ہیلو سب کو
تو آج حدود پر پہلا لیکچر ہے لہذا آج میں بتاؤں گا کہ حدود سے ہمارا کیا مطلب ہے لہذا حدود بہت اہم تصورات ہیں اور یہ پورے کیلکولس کی
ریڑھ کی ہڈی کی حیثیت رکھتا ہے لہذا یہ آپ کے لئے بہت اہم باب ہے ۔ میں حد کی تعریف کے ساتھ شروع کرتا ہوں
کے برابر x کے برابر ہوتا ہے سوائے ممکنہ طور پر x ایک فنکشن ہے جس کی وضاحت ایک وقفہ پر ہوتی ہے جس میں f تو فرض کریں کہ
کے a
کی طرف ہوتا ہے لہذا اس کے لئے اشارے ہم a x کی حد سے ہمارا کیا مطلب ہے جیسا کہ f کے فنکشن x تو ہم یہ بیان کرنا چاہیں گے کہ
f کی x کی طرف ہوتا ہے یہ a فنکشن کے f کے x کا رجحان x کی حد لکھتے ہیں جیسا کہ lim استعمال کریں گے اس حد کے لئے ہم
کی طرف af کے x x غیر رسمی طور پر ہوتا ہے۔ اس کا کیا مطلب ہے باضابطہ طور پر اعضاء کی حد x کی حد کو ظاہر کرتا ہے کیونکہ
a کو چھوڑ کر x کو انتخاب کیا جاتا ہے کہ یقیناً پوائنٹ x کے قریب ہے اگر l من مانی طور پر fx ہے اس طرح کہ l جاتا ہے اصل نمبر
کے برابر ہے
کے قریب ہے a کے قریب اور کافی حد تک l تو میں وضاحت کرتا ہوں۔ اس اربی سے ہمارا کیا مطلب ہے۔ ٹرائیلی طور پر
ہے اور یہ فنکشن کچھ اس طرح ہے اس کی تعریف نہیں کی x کے برابر a تو فرض کریں کہ میرے پاس ایک فنکشن ہے اور ہمارے پاس یہاں
جاسکتی ہے لہذا اگر ہم اس تعریف کو دیکھیں
کے قریب ہو l کی قدر fx اس طرح کہ اگر آپ چاہتے ہیں کہ l کی طرف مائل یہ ہے یہ نمبر a کے طور پر ہے۔ x کی حد fx تو
جتنی آپ چاہتے ہیں
ہو l اس وقفے میں ہو جس میں اس پوائنٹ x کا f تو فرض کریں کہ میں چاہتا ہوں کہ میرا
کا انتخاب کرتا ہوں x تو اس تصویر سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر میں اس وقفہ میں جھوٹ بولنے کے لئے اپنے
اس وقفہ میں جھوٹ ہے x یہاں سے تعلق رکھتا ہے x تو اگر
نہ ہو l اس وقفہ میں جھوٹ بولتا ہوں میں اس وقفہ کو کہتا ہوں جیسا کہ میں وقفہ میں جھوٹ بولتا ہوں لہذا اگر ایسا کوئی f کا x تو
ہے l کی طرف ہوتی ہے یہ موجود نہیں ہے اور اگر ایسی a f کی حد xx تو ہم کہتے ہیں کہ
کے برابر ہے لہذا مثال کے طور پر اگر میں اس فنکشن کو دیکھتا ہوں l تو ہم کہیں گے کہ حد
ہے۔ e کے لیے صفر کے برابر ہے اور یہ x جو 0 سے کم f کا یہ فنکشن x تو مجھے ایک مثال لکھنے دیں فرض کریں کہ میرے پاس ہے
0 سے بڑے x کے لیے 1 کے لیے qual
صفر کے برابر ہے x صفر سے کم ہے اور یہ ایک ہے اگر x صفر کے برابر ہے اگر fx تو یہ فنکشن
تو اب یہاں اگر آپ دیکھتے ہیں
کی حد ہوتی ہے۔ موجود ہے f کی x کے قریب پہنچتے ہی 0 x تو
سے لے کر کسی بھی وقفہ میں 0 پر مشتمل ہے b کو x اپنے [Music] i تو اس صورت میں اگر آپ دیکھتے ہیں کہ اگر
کے لئے چاہے وہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو۔ کیا یہ صفر x کی قدر 1 ہے اور کسی بھی منفی f کی x کے لئے ہم جانتے ہیں کہ x تو مثبت
