حدود پر دوسرے لیکچر میں خوش آمدید

اس لیے پہلے لیکچر میں ہم نے حدود کا مفہوم دیا اور پھر ہم نے حدود کی ریگریس ایپسیلون ڈیلٹا تعریف بھی دیکھی اور پھر ہم کچھ خاصیتوں کو
دیکھ رہے تھے تو آج میں اس کی کچھ مزید خصوصیات کے ساتھ جاری رکھوں گا۔ حدود اور پھر ہم کچھ اور نتائج بیان کریں گے لہذا ہم حدود کی
خصوصیات کے ساتھ جاری رکھیں گے لہذا پچھلی بار ہم نے رقم کے فرق کے اصول کو دیکھا اور پھر ایک مستقل کا ضرب تو آج ہم دیکھتے ہیں کہ
کی x کی حد x تک جانے کی حد اور af کے x کی حد x فنکشن کی پیداوار کی حد کا کیا ہوتا ہے قاعدہ تو یہ صرف یہ کہتا ہے کہ اگر
x یہ بھی موجود ہے اور پروڈکٹ کی حد اس کی پیداوار کے برابر ہے۔ اس بار کو fx times gx تک جاتی ہے تو پروڈکٹ فنکشن کی حد ag
پر جاتا ہے اس طرح پروڈکٹ کی حد حد کی پیداوار ہے اسے دوبارہ ایپسیلون ڈیلٹا کی تعریف کا x a کی حد کو محدود کرتا ہے جیسا کہ g کی
استعمال کرتے ہوئے ثابت کیا جاسکتا ہے لیکن ہم ثبوت کو چھوڑ دیں گے بلکہ دیکھتے ہیں کہ اس کا استعمال کرتے ہوئے مجھے اجازت دیں اس
x ہے ایک مستقل صفر جمع ایک p کا x ایک کثیر الثانی ہے جس میں حقیقی عدد ہے جو p کا x کو بیان کریں لہذا فرض کریں کہ resu
کے برابر ہوتا ہے p کے a تک پہنچتا ہے یہ a کسی بھی x کی حد جیسے ہی p کی x پھر n تک طاقت nx مربع ہے تو x جمع دو
تک جاتی ہے یہ ایک حق کے برابر ہے x کے a کی حد x لہذا اس کو ثابت کرنے کے لیے آپ کو صرف یہ جاننا ہوگا کہ پہلے نوٹ کریں کہ
کرنا بہت آسان ہے۔ صرف یہ دیکھنا ہے کہ ایپیلون کے برابر ڈیلٹا کام کرے گا لہذا فنکشن cn یہ ایپسیلون ڈیلٹا کی تعریف کا استعمال کرتے ہوئے
a کے طور پر x مربع کی حد x کے برابر ہے لہذا اس کا استعمال کرتے ہوئے a پر جاتی ہے a کی حد x کے برابر ہے x کی حد fx
تک جانا یہ قدرتی kx a کی شامل کرنے کی حد کے ذریعے x پر جائے گی۔ مصنوعہ کے اصول کے لحاظ سے محض ایک مربع کے برابر اور
کی 0 جمع کی x کے برابر ہے۔ سب سے پہلے اس کے لیے میں 1 گنا a کی حد p کی x کے برابر ہے لہذا a کے لئے k تعداد میں تمام
پر جاتا ہے یہ رقم کے اصول کے مطابق ہے اور پھر آپ x a تک کیونکہ n کی حد تک x حد کے طور پر لکھ سکتا ہوں اور اسی طرح ایک بار
کے برابر a x ہے x کی حد p مستقل وقت کی اس حد کو استعمال کرتے ہیں ایک فنکشن مستقل وقت کی حد ہے لہذا اس کا مطلب یہ ہے کہ
تک جاتی ہے a کی دو گنا کی حد x مربع x کے طور پر ایک جمع تک x کی حد ایک گنا x ہے مستقل کی حد کے برابر ہے صرف صفر جمع
پر جاتا ہے یہ صفر جمع ایک کے برابر ہے اس کی حد صرف ایک جمع ایک دو بار ہے ایک مربع x a ہے n تک x اسی طرح ایک اوقات کی حد
پر کیا جاتا ہے لہذا ہم ایسا ap کے a ہے لیکن یہ کچھ بھی نہیں ہے لیکن کثیر الجہتی کی قدر کا اندازہ n سے a کی حد x تک n اور
جمع 2 پھر آپ اسے 1 پر کثیر الجہتی کی x میں سے ایک کہنا ہے۔ مربع جمع 3 x کو x کرتے ہیں مثال کے طور پر اگر ہم حد چاہتے ہیں تو
قدر کے طور پر لکھ سکتے ہیں تاکہ 1 مربع جمع تین گنا ایک جمع دو جو کہ ایک جمع تین جمع دو جو کہ چھ ہے دائیں اگلا قاعدہ دو کے حصے کے
