्षा कमी असेल तेव्हा  $fx$  अधिक  $gx$  ची मर्यादा ही अनंताच्या बरोबर असते मला असे म्हणू द्या की हा रीग्रेस पुरावा थोडासा क्लिष्ट वाटू शकतो परंतु तुम्हाला ही कल्पना समजली पाहिजे की जर एफएक्सची मर्यादा अनंत आहे याचा अर्थ असा आहे की  $x$  ची मर्यादा  $a$  जवळ असणे निवडून आपण  $fx$  ला हवे तितके मोठे बनवू शकता

आणि  $x$  ची मर्यादा मर्यादित असल्यामुळे ती काही मर्यादित संख्येच्या जवळ आहे आणि त्यामुळे बेरीज पुन्हा मोठी केली जाऊ शकते.

जसे तुम्हाला हवे आहे, त्याचप्रमाणे दोन्ही मर्यादा अनंत असल्यास काय होते ते विचारू, जर  $x$  च्या  $af$  वर जाणारी  $x$  ची मर्यादा अनंताच्या समान असेल आणि  $x$  ची  $g$  ची मर्यादा देखील अनंत असेल तर पुन्हा  $fx$  अधिक  $gx$  ची मर्यादा ही असेल अनंताच्या बरोबरीचा पुन्हा पुरावा असा आहे की मी शून्यापेक्षा मोठे असू द्या मग मला त्वरीत लिहू द्या म्हणजे तेथे डेल्टा एक शून्यापेक्षा मोठा आणि डेल्टा दोन शून्यापेक्षा मोठा आहे जसे की मोड  $x$  वजा डेल्टा पेक्षा कमी एक शून्यापेक्षा मोठा आहे याचा अर्थ  $f$   $x$  चा  $x$  पेक्षा मोठा आहे मला अर्धा मिमी बाय दोन निवडू द्या आणि जर  $mod$   $x$  उणे  $a$  डेल्टा दोन पेक्षा कमी असेल तर  $x$  ची  $g$  मर्यादा देखील अनंत असल्याने मी यासाठी  $gx$   $m$   $x$  2 बाय पेक्षा मोठा बनवू शकतो आणि नंतर

त्यामुळे

पुन्हा डेल्टा समान घ्या डेल्टा 1 डेल्टा 2 चे किमान हे धन आहे तर मॉड  $x$  उणे डेल्टा पेक्षा कमी शून्य पेक्षा मोठे याचा अर्थ  $f \times$  अधिक  $g \times$  हे  $m$  पेक्षा जास्त आहे दोन अधिक  $m$  बाय दोन जे  $m$  आहे म्हणून बेरीजची मर्यादा पुन्हा अनंत आहे इथे त्याचप्रमाणे तुम्ही विचारू शकता की समजा  $x$  ची मर्यादा  $a \times f \times$  ला जाण्याची मर्यादा

अनंताच्या बरोबरीची असेल तर

$x$  च्या  $a$  च्या  $c$  गुणिले  $f \times$  च्या स्थिरतेच्या मर्यादेबद्दल मी काय म्हणू शकतो ते अनंताच्या बरोबरीचे आहे तर आपण हे पाहणार आहोत की हे अनंताच्या बरोबरीचे आहे जर  $c$  सकारात्मक असेल तर हे ऋण अनंताच्या बरोबर असेल जर  $c$  नकारात्मक असेल तर ठीक आहे जर  $c = 0$  असेल तर  $c$  गुणिले  $f \times = 0$  असेल तर अर्थातच हे  $0$  च्या बरोबर असेल तर  $c = 0$  च्या बरोबरीचे आहे.

मग हे इतके पहिले का आहे केस एक जर  $c$  पॉझिटिव्ह असेल तर  $m = 0$  पेक्षा मोठा द्या मग  $m$  द्वारे  $c$  देखील पॉझिटिव्ह आहे कारण  $c$  पॉझिटिव्ह आहे म्हणून