کے برابر ہے
ہمیشہ صفر fx صفر سے کم کے لئے x ایک کے برابر ہے اور fx کے لئے x تو اس معاملے میں جواب نہیں ہے کیونکہ صفر سے بڑا
کی کوئی قدر ہماری ضرورت کو پورا نہیں کرے گی لہذا اس کا تصور بھی موجود ہے۔ یک طرفہ حدیں l ہے لہذا
تو اس معاملے میں میں یک طرفہ حدود کی وضاحت کرتا ہوں
تو دو ہیں ایک کو بائیں ہاتھ کی حد کہا جاتا ہے اور دوسرا دائیں ہاتھ کی حد ہے
تو بائیں ہاتھ کی حد کیا ہے
کے طور پر استعمال کرے گا۔ مائنس کی طرف جاتا ہے اس کا مطلب ہے کہ یہاں ہم فنکشن کو دیکھ x کی اشارے کی حد کو f کی x تو یہ
رہے ہیں
کے لئے صفر ہے x کے لئے 1 اور صفر سے کم x تو مجھے دوبارہ دو اس مثال سے وضاحت کریں تاکہ فنکشن صفر کے برابر 0 سے زیادہ

x صفر کے برابر سے زیادہ بائیں طرف ہاتھ کی حد کی حد x صفر سے کم ایک کے لئے x کے لئے صفر کے لئے fx تو اس صورت میں
صفر کے برابر ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ اگر میں اس وقفہ میں اس نقطہ کے بائیں طرف کوئی نقطہ لیتا ہوں x کے f صفر کے مائنس کے
کے l ایک مائنس کی طرف جاتا ہے یہ x جیسا کہ fx یکساں طور پر 0 کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ کی حد مجھے لکھنے دیں اتنی حد fx تو
کے بائیں طرف کافی چھوٹا کھلا وقفہ a دو جھوٹ کو منتخب کر کے x کے قریب کر سکتے ہیں l کو من مانی طور پر fx برابر ہے اگر ہم
کی حد x کے لیے کچھ ڈیلٹا مثبت اسی طرح ہم دائیں ہاتھ کی حد کی وضاحت کر سکتے ہیں اسے a ہے جو ایک مائنس ڈیلٹا کی شکل میں ہے۔
کا x کے اتنا قریب بنایا جا سکتا ہے جیسا کہ ہم l کو fx کے برابر ہے اگر l پر جانے سے یہ f کے جمع x سے ظاہر کیا جاتا ہے
سے پلس کا ایک چھوٹا سا وقفہ ڈیلٹا a انتخاب کرکے چاہتے ہیں فارم
کے دائیں جانب وقفہ میں فنکشن کی قدر پر غور کر رہے ہیں جب کہ بائیں ہاتھ کی حد a تو اسے دائیں ہاتھ کی حد کہا جاتا ہے کیونکہ ہم صرف
کے بائیں جانب فنکشن a کی قدروں میں دلچسپی ہے۔ کہ بائیں ہاتھ کی حد کے لیے صرف x کے لیے ہمیں سو نوٹ کے بائیں جانب وقفہ میں
کی قدر بھی اہم نہیں f کی a کی قدریں اہم ہیں اور fx کے دائیں جانب a کی قدریں اہم ہیں اور اسی طرح دائیں ہاتھ کی حد کے لیے صرف
پر x کے دائیں ہاتھ کی حد کو f پر یا a کی بائیں طرف کی حد کو f کی x کی حد ہے یا x ہے۔ حدود کو جاننے کے مقصد سے کہ آیا یہ
محدود کرنا ہے
کے برابر ہے اگر اور صرف اس صورت میں l کے قریب آتا ہے یہ a x پر جیسے ہی x کی حد f کی x تو ایک اور تبصرہ یہ ہے کہ
پر موجود ہوں l کے برابر r اور a کے برابر x جب بائیں ہاتھ کی حد اور دائیں ہاتھ کی حد دونوں
کے برابر ہیں۔ l so fo تو حد موجود ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب بائیں ہاتھ کی حد اور دائیں ہاتھ حد دونوں موجود ہیں اور دونوں