بارے میں ہے۔ فنکشنز

پر جانے کی حد یہ بھی آگے موجود ہے اور صفر ag کے x کو x کی حد موجود ہے اور x پر جانے والی afx اس لیے فرض کریں کہ
کی حد کے برابر ہے تو یہ g کے x کی حد f کی x یہ g x بذریعہ fx کے برابر نہیں ہے تو کوانٹ کی حد ان دو فنکشنز میں سے
کی حد 0 کے برابر ہے تو 0 سے تقسیم اس کی تعریف نہیں کی گئی ہے g کے ڈینومینیٹر x نتیجہ ہے لیکن اگر

اس لیے یقیناً ہم اسے نہیں لکھ سکتے لیکن اگر حد غیر صفر ہے تو یہ معنی رکھتا ہے اور ہم اس فارمولے کو استعمال کر سکتے ہیں کہ کوزائن کی
حد حد کا حصہ ہے بشرطیکہ ڈینومینیٹر کی حد صفر کے برابر نہ ہو ۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ دو فنکشنز کے جز کی حد حد کے کوانٹ کے
مربع سے تقسیم کرنے کی حد کا x جمع تین کو x کیوب جمع دو x برابر ہے اگر ڈینومینیٹر کی حد غیر صفر ہے تو مثال کے طور پر اگر ہمیں
مربع کے قریب پہنچتا ہے جمع ایک کثیر x ایک x ایک کے قریب آتا ہے تو یہاں پہلے آپ دیکھیں کہ جب x حساب لگانا ہے۔ جمع ایک جیسے ہی
مربع جمع ایک x کی حد ایک x لکھ سکتے ہیں کہ چونکہ i مربع جمع ایک کی حد ایک مربع جمع ایک ہے جو غیر صفر ہے تو یہ x الثانی ہے تو
x x جمع تین x مکعب جمع دو x کی حد ایک x جمع ایک جو دو ہے یہ غیر صفر ہے لہذا quare کے برابر ہے۔ s تک جاتی ہے یہ ایک
مربع جمع ایک پر جائے تو صرف حد کا حصہ ہے اور اب دونوں کثیر الاضلاع ہیں لہذا ہم جانتے ہیں کہ ہمیں صرف اس کا اندازہ کریں تو ایک کے
پر ہمیں ایک مکعب جمع دو جمع تین ملتا ہے یہ چھ کو دو سے تقسیم کیا جاتا ہے تو یہ تین ہے میں آپ کو خبردار کرتا ہوں ہم نے کہا کہ x برابر
کی حد اقتباس موجود ہے اور حد کے کوزائن کے برابر ہے لیکن اگر ڈینومینیٹر فنکشن کی حد a 0 اگر ڈینومینیٹر فنکشن کی حد غیر صفر ہے تو
کی حد g کی x کے ذریعے موجود ہوسکتی ہے یہاں تک کہ جب gx کی حد fx ہے تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ حد موجود نہیں ہے لہذا
حقیقت میں صفر کے برابر ہو ۔ ہم دیکھیں گے کہ زیادہ تر اہم مثالیں وہ ہوں گی جب ڈینومینیٹر کی حد اصل میں صفر کے برابر ہو تو مثال کے طور
x مائنس ون سے تقسیم کیا جائے اگر یہ موجود ہے تو یہاں ہم دیکھیں کہ x جمع دو کو x مربع مائنس تین x کی حد تلاش کریں جو ایک x پر
مائنس ون میں سے ایک تک جاتی ہے یہ صرف ایک مائنس ہے۔ ایک جو کہ صفر بھی ہے x کی حد

اس لیے ہم براہ راست اقتباس کے اصول کو استعمال نہیں کر سکتے ہیں

اس لیے ہم براہ راست اقتباس کے اصول کو استعمال نہیں کر سکتے لیکن اگر ہم عدد کی عددی حد دیکھیں جو دوبارہ 1 مربع مائنس 3 ضرب 1 جمع
پر ہندسہ اور فقرہ دونوں x ہے جو کہ 0 بھی ہے ۔ ہندسوں اور فقروں کے دونوں صفر ہیں درحقیقت یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ ایک کے برابر 2
مائنس کے برابر ہے 1 گنا x مائنس 1 سے تقسیم کیا گیا ہے۔ x جمع 2 کو x مربع مائنس 3 x مائنس 1 کا عنصر ہے یہاں x صفر ہیں لہذا