$f \times$  ची मर्यादा अनंत असल्याने तेथे डेल्टा पॉझिटिव्ह आहे जसे की  $\text{mod } x$  वजा डेल्टा पेक्षा कमी याचा अर्थ असा होतो की  $f \times$  ची संख्या  $m$  पेक्षा  $c$  आणि  $t$  ने मोठी आहे त्याचा अर्थ  $c$  गुणिले  $f \times$  हा पुन्हा  $m$  पेक्षा मोठा आहे कारण  $c$  सकारात्मक आहे म्हणजे  $c$  गुणिले  $f \times$  ची मर्यादा अनंताच्या बरोबरीची आहे जर  $c$  ऋण असेल तर आपण  $c$  ने  $m$  लिहू शकत नाही ते सकारात्मक नाही म्हणून मग उणे  $c$  सकारात्मक होईल आणि म्हणून जर आपल्याकडे असेल आणि शून्यापेक्षा कमी असेल तर मी  $c$  ने  $n$  लिहिल्यास हे होईल, जर मी  $n$  वजा  $c$  ने लिहिले तर हे पुन्हा ऋण आहे कारण  $n$  ऋण आहे आणि उणे  $c$  धन आहे

त्यामुळे  $n$  द्वारे उणे  $c$  ही ऋण वास्तविक संख्या आहे म्हणजे  $n$  बाय  $c$  हे धन होते

त्यामुळे  $x$  ची  $f$  ची मर्यादा धनात्मक अनंत आहे आणि  $n$  ची  $c$  ही सकारात्मक वास्तविक संख्या असल्याने आपण  $0$  पेक्षा मोठा डेल्टा

शोधू शकतो जसे की  $\text{mod } x$  वजा डेल्टा पेक्षा कमी याचा अर्थ  $x$  चा  $f$  आहे  $n$  पेक्षा  $c$  पेक्षा मोठे आहे मला जे दाखवायचे आहे ते

म्हणजे  $c$  पट  $f \times$  ही मर्यादा ऋणात्मक अनंत आहे याचा अर्थ मला दाखवावे लागेल की  $c$  पट  $x \times f \times n$  पेक्षा कमी आहे जर

आपल्याकडे  $\text{mod } x$  उणे डेल्टा पेक्षा कमी असेल तर उणे  $n$  द्वारे उणे  $c$  आणि उणे  $c$  सकारात्मक असल्याने आपण करू शकतो दोन्ही बाजूंना उणे  $c$  ने गुणा म्हणजे  $x$  चा उणे  $c$  गुणिले  $f$  पुन्हा उणे  $c$  गुणिले वजा  $n$  ने वजा  $c$

पेक्षा मोठा आहे म्हणजे  $c \times f \times$  वजा  $n$  पेक्षा मोठा आहे आणि जे  $c$  गुणिले  $f \times$  लिहिण्यासारखे आहे ते  $n$  पेक्षा कमी आहे

$c$  गुणिले  $f \times$  ची व्याख्या मर्यादा वजा अनंत बरोबर आहे आणि शेवटची केस अर्थातच  $c$  साठी शून्य  $c$  गुणा  $f \times$  सर्व  $x$  साठी शून्य

आहे जेथे  $f \times$  परिभाषित आहे आणि म्हणून  $x$  च्या  $c$  गुणा  $f$  ची मर्यादा शून्य असणे आवश्यक आहे बरोबर म्हणून इथे तुम्ही फक्त

सावधगिरी बाळगली पाहिजे की स्थिरांक सकारात्मक आहे की नकारात्मक आहे हे सांगण्यासाठी मर्यादा सकारात्मक अनंताकडे जाईल

की नकारात्मक अनंताकडे जाईल त्याचप्रमाणे जर मर्यादा  $f \times$  ऋण अनंत असेल तर  $x$  च्या  $c$  गुणा  $f$  ची मर्यादा ही समान असेल.

ऋण अनंत जर  $c$  सकारात्मक असेल तर ही सकारात्मक अनंत असेल  $c$  नकारात्मक असेल आणि  $0$  जर  $c$  असेल तर  $0$  ठीक आहे म्हणून आपण पाहिले आहे की जर आपल्याकडे  $f \times$  आणि  $g \times$  ची बेरीज असेल तर मर्यादा अनंत असली तरीही आपल्याला मर्यादेसाठी काही नियम आहेत.

आमच्याकडे एक गोष्ट आहे पाहिले नाही म्हणून  $f \times$  ची मर्यादा अनंत असेल आणि  $x$  ची मर्यादा वजा अनंत असेल तर  $f \times$  अधिक

$g \times$  च्या मर्यादेबद्दल आपण काय म्हणू शकतो, तर या प्रकरणात काय होत आहे की  $f \times$  अनंताच्या जवळ येत आहे आणि  $g \times$

नकारात्मक अनंताच्या जवळ येत आहे म्हणून हे अनंत वजा अनंत स्वरूपाचे आहे

त्यामुळे तुमच्यापैकी काही जण असा अंदाज लावू शकतात की हे अनंतात जात आहे हे अनंतात जाणार आहे म्हणून अनंत वजा अनंत  $0$  आहे परंतु ते खरे नाही, म्हणून काही उदाहरणे पाहू या, उदाहरणे आपण  $f \times$  घेऊ.