کے لئے 1 کے لئے برابر 0 سے زیادہ اگر ہم حساب کریں x کے لئے 0 سے کم اور x برابر ہے 0 کے لئے f کی x مثال کے طور پر r
پر جانے f کے صفر جمع x کی حد x جانے والی بائیں ہاتھ کی حد یہ واضح طور پر صفر کے برابر ہے اور fx کی حد صفر مائنس x
کے صفر f کی x سے یہ ایک کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ کی حد اور دائیں ہاتھ کی حد دونوں صفر پر موجود ہیں لیکن چونکہ وہ برابر نہیں ہیں
کے برابر نہیں ہے x پر جانے والی حد کی حد
تو ٹھیک ہے ہم کر سکتے ہیں صورت یہ ہے کہ بائیں ہاتھ کی حد بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ کی حد بھی موجود نہیں ہے
تو پچھلی مثال میں ہم نے دیکھا کہ بائیں ہاتھ کی حد اور دائیں ہاتھ کی حد موجود ہے لیکن وہ برابر نہیں ہیں لہذا حد موجود نہیں ہے لیکن کیا ہم یہ
معاملہ کر سکتے ہیں؟
صفر کے برابر نہیں ہے x کے لیے sine of 1 by x کے برابر ہے کہنے کے لیے fx تو آئیے اس پر غور کریں

موجود ہے fx کے صفر پر جانے کی حد ہے جمع X تو
کے ایک کے سائن کے برابر ہے x ہے اس کی تعریف f کا x کی وضاحت کر رہے ہیں اور f کے x غیر صفر کے لیے x تو ہم تمام
n کے برابر ہے اگر میں x کے تمام x کے برابر ہے فارم 0 x لہذا اگر آپ اس فنکشن کا گراف کھینچتے ہیں۔ نوٹ کریں کہ سائن 1 بذریعہ
x کے تمام عددی عدد پر 0 ہے لہذا اگر میں لوں pi ایک قدرتی نمبر ہے صحیح ہم جانتے ہیں کہ نشان n کے اوپر ایک لیتا ہوں جہاں pi
جمع n 2 x برابر ہے 1 x کی سائن ہے جو 0 دائیں کے برابر ہے اور اگر pi n x x برابر 1 x x پھر سائن 1 pi n x مساوی 1
دو pi x ایک
کے حق کے برابر ہے n جمع ایک پائی بائی دو کے سائن کے برابر ہے جو کہ مائنس ون کی طاقت n یہ دو x تو سائن ایک بائے
بھی ہے n تو اگر
طاق ہے n تو ہمیں ایک ملے گا اگر
لیتا ہوں x کا تعلق ہے وقفہ یوں کہئے کہ اگر میں وقفہ میں 1 بذریعہ x تو ہمیں مائنس ون ملے گا اگر میرا
2 تو کہتا ہوں کہ n pi سے دو n pi جمع pi by two
x ایک بائے fx کے برابر sin پھر by two n pi جمع pi by two to one by two n pi وقفہ میں ایک x تو یہ ہے
کی قیمت 0 سے 1 تک لیتا pi x 2 sine پلس n pi سے n pi 2 صفر اور ایک دائیں کے درمیان تمام قدریں لیتا ہے کیونکہ وقفہ میں دو
پھر یہ مائنس ون سے ایک pi سے لیتا ہوں n ہے حقیقت میں اگر میں 2 مائنس pi by two to two n pi plus pi by two
تک تمام قدریں لیتا ہے
x برابر ہے سائن کے کی ایک بذریعہ fx کا گراف کھینچنے کی کوشش کریں گے اور پھر میرے پاس x تو ہم کیا دیکھتے ہیں کہ اگر آپ ہم اس

تو اگر میں دائیں ہاتھ کی حد میں دلچسپی رکھتا ہوں
تو مجھے اس فنکشن کی قدر کو اس کے دائیں طرف دیکھنے کی ضرورت ہے لہذا اگر آپ دیکھیں کہ کیا میں کچھ ایک بائے ٹو این پی لیتا ہوں اور
