

ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਹੈਲੋ, ਅੱਜ ਸੀਮਾਵਾਂ 'ਤੇ ਪਹਿਲਾ ਲੈਕਚਰ ਹੈ,  
ਇਸ ਲਈ ਅੱਜ ਮੈਂ ਦੱਸਾਂਗਾ ਕਿ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਕੀ ਮਤਲਬ ਹੈ  
ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਪੂਰੇ ਕੈਲਕੂਲਸ ਦੀ ਰੀਡੂ ਦੀ ਹੱਡੀ ਹੈ,  
ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਅਧਿਆਏ ਹੈ,  
ਇਸ ਲਈ ਮੈਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦਿਓ। ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ,  
ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ  $f$  ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ 'ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਇੱਕ ਫੰਕਸ਼ਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $x$  ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਸੰਭਵ ਤੌਰ 'ਤੇ  $a$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $x$  ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ ਕਿ  $x$  ਦੇ ਫੰਕਸ਼ਨ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੁਆਰਾ  $x$  ਦਾ ਕੀ ਮਤਲਬ ਹੈ।  $a$  ਤਾਂ  
ਇਸ ਲਈ ਸੰਕੇਤਕ ਸੰਕੇਤ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸੀਮਾ ਲਈ ਵਰਤਾਂਗੇ ਜੋ ਅਸੀਂ  $1$  im ਸੀਮਾ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ  $x$   $x$  ਦੇ  $f$  ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੇ  $a$  ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਸੱਜੇ ਇਹ  $x$  ਦੀ  
 $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x$

ਇਸ ਲਈ ਗੈਰ ਰਸਮੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮਤਲਬ ਰਸਮੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੀਮਾ ਅੰਗ  $x$   $x$  ਦਾ  $af$  ਵੱਲ ਝੁਕਦਾ ਹੈ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ  $1$  ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $f(x)$  ਮਨਮਾਨੇ ਤੌਰ 'ਤੇ  
 $1$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੈ ਜੇਕਰ  $x$  ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਬਿੰਦੂ  $x$  ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਇੱਕ ਕੋਰਸ ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ ਨੇੜੇ ਹੋਣ ਲਈ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕੀ ਹਾਂ  
ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮਨਮਾਨੇ ਤੌਰ 'ਤੇ  $1$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ ਨੇੜੇ ਹੈ ਤਾਂ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੇਰੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਫੂ ਹੈ  $n$ ction ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਥੇ  $a$   
ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $x$  ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਫੰਕਸ਼ਨ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸ਼ਾਇਦ  $a$  'ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ,

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$   $a$  ਵੱਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਹ ਇਹ ਨੰਬਰ  $1$  ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ  $f(x)$  ਦਾ  
ਮੁੱਲ  $1$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿੰਨਾ ਤੁਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੈਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ ਕਿ ਮੇਰਾ  $f$  ਦਾ  $x$  ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਿੰਦੂ  $1$  ਹੋਵੇ ਤਾਂ  
ਇਸ ਤਸਵੀਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲੇਟਣ ਲਈ ਆਪਣਾ  $x$  ਚੁਣਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੇ  $x$  ਇੱਥੇ  $x$  ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੈ ਫਿਰ  $x$  ਦਾ  $f$   
ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਪਿਆ ਹੈ ਮੈਨੂੰ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ ਕਾਲ ਕਰਨ ਦਿਓ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੈਂ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਪਿਆ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਕੋਈ  $1$  ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ  
ਕਿ  $xx$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $f$  ਇੱਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਇਹ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਕੋਈ  $1$  ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਾਂਗੇ ਕਿ ਸੀਮਾ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਜੇਕਰ  
ਮੈਂ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਵੇਖਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮੈਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਿਖਦਾ ਹਾਂ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੇਰੇ ਕੋਲ  $x$  ਦਾ ਇਹ ਫੰਕਸ਼ਨ  $f$  ਹੈ ਜੋ  $x$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।  $0$  ਅਤੇ  
ਇਹ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਡੇ  $x$  ਲਈ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਫੰਕਸ਼ਨ  $f(x)$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਜੇਕਰ  $x$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇੱਕ ਹੈ ਜੇਕਰ  $x$  ਵੱਡਾ ਹੈ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ  
ਬਰਾਬਰ