एक बाय  $x$  स्केअर आणि  $g \times$  वजा  $1$  बाय  $x$  स्केअर या दोन्ही गोष्टी  $x$  नॉन-शून्य साठी परिभाषित केल्या आहेत तर इथे

$x = 0$  च्या जवळ आल्यावर  $f \times$  ची मर्यादा आहे आणि  $x$  च्या  $g$  ची मर्यादा  $x$  म्हणून आहे अप्रॉच  $0$  हे वजा अनंत आहे कारण  $x$  चा

$g$  हा  $x$  च्या उणे  $1$  गुणा  $f$  याशिवाय काहीही नाही आणि आपल्या आधीच्या गोष्टीनुसार कारण हा वजा  $1$  ऋण स्थिरांक आहे जर आपण

गुणाकार केला तर हे अनंत वजा वर जाईल आता  $f \times$  अधिक  $g \times f \times$  अधिक  $g \times$  एक बाय एक आहे?  $x$  चौरस अधिक वजा एक बाय

$x$  चौरस जे सर्व  $x$  साठी शून्य आहे  $\circ$  उजवीकडे नाही

त्यामुळे हे फंक्शन शून्य असलेल्या मध्यांतरात एकसारखेच  $0$  आहे

त्यामुळे  $f \times$  अधिक  $g \times$  ची मर्यादा शून्य इतकी आहे

त्यामुळे तुम्हाला असा विचार करण्याचा मोह होईल की हे आहे नेहमी खरे आहे पण दुसरे उदाहरण पाहू या आता आपण  $f \times$  च्या

बरोबरीने पाहू या आता मी  $f \times$  घेईन एक अधिक एक बाय  $x$  चौरस आणि  $g \times$  म्हणजे वजा एक बाय  $x$  चौरस आणि दोन्हीची व्याख्या

$x$  बरोबर नाही शून्य म्हणून जर आपण  $x$  ची  $f$  मर्यादा पाहिली तर  $x$  शून्याच्या जवळ येतो ही पुन्हा पहिल्या फंक्शनची

मर्यादा आहे ही एक पर्यंत जाते आणि  $x$  चौरस बाय एकची मर्यादा अनंत आहे आणि आपण पाहिले आहे की जर आपल्याकडे मर्यादा

असेल तर एक फंक्शन ही एक वास्तविक संख्या आहे आणि दुसरी अनंताकडे जाते नंतर बेरीज पुन्हा अनंत आहे म्हणून ही  $x$  च्या  $g$

च्या अनंत मर्यादेइतकी आहे ही अनंतता वजा आहे पण  $f \times$  अधिक  $g \times$  बदल काय आणि इथे  $f \times$  अधिक  $g \times$  एक बरोबर आहे म्हणून

$x$  नाही शून्याच्या बरोबरीने म्हणून  $f \times$  अधिक  $g \times$  ची मर्यादा आहे येथे एकाच्या बरोबरीचे आहे आणि जर मी ही संख्या कोणत्याही

वास्तविक संख्येत बदलली तर येथे एकाबद्दल काही विशेष नाही, म्हणून जर  $f \times$  बरोबर एक अधिक एक बाय  $x$  चौरस घेण्याऐवजी

आपण  $f \times$  समान स्थिरांक  $c$  अधिक  $1$  बाय  $x$  वर्ग घेऊ.

जेथे  $c$  ही कोणतीही वास्तविक संख्या धनात्मक ऋण किंवा  $0$  असेल तर  $f \times$  अधिक  $g \times$  ची मर्यादा  $c$  ची येथे योग्य आहे, म्हणून ही

अनंतता वजा अनंत ही कोणतीही वास्तविक संख्या  $c$  घेऊ शकते म्हणून ही अनंतता वजा अनंतता ज्याचा अर्थ नाही याला कोणताही अर्थ

नाही वास्तविक संख्या देखील आहे म्हणून प्रश्न असा आहे की ते अनंत किंवा वजा अनंत असू शकते तर उत्तर पुन्हा होय आहे, जर आपण

पाहिले तर  $f \times$  पाहू या आणि  $g \times$  म्हणते की  $f \times$  प्लस  $g \times$  हे अनंताच्या बरोबरीचे असेल, म्हणून मी हे पुन्हा घेतले तर खूप सोपे आहे.