میں کہتے ہیں کہ یہ i have zero in پھر اس کی قدر مختلف ہوتی ہے pi جمع pi by two پھر میرے پاس ایک بائے دو این ہے۔
ایک ہے
پر یہ دوبارہ صفر ہو جاتا ہے اور پھر یہ ایک بار پھر n pi جمع pi تو یہ تمام ویلیوز کو صفر سے ایک تک لے جاتا ہے اور پھر ایک سے دو
مائنس ون پر جاتا ہے پھر یہ دوبارہ ایک پر جاتا ہے
کے قریب جاتے ہیں یہ دوبرتا رہتا ہے x تو جیسے جیسے آپ صفر کے برابر
صفر پر مشتمل کسی بھی وقفہ میں مائنس ون اور ون کے درمیان گھومتا رہتا ہے اس طرح اگر میں دائیں ہاتھ کی حد کو fx تو کیا ہوتا ہے فنکشن
اس فنکشن کے لیے موجود ہے ot کرتی ہے۔ n دیکھ رہا ہوں اس فنکشن کا یہ موجود نہیں ہے اسی طرح بائیں ہاتھ کی حد بھی
تو اب تک آج میں نے فنکشن کی حد کے بارے میں کچھ بدیہی تصور دیا ہے اب اس کے بعد میں ریگریس ڈیفینیشن دینے کی کوشش کرتا ہوں اس
لیے اسے حد کی ایپسیلون ڈیلٹا ڈیفینیشن بھی کہا جاتا ہے
کے برابر ہوتی ہے اگر کوئی ایپیلون مثبت دیا l کی طرف ہوتی ہے اور یہ a کی وہ حد f کی x تو ٹھیک ہے اس لیے تعریف ہم کہتے ہیں۔
جائے
تو اگر آپ کوئی حقیقی نمبر ایپسیلون لیں جو مثبت ہے
ڈیلٹا a مائنس mod x کو اس طرح لائن بنانا ہے کہ اگر x تو ایک حقیقی عدد ڈیلٹا موجود ہے جو کہ مثبت بھی ہے جیسے کہ اگر میں لیتا ہوں
سے کم اور صفر سے بڑا ہے
یہ ایپسیلون سے کم ہونا چاہئے آئیے میں ان چیزوں کو اجاگر کرتا ہوں لہذا میں اسے گراف کے ذریعہ دوبارہ l کا موڈ f مائنس کا x تو
ہے لہذا جیسا کہ l کے برابر ہے اور ہمارے پاس کچھ فنکشن ہے اب ہمارے پاس یہ f کے y x ہو۔ اور x سمجھاتا ہوں تاکہ ہمارے پاس
کے برابر پہنچتا a کو بائیں یا دائیں طرف سے x ہم نے پہلے وضاحت کی ہے کہ حد وہ قدر ہے اگر یہ اس طرح موجود ہے کہ اگر میں اس
ہوں
l من مانی طور پر اس نمبر کے قریب ہو جاتا ہے tion تو فنک کی قدر
کے درمیان ہو epsilon جمع l مائنس ایپسیلون سے f l کا میرا x تو فرض کریں کہ میں چاہتا ہوں کہ
کیا اس کھلے وقفے میں مائنس ڈیلٹا سے x تو میں ایک ڈیلٹا اس طرح کا انتخاب کر سکتا ہوں کہ اگر یہ مائنس ڈیلٹا سے پلس ڈیلٹا ہے اگر میرا
کے برابر ہو x پلس ڈیلٹا ہے سوائے اس کے کہ ممکنہ طور پر
اس وقفہ میں پڑے گا اگر آپ ایپیلون کو پوائنٹ ون کے برابر لیتے ہیں f کا میرا x تو
پلس پوائنٹ ون l مائنس پوائنٹ ون سے l تو ہوسکتا ہے کہ یہاں مائنس ڈیلٹا سے پلس ڈیلٹا تک کافی چھوٹا وقفہ ہو جس کے لیے فنکشن ویلیو
کے درمیان ہے اب اگر آپ اس ایپیلون کو چھوٹا بناتے ہیں
تو پوائنٹ صفر ون کہتے ہیں۔ پھر بھی ایک اور ڈیلٹا ممکنہ طور پر پچھلے ڈیلٹا سے چھوٹا ہے جیسا کہ اگر میں یہاں منتخب کرتا ہوں
پر ep جمع پوائنٹ صفر ایک کے درمیان ہے لہذا یہ حد کی تعریف ہے لہذا تبصرہ ڈیلٹا عام طور پر l مائنس پوائنٹ صفر ایک سے l تو پھر یہ