ایک کے برابر نہیں ہے تو x ایک کے برابر نہیں ہے اور اگر x مائنس 1 سے تقسیم کیا گیا ہے یقیناً اس کی وضاحت ہے اگر x مائنس 2 کو x
مربع مائنس x کی حد x ایک کے برابر نہیں ہے تو x مائنس کے برابر ہے دو اگر x مائنس ون کو منسوخ کر سکتا ہے اور یہ x کوئی اس
مائنس 2 کے 1 تک پہنچتی ہے کیونکہ یاد رکھیں کہ حد کا x کی حد x مائنس 1 میں سے ایک ہوتی ہے یہ وہی چیز ہے جو x جمع دو x تین
x پر فنکشن کی قدر پر غور کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہمیں صرف یہ جاننے کی ضرورت ہے جب x حساب کرتے وقت ہم ایک کے برابر
کافی ہے۔ مکمل طور پر ایک کے قریب ہے تو یہ دوبارہ کے برابر ہے یہ صرف ایک کثیر الجہتی ہے تو یہ ہے 1 مائنس 2 جو کہ مائنس 1 صحیح
ہے تو اس مثال میں ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ ڈینومینیٹر کی حد موجود نہیں ہے تو اس کی حد موجود ہو سکتی ہے ٹھیک ہے تو یہ حد تلاش کرنے کی
x مائنس چار کے چار تک پہنچتا ہے مربع جڑ x x کوشش کرنے کا ایک طریقہ ہے آئیے ہم ایک اور مثال پیش کرتے ہیں تو حد کیا ہے جب
مائنس دو سے x مائنس 4 کو مربع جڑ x کے برابر x ہے f مائنس دو سے تقسیم ہوتا ہے تو یہاں فنکشن ہے تو یہاں ہمارے پاس یہ فنکشن
چار کے دائیں کے برابر نہیں ہے لہذا اگر میں ایک وقفہ x کے لئے بیان کیا گیا ہے جو صفر کے برابر ہے لیکن x تقسیم کیا گیا ہے یہ کسی بھی
لیتا ہوں اور کوئی وقفہ لیتا ہوں جس میں چار کے ارد گرد کوئی بھی وقفہ ہوتا ہے۔ منفی عدد منفی حقیقی اعداد پر مشتمل نہیں ہے پھر اس فنکشن کی
وضاحت کی گئی ہے اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ حد کیا ہے لہذا ہم اس فنکشن کی حد کے بارے میں بات کر سکتے ہیں لہذا نوٹ کریں کہ یہ دوبارہ
جمع دو یہ مربع کا جوڑ ہے۔ ایف ایکس حاصل کرنے کے لیے x ہے ہم آسان کر سکتے ہیں تاکہ ہم مربع جڑ سے ضرب اور تقسیم کر سکیں
جمع 2 اور اب اگر آپ x مائنس 2 گنا مربع جڑ x جمع 2 بذریعہ مربع جڑ x مائنس 4 گنا مربع جڑ x مائنس دو برابر ہے x جڑ uare
جمع 2 کے برابر ہے x مربع جڑ fx مائنس 4 ملے گا اور یہ اس کے ساتھ منسوخ ہو جائے گا۔ لہذا x ڈینومیٹر میں ضرب کریں گے تو ہمیں
x تک پہنچتی ہے تو اس فنکشن مربع جڑ 4 x کی حد جب f کی x کے برابر نہیں ہے۔ لہذا 4 x کے برابر سے بڑا ہے اور x 0 اگر
کے برابر چار ہوتا ہے تو یہ x جس میں چار کو چھوڑ کر f کا فنکشن x جمع 2 کی حد کے برابر ہے جو ہے جیسا کہ ایک چھوٹے وقفے میں
مربع جڑ چار جمع دو کے برابر ہے جو کہ دو جمع دو جو چار ہے تو یہ حد کے حساب کا ایک اور طریقہ ہے جب آپ حد حاصل کرتے ہیں عدد اور
ڈینومینیٹر دونوں صفر ہیں تو اگلا کیا ہوگا یہ تھیوری یہ سینڈوچ تھیوریم کہلاتا ہے یا کسی وقت اسے سکوز تھیوریم کہا جاتا ہے تو یہ کیا کہتا ہے

کے برابر x کے x کے برابر اور ایک انٹر میں تمام g کے x بڑا ہے f کا x کا ایک فنکشن ہے فرض کریں x کہ فرض کریں ہمارے پاس
h اور x کے g ان دو فنکشن fx کو چھوڑ کر ایک کے برابر ہو سکتا ہے تو فرض کریں کہ x ہے لیکن a جس میں val سے کم ہے۔ h
کہنے l کی حد کے برابر ہے اور دونوں ہیں h کی x کی حد g کی x کے درمیان ایک وقفہ میں ہے جس میں یہ بھی فرض ہے کہ x کے