ਇਸ ਲਈ ਹੁਣ ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $f(x)$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚਦੀ ਹੈ ਤਾਂ  $0$  ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ  
ਮੈਂ  $0$  ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ  $x$  ਨੂੰ  $b$  ਤੱਕ ਲੈਂਦੀ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਕਾਰਾਤਮਕ  $x$  ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ  $x$  ਦਾ  $f$   $1$  ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਨੈਗੇਟਿਵ  
 $x$  ਲਈ ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਕਿੰਨਾ ਵੀ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਵਾਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ  $f(x)$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ  $f(x)$  ਹੈ। ਹਮੇਸ਼ਾ ਜ਼ੀਰੋ ਇਸਲਈ  $1$   
ਦਾ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਸਾਡੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਇਸਲਈ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਵੀ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਕੇਸ ਵਿੱਚ ਮੈਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦੇ ਹਨ ਇੱਕ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ  
ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇਹ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਨੋਟੇਸ਼ਨ ਸੀਮਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਵੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਫੰਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਦੇਖ ਰਹੇ ਹਾਂ  
ਇਸ ਲਈ ਮੈਂ ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਫੰਕਸ਼ਨ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਡੇ  $x$  ਲਈ  $1$  ਹੋਵੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ  
ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $f(x)$  ਲਈ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ  $x$   $x$  ਦੇ  $f$  ਦੇ ਜ਼ੀਰੋ ਮਾਇਨਸ 'ਤੇ  
ਜਾਣਾ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਹ

ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ  $f(x)$  ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ  
ਮੈਨੂੰ  $f(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਲਿਖਣ ਦਿਓ ਕਿਉਂਕਿ  $x$  ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਵੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ  $f(x)$  ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਕਾਫ਼ੀ ਛੋਟਾ ਖੁੱਲ੍ਹਾ

ਅੰਤਰਾਲ ਲਾਈਨ ਵਿੱਚ  $x$  ਦੇ ਝੂਠ ਚੁਣ ਕੇ ਮਨਮਾਨੇ ਤੌਰ 'ਤੇ  $1$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਕੁਝ ਡੈਲਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਲਈ  $a$  ਤੋਂ  $a$  ਲਈ ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਰੂਪ  
ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਸ ਨੂੰ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ  $x$  ਦੇ ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $f$  ਤੱਕ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ  
ਇਹ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ  $f(x)$  ਨੂੰ  $1$  ਦੇ ਨੇੜੇ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ  $x$  ਨੂੰ ਚੁਣ ਕੇ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $a$  ਤੋਂ ਪਲੱਸ ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਇੱਕ ਛੋਟੇ ਜਿਹੇ  
ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਇਸਲਈ ਇਸਨੂੰ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ  $a$  ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਦੇਖ ਰਹੇ  
ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਲਈ ਹੱਥ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ  $x$  ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿਲਚਸਪੀ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਲਈ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਖੱਬੇ ਲਈ  $t$  ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਿਰਫ਼  $a$  ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਲਈ ਸਿਰਫ਼  $a$  ਦੇ  
ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ  $f(x)$  ਦੇ ਮੁੱਲ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹਨ ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ  $a$  ਦੇ  $f$  ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਲਈ ਕਿ ਕੀ ਇਹ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੀ  
ਸੀਮਾ ਹੈ ਜਾਂ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ  $a$  'ਤੇ ਜਾਂ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ  $a$  'ਤੇ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਇਕ ਹੋਰ ਟਿੱਪਣੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ  $x$  'ਤੇ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।  $x$   $a$  ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਇਹ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਜੇਕਰ ਦੇਵੇਂ  
ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $a$  ਅਤੇ  $r$   $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ 'ਤੇ ਮੌਜੂਦ ਹਨ ਤਾਂ ਸੀਮਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਜੇਕਰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ  
ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇਵੇਂ ਮੌਜੂਦ ਹਨ। ਅਤੇ ਦੇਵੇਂ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਇਸਲਈ ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ  $x$  ਦਾ  $f$   $0$  ਤੋਂ ਘੱਟ  $x$  ਲਈ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $0$  ਦੇ  
ਬਰਾਬਰ  $x$  ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਈ  $1$  ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਘਟਾਓ  $f(x)$  ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜ਼ੀਰੋ ਤੱਕ ਅਤੇ  $x$

ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੇ ਜ਼ੀਰੋ ਪਲੱਸ  $f$  ਤੱਕ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਲਈ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇਵੇਂ ਜ਼ੀਰੋ 'ਤੇ ਮੌਜੂਦ ਹਨ ਪਰ ਟੀ hey  
ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ  $x$   $x$  ਦੇ  $f$  ਦੇ ਜ਼ੀਰੋ 'ਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ ਇਹ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਹ ਕੇਸ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਖੱਬੇ  
ਹੱਥ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਵੀ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਪਿਛਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਪਰ ਉਹ

ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਇਸਲਈ ਸੀਮਾ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ ਕੀ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਹ ਕੇਸ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਓ ਇਸ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ  $f(x)$  ਨੂੰ  $x$  ਲਈ  $1$  ਦਾ ਸਾਈਨ ਕਹਿਣ  
ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ  $x$  ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ। ਜ਼ੀਰੋ ਪਲੱਸ  $f(x)$  'ਤੇ ਜਾਣਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ  $x$  ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਲਈ  $x$  ਦੇ  $f$  ਨੂੰ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਅਤੇ  $x$  ਦਾ  $f(x)$  ਇੱਕ ਦੇ ਸਾਈਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਾਈਨ  $1$  ਬਾਇ  $x$  ਫਾਰਮ  $x$  ਦੇ ਸਾਰੇ  $x$  ਲਈ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $n$  pi ਉੱਤੇ  
ਇੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ  $n$  ਇੱਕ ਕੁਦਰਤੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਸੱਜੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੰਨ੍ਹ pi ਦੇ ਸਾਰੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਗੁਣਜ ਉੱਤੇ  $0$  ਹੈ ਇਸਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $x$  ਨੂੰ  $1$  ਬਾਇ  $n$  ਦੇ

ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ pi ਫਿਰ sine 1 by x ਬਰਾਬਰ ਹੈ sine of 1 by x, n pi ਦਾ sine ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $0$  ਸੱਜੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ  $x$   $1$  ਬਾਇ  $2$   
 $n$  ਜੋੜ ਕੇ ਇੱਕ pi ਬਾਇ ਦੇ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਈਨ ਇੱਕ ਬਾਇ  $x$  ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।  $1$  ਦੇ  $n$  ਪਲੱਸ ਇੱਕ ਪਾਈ ਬਾਇ ਟੂ ਦੀ ਸਾਈਨ ਜੋ ਕਿ ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਦੀ ਪਾਵਰ  $n$  ਸੱਜੇ  
ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ  $n$  ਵੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ  $n$  ਬੇਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਮੇਰਾ  $x$  ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਹੈ ਤਾਂ  
ਕਹੋ। ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਲਈ  $1$  ਬਾਇ  $x$  ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਹੋ ਕਿ  $2$  n pi ਤੋਂ ਦੇ  $n$  pi ਪਲੱਸ pi ਬਾਇ ਦੇ ਤਾਂ ਉਹ ਹੈ  $x$  ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਾਇ  
ਦੇ  $n$  pi ਪਲੱਸ pi ਬਾਇ ਦੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਬਾਇ ਦੇ  $n$  pi ਫਿਰ  $f(x)$  ਬਰਾਬਰ ਹੈ। sin one by x ਜ਼ੀਰੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ  $n$  ਵੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ  $n$  ਬੇਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਮੇਰਾ  $x$  ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਹੈ ਤਾਂ  
ਕਹੋ। ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਲਈ  $1$  ਬਾਇ  $x$  ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਹੋ ਕਿ  $2$  n pi ਤੋਂ ਦੇ  $n$  pi ਪਲੱਸ pi ਬਾਇ ਦੇ ਤਾਂ ਉਹ ਹੈ  $x$  ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਾਇ  
ਦੇ  $n$  pi ਪਲੱਸ pi ਬਾਇ ਦੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਬਾਇ ਦੇ  $n$  pi ਫਿਰ  $f(x)$  ਬਰਾਬਰ ਹੈ। sin one by x ਜ਼ੀਰੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ

ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਦੇ  $n\pi$  ਤੋਂ  $2n\pi$  ਪਲੱਸ  $\pi$  ਬਾਇ  $2x$  ਦਾ  $\sin \theta$  ਤੋਂ  $1$  ਤੱਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $2n\pi$  ਤੋਂ ਘਟਾਓ  $\pi$  ਨੂੰ ਤਾਂ ਤੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਦੇ  $n\pi$  ਪਲੱਸ  $\pi$  ਬਾਇ ਦੇ ਫਿਰ ਇਹ ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਤੋਂ ਇੱਕ ਤੱਕ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਲੈ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ  $x$  ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਮੇਰੇ ਕੋਲ ਇੱਕ  $x$  ਦੇ  $\sin$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $f(x)$  ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ ਦਿਲਚਸਪੀ ਰੱਖਦਾ ਹਾਂ ਮੈਨੂੰ ਇਸਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੀ ਮੈਂ ਕੁਝ ਇੱਕ ਬਾਇ ਦੇ  $n\pi$  ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਮੇਰੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਬਾਇ ਦੇ  $n\pi$  ਪਲੱਸ  $\pi$  ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦਾ ਹੈ  $i$  have zero in ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਇੱਕ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇੱਕ ਬਾਇ ਦੇ  $n\pi$  ਪਲੱਸ  $\pi$  'ਤੇ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਜ਼ੀਰੋ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ  $x$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਨੇੜੇ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹ ਓਸੀਲੇਟਿੰਗ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਫੰਕਸ਼ਨ ਜ਼ੀਰੋ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਮਾਇਨਸ ਇੱਕ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਓਸੀਲੇਟ ਹੁੰਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਵੇਖ ਰਿਹਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਵਾਂਗ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਲਈ ਵੀ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸਲਈ ਹੁਣ ਤੱਕ ਅੱਜ ਤੱਕ ਮੈਂ ਇੱਕ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਅਨੁਭਵੀ ਧਾਰਨਾ ਦਿੱਤੀ ਹੈ ਹੁਣ ਅੱਗੇ ਮੈਂ ਰੀਗਰੈਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦਾ ਹਾਂ ਇਸਲਈ ਇਸਨੂੰ ਲਿਮਿਟ ਦੀ ਐਪਸੀਲਨ ਡੈਲਟਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸੋ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਹੈ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $a$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਐਪਸੀਲਨ ਪਾਜ਼ੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਐਪਸੀਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹੋ ਜੋ ਕਿ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਡੈਲਟਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਜੋ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਵੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $x$  ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਲਾਈਨ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ  $\text{mod } x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ  $f$  ਦਾ ਮੋਡ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਇਹ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਆਓ ਮੈਂ ਇਹਨਾਂ ਚੀਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਉਜਾਗਰ ਕਰਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮੈਂ ਇਸਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦੁਆਰਾ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮਝਾਉਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $x$  ਅਤੇ  $y$  ਬਰਾਬਰ ਹੈ  $x$  ਦਾ  $f$  ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੁਣ ਕੁਝ ਫੰਕਸ਼ਨ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਹ  $1$  ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਮਝਾਇਆ ਸੀ ਕਿ ਸੀਮਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਸ  $x$  ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ  $a$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਮਨਮਾਨੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ  $1$

ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੈਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ ਕਿ  $x$  ਦਾ ਮੋਰਾ  $f$   $1$  ਮਾਇਨਸ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ  $1$  ਪਲੱਸ ਐਪਸੀਲਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੈਂ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਚੁਣ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੇਰਾ ਇਹ ਇੱਕ ਮਾਇਨਸ ਡੈਲਟਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਲੱਸ ਡੈਲਟਾ ਜੇਕਰ ਮੇਰਾ  $x$  ਹੈ। ਇਸ ਖੁੱਲੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਇੱਕ ਪਲੱਸ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਸੰਭਾਵਤ ਤੌਰ 'ਤੇ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $a$  ਤੇ ਫਿਰ  $x$  ਦਾ ਮੋਰਾ  $f$  ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ  $1$  ਮਾਇਨਸ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ  $1$  ਪਲੱਸ ਐਪਸੀਲਨ ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਚਾਹ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਐਪਸੀਲਨ  $0.1$  ਕਹਿਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਐਪਸੀਲਨ ਨੂੰ ਪੁਆਇੰਟ ਵਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ, ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਡੇਲ ਵਿੱਚ ਥੋੜ੍ਹਾ ਜਿਹਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋਵੇ  $t_a$  ਤੋਂ ਪਲੱਸ ਡੈਲਟਾ ਜਿਸ ਲਈ ਫੰਕਸ਼ਨ ਵੈਲਯੂ  $1$  ਮਾਇਨਸ ਪੁਆਇੰਟ ਵਨ ਤੋਂ  $1$  ਪਲੱਸ ਪੁਆਇੰਟ ਵਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਐਪਸੀਲਨ ਨੂੰ ਛੋਟਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ ਜ਼ੀਰੋ ਵਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਵੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਡੈਲਟਾ ਸੰਭਵ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪਿਛਲੇ ਨਾਲੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇੱਥੇ ਚੁਣਦਾ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਦੁਬਾਰਾ ਇਹ  $1$  ਮਾਇਨਸ ਪੁਆਇੰਟ ਜ਼ੀਰੋ ਵਨ ਤੋਂ  $1$  ਪਲੱਸ ਪੁਆਇੰਟ ਜ਼ੀਰੋ ਵਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਟਿੱਪਣੀ ਡੈਲਟਾ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਐਪਸੀਲਨ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਐਪਸੀਲਨ ਨੂੰ ਛੋਟਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਡੈਲਟਾ ਨੂੰ ਛੋਟਾ ਕਰਨਾ ਪੈ ਸਕਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਫੰਕਸ਼ਨ  $f(x) = x$  ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੀ ਹੈ ਜਦੋਂ  $x \rightarrow 0$  ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹ ਬਹੁਤ ਸਧਾਰਨ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸੀਮਾ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹੋ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਫਿਰ ਇਹ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜੇ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਤੋਂ ਦੁਬਾਰਾ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ।  $\epsilon$  ਇਸ ਵਿੱਚ ਡੈਲਟਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਐਪਸੀਲਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਡੈਲਟਾ ਅਜਿਹਾ ਕੀ ਹੈ ਜੋ ਸਥਿਤੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $\epsilon$  ਕੋਈ ਵੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਜੋ ਅਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੇਰਾ ਮੋਡ ਮੈਨੂੰ ਇੱਥੇ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $0$  ਹੈ  $0$  ਲਿਖਣ ਦਿਓ ਜੇਕਰ ਇਹ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਮਾਇਨਸ ਦਾ ਮੋਰਾ  $f$  ਅਸੀਂ ਦਾਅਵਾ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੀਮਾ  $0$  ਹੈ ਇਹ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ  $\text{mod } x$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ  $x$  ਵਰਗ ਦਾ ਮੋਡ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹੁਣ ਜੇਕਰ  $x$  ਦਾ ਮੋਡ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ  $x$  ਵਰਗ ਦਾ ਮੋਡ ਇਹ ਡੈਲਟਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਠੀਕ ਹੈ ਪਰ ਅਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੇਰਾ ਮਾਡ  $x$  ਵਰਗ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $x$  ਵਰਗ ਦਾ ਮੋਡ ਐਪਸੀਲਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਐਪਸੀਲਨ ਦੇ ਵਰਗ ਰੂਟ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਡੈਲਟਾ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮੋਡ  $x$  ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ  $x$  ਵਰਗ ਦਾ ਮਾਡ ਡੈਲਟਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਐਪਸੀਲਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ ਬੇਸ਼ੱਕ ਸਕਾਰਾਤਮਕ  $i$  ਹੈ  $f$  ਐਪਸੀਲਨ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸਲਈ ਐਪਸੀਲਨ ਡੈਲਟਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ  $x$  ਵਰਗ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਾਲਣਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x \rightarrow 0$  ਤੱਕ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਬਹੁਤ ਸਧਾਰਨ ਉਦਾਹਰਣ ਸੀ ਪਰ ਇਹ ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਸੀ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਐਪਸੀਲਨ ਡੈਲਟਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਿਵੇਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸਾਬਤ ਕਰੋ ਕਿ ਸੀਮਾ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਠੀਕ ਹੈ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਕੀ ਕਰਾਂਗੇ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਵੇਖਾਂਗੇ ਤਾਂ ਸੀਮਾ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਇਹ ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮੰਨ ਲਓ  $f(x)$  ਅਤੇ  $g(x)$  ਦੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਹ  $x$  ਦੇ  $a$  'ਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਲਿਮਿਟ  $x$  ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੇ  $a$  'ਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਇਹ ਵੀ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਟਾ ਫਿਰ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x \rightarrow a$  'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਮੌਜੂਦ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੀਮਾ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ  $x$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $a$   $f(x)$  ਅਤੇ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਬਸ਼ਰਤ ਹਰੇਕ ਸੀਮਾ ਮੌਜੂਦ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਹੈ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਚੀਜ਼ ਜਿਸ ਬਾਰੇ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਲ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜੋੜ ਹੈ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਰ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹ ਐਪਸੀਲਨ ਡੈਲਟਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਕੰਮ ਆਉਂਦੀ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਸਬੂਤ ਇਸ ਲਈ ਮੰਨੋ ਕਿ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x \rightarrow a$  ਤੱਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਹ ਕੁਝ  $1$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਸੀਮਾ  $x \rightarrow x$  ਦੀ  $ag$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਦੇ ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜੇ ਦਿਖਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਉਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦਾਅਵਾ  $f(x)$  ਪਲੱਸ  $g(x)$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $x \rightarrow 1$  ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣ ਲਈ ਕੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭਣ ਲਈ, ਇਸ ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਐਪਸੀਲਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ  $f(x)$  ਅਤੇ  $g(x)$  ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾ  $x$ ,  $x \rightarrow a$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਮੌਜੂਦ ਹੈ। ਕੁਝ ਡੈਲਟਾ ਵਨ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਦਾ ਮੋਰਾ ਮੋਡ ਡੈਲਟਾ  $1$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਐਫਐਕਸ ਮਾਇਨਸ ਐਲ ਵਨ ਦਾ ਮੋਡ ਇਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਐਪਸੀਲਨ ਦੀ ਬਜਾਏ ਮੈਂ ਇੱਥੇ ਐਪਸੀਲਨ ਨੂੰ ਦੋ ਦੁਆਰਾ ਪਾਵਾਂਗਾ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕੀ ਹੈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਐਪਸੀਲਨ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜੋ ਅਜਿਹਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਐਪਸੀਲਨ ਲਈ ਦੋ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਮੇਰਾ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਇੱਕ ਸਿਮੀ  $larly$  ਮੈਂ ਲੱਭ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਪਾਜ਼ਿਟਿਵ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮਾਡ ਦਾ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਤੇ  $x$  ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ  $a$  ਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ  $gx$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਦੇ ਦਾ ਮੋਡ ਇਹ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਘੱਟ ਏਪੀਸੀਲੋਨ ਬਾਇ ਦੇ ਹੈ ਚਲੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦੇ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਡੈਲਟਾ ਲੱਭਣਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਹੁਣੇ ਲਵਾਂ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਫੰਕਸ਼ਨ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਸੀਮਾ  $1$  ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $1$  ਦੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਮਾਇਨਸ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ  $1$  ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $1$  ਦੇ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਐਪਸੀਲੋਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣ ਲਈ ਪੂਰਨ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਬਣਾਉਣਾ ਪਏਗਾ ਇਸਲਈ ਇਹ  $fx$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਪਲੱਸ  $gx$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਦੇ ਦੇ ਮਾਡ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਏ ਪਲੱਸ ਬੀ ਦਾ ਮੋਡ