لہذا اگر آپ ایپسیلون کو چھوٹا بناتے ہیں silon منحصر ہوتا ہے۔
کی حد کیا ہے f کی x مربع کہنے کے برابر ہے اور پھر x کو fx تو ڈیلٹا کو چھوٹا کرنا پڑ سکتا ہے لہذا ایک مثال پر غور کریں کہ فنکشن
کے قریب پہنچتا ہے 0 x جب
تو اگر آپ اس فنکشن کو دیکھتے ہیں
تو یہ بہت ہے۔ سادہ یہ ایک پیرابولا ہے لہذا یہاں اگر آپ بائیں ہاتھ کی حد دیکھتے ہیں اگر آپ اس فنکشن کو بائیں طرف سے دیکھیں
تو یہ اس پوائنٹ کے قریب آرہا ہے جو صفر ہے اور دائیں طرف سے دوبارہ اگر آپ قریب آتے ہیں
تو یہ صفر کے قریب تر ہوتا جارہا ہے لہذا گراف سے بدیہی طور پر یہ واضح ہے کہ حد صفر ہے آئیے ہم ایپسیلون ڈیلٹا کی تعریف کا استعمال
کرتے ہوئے اسے ثابت کرنے کی کوشش کرتے ہیں اس میں آپ کو کیا کرنا ہے اگر آپ کو ایک ایپیلون دیا جائے
تو آپ کو بتانا ہوگا کہ ڈیلٹا کیا ہے ایسی حالت مطمئن ہیں
کوئی بھی مثبت نمبر ہے جو ہم چاہتے ہیں ہمیں ایک ڈیلٹا پازیٹیو چاہیے جیسے کہ اگر میرا موڈ epsilon تو ہم اس کے ساتھ شروع کرتے ہیں
میں لکھوں
ہم دعوی کر f مائنس کا میرا x سے بڑا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ s ہے 0 اگر یہ ڈیلٹا سے کم ہے اور 0 اس a مائنس 0 x تو یہاں
ڈیلٹا سے کم اور صفر سے زیادہ ہے mod x رہے ہیں کہ حد 0 ہے یہ ایپسیلون سے کم ہونا چاہئے یعنی اگر
مربع کا موڈ ایپلون سے کم ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ اب اگر ایکس کا موڈ ڈیلٹا سے کم ہے x تو اس کا مطلب یہ ہونا چاہئے کہ
تو ایکس اسکوائر کا موڈ ڈیلٹا اسکوائر سے کم ہونا چاہیے، لیکن ہم چاہتے ہیں کہ میرا موڈ ایکس اسکوائر ایپسیلون سے کم ہو، اس لیے اگر ہم چاہتے

Prutor@IITK

ہیں کہ ایکس اسکوائر کا موڈ ایپیلن سے کم ہو۔ لہذا اگر ہم ڈیلٹا کا انتخاب ایپسیلن کے مربع جڑ کے برابر کرتے ہیں
تو موڈ ایکس ڈیلٹا سے کم ہے اس کا مطلب ہے کہ ایکس مربع کا موڈ ڈیلٹا مربع سے کم ہے جو ایپسیلون کے برابر ہے اور ڈیلٹا یقینا مثبت ہے اگر
ایپیلون مثبت ہے
ڈیلٹا کی تعریف یہ x تو ایپسیلن کی تعریف سے x جیسا کہ 0 مربع کی اس حد کی پیروی کرتی ہے x پر جاتا ہے اس کا صفر ہونا ضروری ہے
لہذا یہ بہت آسان مثال تھی لیکن یہ صرف یہ بتانے کے لئے تھا کہ ہم اس ایپیلون ڈیلٹا کی تعریف کو یہ ثابت کرنے کے لئے کس طرح استعمال
کرتے ہیں کہ حد کچھ نمبر کے برابر ہے ٹھیک ہے اس کے بعد ہم کیا کریں گے کہ ہم حد کی کچھ خصوصیات دیکھیں گے
تو حد کی کچھ خصوصیات دیکھیں گے
تو پہلا یہ رقم کا اصول ہے
x تک جانے کو محدود کرتے ہیں اور موجود ہیں۔ af کے x دو فنکشنز ہیں اس طرح کہ وہ gx اور fx تو یہ کہتا ہے کہ فرض کریں کہ
یہ بھی موجود ہے x پر جانے والی حد ag کے
کے x کی حد کے برابر ہے gx جمع fx پر جاتا ہے اس کا ہونا ضروری ہے اور حد a x کی حد ہے کیونکہ gx جمع fx تو نتیجہ پھر