کی حد جیسے f کی x کے برابر ہیں تو نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ پھر l کی حد دونوں h کے x اور g کے فنکشن x کے برابر ہے لہذا اگر
حق اگر آپ گراف استعمال کرتے ہوئے دیکھتے ہیں تو l کے قریب آتی ہے یہ موجود ہے اور یہ دوبارہ اسی حد کے برابر ہو جاتا ہے x a ہی
x کے h اور x کے g دو فنکشنز fx یہ کیا کہتا ہے کہ فرض کریں کہ آپ کے پاس ایک فنکشن ہے جو کہتا ہے کہ کسی وقفے میں یہ
x اور g کا x ہے اور ہمارے پاس f کا x کے درمیان ہے اور حد ایک ہی ہے تو اس صورت میں مجھے اس طرح کھینچنے دیں۔ ہمارے پاس
x کی حد f کی اگر وہ دونوں ایک ہیں تو g کے نچلے فنکشن x کی اس کی حد اور h کے اوپری فنکشن x ہے تو اس صورت میں کہ h کا
بھی ایک ہی ہے لہذا تبصرہ کریں کہ سینڈوچ تھیوریم کو ایپسیلون ڈیلٹا ڈیفینیشن کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیا جاسکتا ہے لہذا میں تجویز کروں گا
کہ طلباء اسے استعمال کرکے ثابت کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ اس تعریف کو لیکن ہم ثبوت کو چھوڑ دیں گے بلکہ وہ کہتے ہیں کہ یہ بہت اہم
ہے
اس لیے یہ تھیوریم کمپیوٹنگ کی حدود میں انتہائی مفید ہے تو کئی بار ایسا ہوتا ہے کہ جس فنکشن کی حد کو آپ شمار کرنا چاہتے ہیں وہ پیچیدہ ہو
سکتا ہے لیکن اگر آپ تلاش کر سکتے ہیں۔ ایک چھوٹا فنکشن اور ایک بڑا فنکشن اور آپ آسانی سے حدوں کا حساب لگا سکتے ہیں اور اگر حدیں ایک
جیسی ہیں تو اس کی بھی ایک ہی حد ہے لہذا ہم اس تھیوریم کو استعمال کرتے ہوئے ایک اہم حد دیکھیں گے تاکہ بطور ایپلیکیشن ہم فنکشن سائن کی
صفر کے قریب پہنچتا ہے یہ ایک کے برابر ہوتا ہے تو یہ حد کے لئے ایک بہت اہم x جیسے ہی x کے اوپر x اس حد کو ثابت کریں گے ۔
صفر پر ایک نوٹ کے برابر ہے کہ یہاں ہم یہ نوٹ استعمال نہیں کر سکتے کہ ہم اقتباس کا اصول استعمال x x کی حد sin x فارمولا ہے کہ
کو منسوخ کرتے ہیں x نہیں کر سکتے کیونکہ حد ڈینومینیٹر کا 0 ہے ہندسہ کی حد بھی 0 ہے اور یہاں ہمارے پاس کثیر الاضلاع نہیں ہیں کہ ہم
اور پھر اقتباس کے اصول کو استعمال کرنے کی کوشش کرتے ہیں بلکہ ہم کیا کریں گے کہ ہم ثابت کریں گے کہ یہ حد 1 کے برابر ہے استعمال
کرتے ہوئے سینڈویچ تھیوریم تو ایسا کرنے کے لیے کہ میں پہلے مجھے رداس ایک کا دائرہ کھینچنے دو تو میرے پاس ایک دائرہ ہے اور اس
ہے اور مجھے اس x ریڈین تو یہ ریڈین میں x دائرے کا رداس ایک ہے تو میرے پاس یہ ایک ہے یہ ایک ہے اور اب ہم ایک زاویہ کے برابر لیں
مثلث کو یہ کھینچنے دیں اور مجھے ان دو پوائنٹس کو جوڑنے دیں اور ہم اسے بھی بڑھا دیں گے اور پھر یہاں ایک کھڑا کھینچیں گے تو میں ان
x ہے رداس ایک کے دائرے پر غور کریں اور d ہے اور یہ c ہے۔ یہ b یہ نقطہ a یہاں o پوائنٹس کو نشان زد کرتا ہوں تاکہ میرے پاس
کو ریڈین میں ایک زاویہ ہونے دیں اور بائیں طرف کھینچے گئے اعداد و شمار پر غور کریں اب آئیے اس اعداد و شمار سے ایسا کرنے کی کوشش