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ  $fx$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਪਲੱਸ ਮੋਡ ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $gx$  ਮਾਇਨਸ  $12$  ਦੇ ਮਾਡ ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਏ ਪਲੱਸ ਬੀ ਦਾ ਮੋਡ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਮਾਡ ਏ ਪਲੱਸ ਮੋਡ ਬੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ  $fx$  ਮਾਇਨਸ ਐਲ ਵਨ ਦੇ ਇੱਕ ਮਾਡ ਤੋਂ ਕੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਐਪਸੀਲੋਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਜੇ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਦਾ ਮੋਡ ਡੈਲਟਾ ਵਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਐਪਸੀਲੋਨ ਤੋਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਘੱਟ ਹੈ ਜੇਕਰ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਦਾ ਮੋਡ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡੇਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ  $ta$  one ਅਤੇ  $x$  minus  $a$  ਦਾ ਮੋਡ ਵੀ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਘੱਟ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੇ ਤੋਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਜੋੜ ਇਸਦੇ ਐਪਸੀਲੋਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਡੈਲਟਾ  $1$  ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ  $2$  ਦੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਲਈ ਚੁਣਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੇਕਰ  $mod$   $x$  ਮਾਇਨਸ  $a$   $0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡੈਲਟਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਡੈਲਟਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਡ  $x$  ਮਾਇਨਸ  $a$  ਹੈ, ਡੈਲਟਾ  $1$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਡੈਲਟਾ  $2$  ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $1$  ਦੇ ਦਾ ਮਾਡ ਇਹ ਹੈ। ਐਪਸੀਲੋਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ  $fx$  ਪਲੱਸ  $gx$  ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਸੀਮਾ  $1$  ਇੱਕ ਪਲੱਸ  $1$  ਦੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਯਮ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਫੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਹੀ ਦੂਜੀ ਸੰਪਤੀ ਨੂੰ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $x$  ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਐਲਫ਼ਾ ਗੁਣਾ  $f$  ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $x$   $a$  'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ  $x$  ਦੇ  $af$  ਤੱਕ ਜਾਣ ਦੀ  $x$  ਦੀ ਐਲਫ਼ਾ ਗੁਣਾ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਅਲਫ਼ਾ ਕੋਈ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜੇਕਰ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਵਜੋਂ  $a$  'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਮੌਜੂਦ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਫੰਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਰ ਸਮੇਂ ਦੀ ਸੀਮਾ  $f$  ਦੀ  $x$  ਦੇ  $f$  ਦੀ ਸਥਿਰ ਸਮਿਆਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇ  $x$  ਦੇ ਸਥਿਰ ਸਮਿਆਂ ਦੀ ਸੀਮਾ  $f$   $x$  ਦੇ  $x$  ਦੀ ਸਥਿਰ ਸਮਿਆਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਇਸਲਈ ਸਬੂਤ ਸਬੂਤ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਮੈਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਛੱਡ ਦਿੰਦਾ ਹਾਂ ਇਸਲਈ ਦੁਬਾਰਾ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਐਪਸੀਲੋਨ ਡੈਲਟਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਡੈਲਟਾ ਕੀ ਹੈ ਜੋ