کی حد کے بارے میں مختصراً یہ کہتا ہے کہ رقم کی حد حد کے مجموعے کے برابر ہے رقم کی gx اور fx پر رقم کے برابر ہے a برابر
حد حد کے مجموعے کے برابر ہے بشرطیکہ ہر حد موجود ہو
تو یہ پھر ایک ایسی چیز ہے جس پر یقین کرنا بہت مشکل نہیں ہے۔ رقم کی وہ حد حد کا مجموعہ ہے لیکن اگر آپ اسے ثابت کرنے کی کوشش
کرتے ہیں
x ایک کے برابر ہے اور l تک جاتی ہے یہ کچھ a x کی حد f کی x تو یہ ایپیلون ڈیلٹا کی تعریف کام آتی ہے لہذا ثبوت اس لیے دیں کہ
دو کے استعمال سے تعریف یہ ہے کہ اس کا کیا مطلب ہے اور اس کے لیے جو ہم دکھانا چاہتے ہیں l برابر ہے ag کی حد ہوتی ہے۔ ایکس کا
دو l ایک جمع l کے برابر ہوتا ہے a کا رجحان x وہ یہ ہے کہ دعویٰ ایف ایکس پلس جی ایکس کی حد ہے کیونکہ
تو یہ ظاہر کرنے کے لیے ہمیں ڈیلٹا تلاش کرنا ہوگا۔ صفر سے زیادہ ایپسیلون کو دیا جائے ہمیں ڈیلٹا تلاش کرنے کی ضرورت ہے
ایک ہم جانتے ہیں کہ l کے برابر ہے af کے x کا رجحان x کی حدیں دی گئی ہیں لہذا چونکہ حد gx اور fx تو سب سے پہلے ہمیں
کچھ ڈیلٹا موجود ہے ایک مثبت اس طرح کہ اگر میرا ایکس مائنس اے کا موڈ ڈیلٹا 1 سے کم اور 0 سے بڑا ہے
تو اس کا مطلب یہ ہونا چاہئے کہ ایف ایکس مائنس ایل ون کا موڈ اس سے چھوٹا ہے اس کے بجائے میں ایپسیلون کو دو سے یہاں رکھوں گا کیونکہ
آپ کو ایک ڈیلٹا مل سکتا ہے کہ ایسا ہوتا ہے epsilon یہ جو کہتا ہے وہ یہ ہے کہ کوئی بھی
تو یہ ایپسیلون کے لیے بھی دو کے برابر ہونا چاہیے
تو یہ میری مساوات ہے ایک اسی طرح میں دیکھ سکتا ہوں کہ ایک ڈیلٹا ٹو پازیٹو موجود ہے جیسے کہ ایکس مائنس کا موڈ ڈیلٹا ٹو سے کم اور ایکس
مائنس ایل ٹو کا موڈ یہ کم ہے۔ پھر سے ایپسیلون از ٹو آئیے اس کو دو کہتے ہیں gx کے برابر اس کا مطلب یہ ہونا چاہئے کہ a نہیں
تو اب ہمیں جو دکھانا ہے ہمیں ایک ڈیلٹا تلاش کرنا ہے لہذا اگر میں اب لیتا ہوں
دو l تو ہمارے پاس فنکشن ایف ایکس پلس جی ایکس ہے اور ہمیں ثابت کرنا ہوگا کہ حد ایل ون پلس ہے۔
تو اگر ہم ایف ایکس پلس جی ایکس مائنس ایل ون پلس ایل ٹو لیں اور ہمیں ایپسیلون سے کم ہونے کے لیے مطلق قدر میں فرق کرنا ہوگا
تو یہ ایف ایکس مائنس ون پلس جی ایکس مائنس ایل ٹو کے موڈ کے برابر ہے اور پھر ہم جانتے ہیں کہ اے پلس بی کا موڈ
تو یہ ایف ایکس مائنس ایل 1 پلس موڈ آف جی ایکس مائنس ایل 2 کے موڈ کے برابر ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ اے پلس بی کا موڈ ہمیشہ موڈ اے
پلس موڈ بی کے برابر ہوتا ہے اب ہمیں ایک موڈ سے کیا دیا گیا ہے۔ ایف ایکس مائنس ایل ون کا یہ ایپسیلون بائے ٹو سے کم ہے اگر ایکس مائنس اے
x کا موڈ ڈیلٹا ون سے کم ہے اور اگر ایکس مائنس اے کا موڈ صفر سے بڑا ہے اور ڈیلٹا ون سے کم ہے اور یہ بھی موڈ سے دو سے کم ہے