کریں یہ واضح ہے کہ اگر میں علاقے کو دیکھتا ہوں تو رقبہ اتنا رقبہ مثلث اوب کا یہ سیکٹر سیکٹر اواب کے رقبے سے کم ہے جو کہ بڑے مثلث
کے رقبے سے کم ہے اور صحیح ہے تو ہمارے پاس یہ سیکٹر ہے یہ پورے دائرے کا ایک حصہ ہے اور یقیناً مثلث اوب یہ رقبہ کم ہے اس سیکٹر
کے رقبے کے مقابلے میں اور اس سیکٹر کو دوبارہ اس مثلث کے درمیان سختی سے رکھا گیا ہے۔ اشتہار تو ہمیں یہ ابھی ملتا ہے آئیے دیکھتے ہیں
کی لمبائی کے oa حق ہے جو bc گنا oa کہ یہ کون سے علاقے ہیں ہمارے پاس یہ اب تکون اواب کا رقبہ آدھے گنا کے برابر ہے ہیں
کا سائن سائن x کچھ نہیں ہے لیکن bc ہے تو یہ لمبائی x کیا ہے تو نوٹ کریں کہ یہ زاویہ bc نصف کے برابر ہے ایک یہ ہے ایک لمبائی
x صحیح نشانی x تقسیم ہے bc کی سائن x کے برعکس اور فرضی کا تناسب ہے جو یہاں ایک ہے لہذا x صحیح نشانی by one
So bc برابر ہے sine x تو یہ نصف گنا ایک گنا sin x ہے تو ہمیں مثلث o ab کا رقبہ آدھے سائن x کے برابر ہے اب سیکٹر oab
دائرے کے کل x کے سیکٹر کا رقبہ کیا ہے تو سیکٹر کا رقبہ رقبہ کے تناسب میں ہے زاویہ کے تناسب میں ہے لہذا ہمارے پاس زاویہ ہے
زاویہ کے حق میں ہم دائرے کا پورا pi سے دائرے کے رقبے میں تقسیم کیا گیا دو pi کو دو x ریڈین ہے لہذا pi زاویہ سے تقسیم دو
رقبہ حاصل کرتے ہیں
سے t کے برابر ہے تقسیم x سے دائرے کے رقبے میں تقسیم کیا جائے تو یہ pi کو دو x زاویہ کے لیے ہم حاصل کرتے ہیں x اس لیے
x دیتا ہے لہذا سیکٹر کا رقبہ آدھا x اوقات کا رداس ایک مربع ہے لہذا یہ مجھے صرف نصف pi کا رقبہ کچھ نہیں بلکہ wo pi دائرے کا
میں تصویر times oa times ad کا رقبہ بھی درکار ہے تو یہ دوبارہ صحیح زاویہ مثلث ہے اور رقبہ آدھا ہے oad ہے اور ہمیں مثلث
گنا اشتہار اس مثلث اوڈ میں اشتہار کی لمبائی کتنی ہے اگر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ بنیاد oa دوبارہ دکھاتا ہوں تاکہ مثلث اوڈ کا رقبہ آدھا گنا ہے
یہ آدھا ٹین tan x بار اشتہار کے برابر ہے تاکہ آدھا گنا ایک بار oa کی ہے تو یہ نصف گنا tan x لمبائی ایک ہے تو یہ مخالف سمت لمبائی
کے لئے ہمارے پاس مثلث اواب کا رقبہ نصف سائن ہے x دو کے درمیان کسی بھی pi by ہے تو ہمیں جو ملتا ہے وہ یہ ہے کہ صفر سے x
کے لئے درست ہے جو x صحیح یہ ہر زاویہ x سے بھی کم ہے ٹین x ہے جو کہ نصف x سیکٹر کے رقبہ سے کم ہے جو کہ نصف x
کے pi صفر اور x سے پورے حصے کو تقسیم کرتے ہیں اگر x کے درمیان دو سے ہے اب ہم کیا کرتے ہیں کہ ہم نشانی pi صفر اور
مثبت ہے لہذا اس سے تقسیم کرنے سے ہمیں جو ملتا ہے تو پہلے مجھے اس نصف کو منسوخ کرنے دو اس میں سے ہر x درمیان ہے دو گناہ
x جو کہ ٹین x سے کم ہے سائن x سے تقسیم کرنے پر ایک x سے کم ہے اور پھر سائن x سے کم ہے ٹین x x x ایک سے ہمیں سائن
کے ایک کے برابر ہے تو نتیجہ وہی ہے جو ہم cos x تو یہ cos x تقسیم ہے۔ بذریعہ x سائن x سے لیکن ٹین x سے کم ہے تقسیم سائن
کے درمیان pi کے لئے صفر اور x کے کوزائن سے ایک سے کم ہے ہر x جو x بذریعہ سائن x سے کم x حاصل کرتے ہیں تو ایک ہے