ਇਸ ਲਈ ਕੰਮ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਇੱਕ ਬੇਸ਼ੱਕ ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਵਾਂਗ ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ  $fx$  ਘਟਾਓ  $gx$  ਦੀ ਅੰਤਰ ਸੀਮਾ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ  $fx$  ਘਟਾਓ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।  $x$  ਦਾ  $g$  ਬਸ਼ਰਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਮੌਜੂਦ ਹੋਣ ਇਹ ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਜੇਕਰ  $fx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ  $gx$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਅੰਤਰ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੀਮਾ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੰਪੱਤੀ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੇ ਬੇਸ਼ੱਕ ਇੱਕ ਐਪਸੀਲੋਨ ਡੈਲਟਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਿੱਧੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੀ ਸਾਬਤ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਮੈਨੂੰ ਦਿਖਾਉਣ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੇ ਤੋਂ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $fx$  ਮਾਇਨਸ  $gx$  ਹੈ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਸਿਰਫ਼  $fx$  ਪਲੱਸ  $x$  ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਾ  $g$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੇ ਫੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ  $fx$  ਅਤੇ ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਗੁਣਾ  $g$  ਦਾ  $x$  ਇਸ ਲਈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ  $x$  ਦੀ  $fx$  ਘਟਾਓ  $g$  ਦੀ ਸਹੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਦੀ  $f$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ  $x$  ਦੇ ਘਟਾਓ  $1$  ਗੁਣਾ  $g$  ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ ਇਹ  $1$  ਗੁਣਾ  $1$  ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਗੁਣਾ  $g$  ਦੀ ਦੂਜੀ ਸੰਪੱਤੀ ਸੀਮਾ ਦੁਆਰਾ ਹੈ।  $x$  ਦਾ  $x$  ਘਟਾਓ  $x$  ਦੀ  $g$  ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਾ ਸੀਮਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇ  $x$  ਦੀ  $x$  ਘਟਾਓ  $x$  ਦੀ ਸੀਮਾ  $x$  ਠੀਕ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਦੂਜੇ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਲੈਕਚਰ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉਂਦਾ ਹੈ ਮੈਂ ਸੀਮਾ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਿਖਾਵਾਂਗਾ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵੀ ਬਣਾਵਾਂਗਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੇਗਾ ਧੰਨਵਾਦ