اس کے ایپسیلون کے مطابق ہے لہذا اگر میں ual ہے eq کا صفر سے بڑا اور ڈیلٹا ٹو سے کم یہ ایک اور دو سے ہے اور یہ رقم a مائنس
ڈیلٹا کو کم از کم ڈیلٹا 1 اور ڈیلٹا 2 کے برابر ہونے کا انتخاب کرتا ہوں
سے بڑا اور ڈیلٹا سے کم ہے 0 a مائنس mod x تو اگر
ڈیلٹا 1 سے کم ہے۔ ڈیلٹا 2 کے ساتھ ساتھ اس کا مطلب یہ ہوگا کہ ایف ایکس پلس جی ایکس مائنس ایل a مائنس mod x تو کیونکہ ڈیلٹا کم از کم
ون پلس ایل ٹو کا موڈ یہ ایپسیلون سے کم ہے اس طرح ایف ایکس پلس جی ایکس کی تعریف کی حد ایل ون پلس ایل ٹو کے برابر ہے لہذا یہ اصول
بہت اہم ہوگا کیونکہ بہت مفید ہے کیونکہ اگر آپ انفرادی حدود کو جانتے ہیں
پر جاتا ہے x a لیتا ہوں جیسا کہ f کا الفا ٹائم x تو آپ فنکشنز کے مجموعے کی حد تلاش کر سکتے ہیں دائیں دوسری پراپرٹی کی حد اگر میں
پر جاتی ہے a کی حد f کی x کا جہاں الفا کوئی حقیقی نمبر ہے اور یہ درست ہے اگر x کی الفا اوقات کی حد کے برابر ہوتا ہے۔ x یہ
تو یہ صحیح موجود ہے لہذا اگر میں فنکشن کو کسی حقیقی نمبر سے ضرب کرتا ہوں
کی حد ہے۔ اسٹینٹ ٹائمز ایف con کی مستقل اوقات کی حد تک تاکہ یہ ایک f کے x کی حد برابر ہوتی ہے۔ f کے اس مستقل اوقات x تو
ایکس ایکس کے مستقل اوقات کے برابر ہے ایف ایکس کے حق کی حد اس لئے ثبوت ثبوت نہیں کرے گا میں اسے ایک مشق کے طور پر چھوڑتا
ہوں لہذا دوبارہ ایپسیلون ڈیلٹا تعریف کا استعمال کرتے ہوئے آپ کو یہ جاننے کی کوشش کرنی چاہئے کہ ڈیلٹا کیا ہے جو اس کے لئے کام کرے گا

کی فرق کی حد لیتا ہوں gx مائنس fx تو اور تیسرا بلاشبہ رقم کے اصول کی طرح ہے اگر میں
کی حد اور fx کے برابر ہے بشرطیکہ دائیں طرف کی حد موجود ہو یہ بالکل رقم کی طرح ہے۔ قاعدہ اگر x کی g مائنس کی حد fx تو یہ
gx کی حد موجود ہے
تو فرق کی حد حد کے فرق کے برابر ہے اور یہ حقیقت میں پراپرٹی ون اور ٹو والوں سے ہوتا ہے یقیناً کوئی بھی ایپسیلون ڈیلٹا ڈیفینیشن کا استعمال
ہے آپ gx مائنس fx کرتے ہوئے براہ راست ثابت کر سکتا ہے لیکن میں دکھاتا ہوں۔ کہ یہ درحقیقت ایک اور دو سے ہوتا ہے لہذا ہمارے پاس
کے جی کے طور پر لکھیں x پلس مستقل مائنس ایک بار fx اسے صرف
x اور مائنس ایک گنا جی fx تو اب ہمارے پاس دو فنکشنز کا مجموعہ ہے
کی حد ہے یہ 1 پراپرٹی 1 g کے مائنس 1 گنا x کی حد کے برابر ہے اور f کی x مائنس جی کی حقیقی حد fx کی x تو اس سے کیا
کی ایک بار کی حد ہے g کی x کا ایک گنا جی مائنس ہے x رقم کے اصول سے ہے اور پھر مائنس کی دوسری خاصیت کی حد سے
کی حد ٹھیک ہے g کی x کی حد ہے مائنس f کی x تو یہ
تو یہ دوسرے لیکچر میں پہلے لیکچر کے اختتام پر لاتا ہے میں حدود کی کچھ اور خصوصیات دکھاؤں گا اور پھر ہم کچھ کریں گے۔ مزید مثالیں اور
کچھ حدود کا حساب لگائیں شکریہ