sine x x x دو سے ہے اب اگر ہم اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر میں باہمی طور پر لیتا ہوں تو عدم مساوات میں تبدیلی آتی ہے لہذا ہمیں ملے گا
سے 2 صحیح ہے تو یہ ایک بہت اہم عدم مساوات ہے تو ہمیں یہ ملا ہے کہ pi سے کم x x سے بڑا ہے تمام 0 cos x سے بڑا ہے جو
سے کم ہے x سے دو pi سے کم ہے تو x سے کم ہے جو کہ ایک سے کم ہے اگر صفر x x x x x میں اسے دوبارہ لکھوں کیونکہ
x اور ایک cos x کے درمیان ہے sin x x x کی حد ہم نے کیا کیا ہم نے پایا کہ sin x x x صحیح جو ہم تلاش کر رہے تھے وہ ہے
x مائنس cos x سے بدل دوں تو ہم نوٹ کریں کہ x کو مائنس x کے درمیان ہے اسی طرح اگر میں pi by two کے درمیان صفر اور
sin x سے تقسیم کیا گیا ہے کیونکہ گناہ ایک عجیب فعل ہے یہ مائنس x کے سائن کو مائنس x اور مائنس cos x کی x کچھ نہیں ہے مگر
بھی x دونوں ہوتے ہیں ۔ sin x اور cos x کے برابر ہوتا ہے جو کہ x x x سے تقسیم کیا جاتا ہے جو کہ دوبارہ گناہ x کو مائنس
مثبت ہے لہذا ہمارے پاس یہ عدم مساوات ایک ہے لہذا ایک سے عدم مساوات درحقیقت مائنس پائی x منفی ہے تو مائنس x فنکشنز ہیں لہذا اگر
بائی ٹو سے پائی بائی ٹو کے درمیان کسی بھی ایکس کے لئے درست ہے لہذا اب ہمیں ایک وقفہ ملا ہے۔ صفر پر مشتمل ہے جس میں ہمارے پاس
کی حد cos x سے بڑا ہے اور ایک سے کم ہے اب ہمیں صرف یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ x x x cos x یہ عدم مساوات ہے کہ گناہ
کے برابر ہے cos تک پہنچتا ہے یہ صرف 0 کے 0 x کی حد cos کی x تک پہنچتا ہے کیونکہ 0 x کیا ہے اور 1 کی حد کیا ہے کیونکہ
صفر تک پہنچتے ہی یہ بھی ایک کے x x x جو 1 ہے اور یقیناً مستقل فعل ایک کی حد سینڈوچ تھیوریم کے مطابق ایک کے برابر ہے حد کا نشان
کے درمیان بانڈ کر کے جن کی حدوں one اور cos x برابر ہے لہذا ہم نے ثابت کیا ہے کہ یہ حد ایک کے برابر ہے اس فنکشن کو دو فنکشنز
کا حساب لگانا آسان ہے اور پھر ہم جانتے ہیں کہ یہ حد بھی 1 کے برابر ہے۔ لہٰذا یہ حد کے لیے ایک بہت اہم فارمولا ہے اور آپ اس کو استعمال
،کرتے ہوئے بہت سی حدود کا حساب لگا سکتے ہیں
کے برابر لکھتا ہوں تو یہ نوٹ x x x کی حد tan x اس لیے ہم اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے کچھ مثالیں دیں گے، تو ایک یہ ہے۔ میں

کی x x x x کے برابر نہیں ہے اور ہم گناہ 0 x x x x x x x x x x x x sine یہ برابر ہے tan x x x x کریں کہ
tan x x x کی حد سے ایک ہے تو یہ بھی ایک ہے تو cos x کے برابر ہے یہ cos x حد جانتے ہیں یہ 1 کے برابر ہے اور ایک کی حد
سے تقسیم کرنے کی یہ x کو cos x کی مصنوعات کے اصول کی حد کے لحاظ سے یہ بھی ایک دوسرے کے برابر ہے ایک اہم حد ایک مائنس
پر جاتا ہے ڈینومینیٹر کی حد 0 ہے عدد کی حد دوبارہ 1 مائنس 1 ہے جو 0 ہے اور ہم اس x 0 حد کیا ہے تو یہاں ہمارے پاس یہ ہے کہ جیسے
حد کو شمار کرنا چاہتے ہیں
cos of 2a کا اظہار زاویہ کے نصف حصے کی سائن کے لحاظ سے کر سکتے ہیں لہذا cos اس لیے مثلثیات سے یاد کریں ہم زاویہ کی