असे करण्यासाठी जर मी  $f(x)$  बरोबर दोन बाय  $x$  स्केअर आणि  $g(x)$  बरोबर वजा एक बाय  $x$  स्केअर घेतला तर  $f(x)$  ची शून्यावर मर्यादा म्हणजे  $g(x)$  ची अनंत मर्यादा वजा अनंताच्या समान आहे आणि  $f(x)$  अधिक  $g(x)$  म्हणजे दोन बाय  $x$  चौरस अधिक वजा एक बाय  $x$  चौरस जे एक बाय  $x$  स्केअर आहे म्हणून आपल्याला माहित आहे की  $x$  बाय  $x$  स्केअर अनंततेच्या जवळ जातो त्यामुळे  $x$  ची मर्यादा शून्य  $f(x)$  अधिक  $g(x)$  पर्यंत जाते ही मर्यादा  $x$  चौरस  $x$  शून्याच्या जवळ जाण्याच्या मर्यादेवढी आहे जी अनंताच्या बरोबरीची आहे आणि त्याचप्रमाणे आपण घेतल्यास  $f(x)$  बरोबर एक बाय  $x$  चौरस आणि  $g(x)$  बरोबर उणे दोन बाय  $x$  चौरस मर्यादा  $f(x)$  अधिक  $g(x)$  ही वजा अनंत होते कारण येथे  $f(x)$  अधिक  $g(x)$  ही वजा एक बाय  $x$  चौरस मर्यादा आहे  $f(x)$  ची मर्यादा अनंत आहे आणि  $x$  ची मर्यादा अनंत आहे तर आपण पाहिले की ही अनंतता वजा अनंत काहीही घेऊ शकते त्यामुळे निष्कर्ष हा अनंत वजा अनंत हा एक अनिश्चित मिनिट स्वरूप आहे याचा अर्थ असा आहे की ही मर्यादा काय असेल हे तुम्ही आधीच ठरवू शकत नाही म्हणून जर एक अनंताकडे जात असेल आणि दुसरा अनंताकडे जात असेल तर बेरीज ते समस्येपासून समस्येपर्यंत अवलंबून असेल ते काय आहे ते अनिश्चित स्वरूप आहे आणि कोणतीही वास्तविक संख्या किंवा अधिक किंवा वजा अनंत असू शकते म्हणून आपल्याला अशा मर्यादा काळजीपूर्वक हाताळल्या पाहिजेत.

र गोष्ट अशी आहे की फंक्शन्सच्या उत्पादनासाठी गुणधर्म आहेत म्हणून समजा  $x(x)$  ची  $f$  ची मर्यादा काही  $a$  ला जाणारी अनंततेच्या बरोबरीची आहे आणि  $x$  च्या  $g$  ची मर्यादा काही  $1$  च्या बरोबर आहे जी वास्तविक संख्या आहे तर मी मर्यादेबद्दल काय सांगू?  $x$  च्या  $f(x)$  गुणिले  $g$  म्हणून आपण यातील एक विशेष केस पाहिला आहे जेथे  $x$  चा  $g$  हा फक्त एक स्थिर उजवा आहे म्हणून आपण पाहिले की ते स्थिरांकाच्या चिन्हावर अवलंबून आहे की मर्यादा धनात्मक अनंत वजा अनंत किंवा शून्य इतकी आहे.

येथे आपल्याला काय मिळेल की  $1$  सकारात्मक असल्यास हे अनंताच्या बरोबरीचे आहे आणि जर  $1$  ऋणात्मक असेल तर हे ऋण अनंताच्या बरोबरीचे आहे आणि आपण हे देखील विचारू की  $1 \neq 0$  असल्यास काय होते, म्हणून जर येथे स्थिर कार्य  $0$  असेल तर स्थिर वेळा  $f(x)$  चे  $0$  आहे त्या बाबतीत मर्यादा  $0$  आहे परंतु जर  $x$  ची  $g$  ची मर्यादा शून्य असेल तर ती अधिक गंभीर आहे म्हणून प्रश्न करा की  $1 \neq 0$  च्या बरोबरीचे असेल तर काय असेल तर आपण पुढील व्याख्यानात या प्रश्नांची उत्तरे देऊ आणि आपण देखील करू.

पुढील व्याख्यानात अनंताच्या मर्यादांबद्दल जाणून घ्या धन्यवाद