a اسکوائر sin جو کہ ایک مائنس ٹو a مائنس سائن اسکوائر a مربع ht cos cos کا aبرابر ہے 1 مائنس 2 سائن مربع ایک رگ کے 2
کچھ نہیں بلکہ دو گنا سائن اسکوائر cos x کے برابر ہے لہذا ایک مائنس a ہے دو سائن اسکوائر a ٹو cos کے برابر ہے تو یہ ایک مائنس
x یہ دو سائن مربع cos x x x ہے تو ایک مائنس x دو ڈنومینیٹر x x مربع sin کا دو سے عدد اس طرح دو گنا کے برابر ہے x ہے
x کی سائن کے برابر ہے دو سے تقسیم x صفر کے برابر نہیں ہے اور پھر ہم کیا یہ لکھ سکتا ہے یہ x اگر x کے برابر ہے دو سے تقسیم
کی x حاصل کرتا ہوں اس لئے 2 x سے دائیں میں نے صرف اس 2 کو ڈنومینیٹر میں لایا ہے لہذا میں یہاں 2 x کا ایک اور نشان x دو بار
x دو گنا x x کے صفر پر جاتا ہے دو سے x کی حد کے برابر ہے جو سائن x یہ cos x x x حد ایک کے صفر پر جائے گی۔ مائنس
x x x کی وہ حد x صفر پر جاتا ہے بشرطیکہ یہ دونوں حدیں موجود ہوں تو اب ہم کیا جانتے ہیں کیا سائن x کی سائن کی حد کو دو سے
ڈالیں تو برابر y دو سے اگر ہم x دو سے تقسیم x کی سائن x صفر کے قریب پہنچتی ہے جو کہ ایک کے برابر ہے یہاں ہمارے پاس جو ہے
x سائن x کا نصف ہے لہذا یہ حد x y بھی صفر کی طرف جاتا ہے کیونکہ y صفر کی طرف جاتا ہے x دو سے دو پھر جیسا کہ x ہے
ہے صفر کے قریب پہنچنا اور یہ حد ہم جانتے ہیں y کے برابر ہے جہاں y کی حد y دو سے تقسیم سائن x کے صفر پر جاتی ہے دو سے
کے 0 سے 2 تک جا رہی ہے یہ 0 کے سائن کے برابر ہے جو کہ 1 ہے جو کہ صفر ہے اس لئے x کی سائن x ایک ہے اور یقیناً دوسری حد
x x جا کر صفر سے یہ صفر کے برابر ہے لہذا ہم نے مثلثی افعال کے لحاظ سے تین حدیں دیکھیں ایک سائن xx کی حد cos x ایک مائنس
جو صفر x کی حد cos x کی اس حد کو استعمال کرنا بھی ایک ہے اور ایک مائنس x x x کی حد ہے کیونکہ صفر ایک ہے اور صفر پر x
سے تقسیم کیا جائے تو x کے ٹین کی حد کیا ہے جس کو سائن تین x کے برابر ہے تو ان فارمولوں کا استعمال کرتے ہوئے کچھ اور مثالیں تو دو
x سے ضرب دیں اگر x سے تقسیم کرکے لکھ سکتے ہیں اور پھر اسے دو x کو دو x ہم کیا کر سکتے ہیں کہ یہ اس کے برابر ہے ہم ٹین دو
لکھا جا x کو سائن تھری x کے طور پر لکھ سکتا ہوں اسی طرح سائن تھری x دو x سے دو x کو ٹین دو x صفر نہیں ہے تو میں ٹین دو
صفر نہیں ہے تو x اگر x تین x x صفر پر جاتا ہے اب اس ایک میں دو x اور پھر ہمارے پاس حد ہے کیونکہ x سے تین x سکتا ہے۔ تین
صفر کے قریب آتا ہے۔ یہ کسی بھی y جانتے ہیں جیسے ہی y بذریعہ y کی حد کو tan y کو منسوخ کر سکتا ہوں اور پھر ہم x میں اس
صفر کے قریب پہنچتا ہے وہ بھی ایک ہے لہذا یہ مستقل کے برابر ہے حد سے نکالا جا y جیسے ہی y بذریعہ y کی ایک حد ہے y نشانی
سے تقسیم x کو تین x سے تقسیم اور پھر حد سے تقسیم شدہ سائن تین x دو x کی دو تہائی حد صفر ٹین پر جاتی ہے دو x سکتا ہے لہذا
کی حد گناہ x کیا گیا جو کہ دو تہائی کے برابر ہے ہم نے دیکھا ہے کہ دونوں حدیں ایک ہیں تو یہ دو تہائی کے برابر ہے ایک اور مثال تلاش کریں
پر جا رہا ہے x کا یہ نشان یہ صفر x سے تقسیم بہت سے طلباء یہ سوچ کر غلطیاں کرتے ہیں کہ تین x کو x کے صفر پر جائے گی تین
کی حد 1 کے برابر ہے لیکن یہ حد 1 کے برابر نہیں ہے کیونکہ یہاں کیا ہے ہمیں x x x بھی صفر پر جا رہا ہے اور ہم نے دیکھا ہے کہ گناہ
سے تقسیم اگر میں x صفر پر جانے والے گناہ تین x یہ کرنا ہے کہ ہمیں ایک ہی چیز کو استعمال کرنے کی ضرورت ہے لہذا ہم لکھتے ہیں حد
میرے اندر جو بھی نشان ہے میں اس سے تقسیم کر رہا ہوں کہ یہ حد 1 کے برابر ہے اور پھر مجھے ایک ہی فنکشن re لکھوں تو وہ x تین
جو سائن xحاصل کرنے کے لیے اس کو 3 سے ضرب کرنا ہوگا تو یہ حد اس حد کے برابر ہے اور اب چونکہ میں اسی سے تقسیم کر رہا ہوں۔ 3
کے صفر y کی حد کے برابر ہے جو y کے اندر ہے تو میں آسانی سے لکھ سکتا ہوں یا اگر آپ چاہیں تو آپ ایک اور قدم لکھ سکتے ہیں یہ 3x
میں y اور پھر یہ ہے تین کے برابر ہے لہذا یہ اچھا خیال ہے کہ اسے کسی اور متغیر x برابر ہے تین y ضرب تین اور جہاں y سائن پر
کا فارمولہ استعمال کریں تو کم از کم شروع میں آپ کو اس غلطی سے بچنے کے لیے ایسا sine y by y تبدیل کرنا پسند کریں اور پھر وہ
سے محدود کرنا صفر پر جانا یہ ایک کے برابر ہے یہ غلط ہے تو اگلی چیز جس کے xx کو x کرنا چاہیے کہ یہ برابر نہیں ہے۔ سائن تھری
fx صرف ایک مثال سے وضاحت کروں گا تو فرض کریں کہ آپ ii بارے میں ہم بات کریں گے وہ ہے جسے ہم لامحدود حدود کہتے ہیں لہذا
بن جاتا x a صفر کے برابر نہیں ہے لہذا یہ فنکشن اگر آپ دیکھتے ہیں کہ ہم 0 کے قریب آتے ہیں تو x کے لئے x کو برابر سمجھتے ہیں۔
کے لئے ہمارے پاس یہ x بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے لہذا اس فنکشن کا گراف یہ مستطیل ہائپربولا ہے اور منفی x ہے۔ چھوٹا مثبت نمبر 1 بذریعہ
صفر مائنس x بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے اور جیسا کہ x جمع کرتا ہے اس کا مطلب ہے دائیں 1 سے x 0 منفی ہے تو کیا ہوتا ہے کہ x ہے
بڑا منفی نمبر بن جاتا ہے لہذا ہم اس کی مزید x کی طرف جاتا ہے اس کا مطلب ہے کہ بائیں سے اگر آپ صفر کے قریب آتے ہیں تو ایک بذریعہ
جب دائیں سے 0 تک پہنچتا ہے تو x بذریعہ x سختی سے وضاحت کریں گے لیکن ہم کیا کہتے ہیں ایسی صورتوں میں ہم 1 کی حد کہتے ہیں۔
تک جاتی ہے یہ منفی انفینٹی کے برابر ہے لہذا اس کا سیدھا مطلب ہے کہ x کی حد 0 مائنس 1 سے x یہ مثبت لامحدودیت کے برابر ہے اور
ایک بڑا منفی نمبر بن x x ایک چھوٹا منفی نمبر ہے تو 1 x ایک بڑا مثبت نمبر بن جاتا ہے اور اگر x x ایک چھوٹا مثبت نمبر ہے تو 1 x اگر
جاتا ہے لہذا ہم اس علامت کو مثبت لامحدودیت اور منفی لامحدودیت کو صرف یہ کہنے کے لئے استعمال کرتے ہیں کہ اگلی کلاس میں میں اسے
مثبت لامحدودیت یا منفی لامحدودیت ہے اور پھر ہم int مزید سخت بناؤں گا اور اس کی وضاحت کب کروں گا۔ ہم کہتے ہیں کہ ایک پو میں حد
کچھ اور مثالیں دیکھیں گے لہذا اگلی کلاس میں ہم اس حد کو مثبت انفینٹی اور منفی لامحدود ہونے کے بارے میں مزید رجعت کریں گے اور پھر ہم
اس پر کچھ اور مثالیں دیکھیں گے شکریہ ۔