सर्वांना नमस्कार, आम्ही विशेषत: शंकूच्या भागांवर आमची चर्चा सुरू ठेवू, आम्ही या व्याख्यानात लंबवर्तुळ आणि हायपरबोला बद्दल अभ्यास करू आणि पुढच्या लेक्चरमध्ये आम्ही लंबवर्तुळापर्यंत स्पर्शिका सामान्य इत्यादिच्या समीकरणाबद्दल चर्चा केली होती, हे व्याख्यान प्रथम लंबवर्तुळासह सुरू राहील
बाह्य बिंदू x one y one पासून लंबवर्तुळापर्यंत स्पर्शिकेच्या संपर्काच्या जीवा समीकरणाचे सूत्र आपण मिळवू , म्हणून लंबवर्तुळ x चौरस बाय चौरस अधिक y चौरस बाय b वर्ग एकाचा विचार करा आणि x एक y एक असू द्या लंबवर्तुळाच्या बाहेर एक बिंदू म्हणून आपल्याकडे हे लंबवर्तुळ आहे आणि आपल्याकडे काही बिंदू x एक y एक आहे जो लंबवृत्ताच्या बाहेर आहे आता या बिंदूपासून x एक y एक दोन स्पशरिषा लंबवर्तुळाकडे काढता येतील आणि आपल्याला जीवा शोधण्याची आवश्यकता आहे.
संपर्काचा म्हणून p हा बिंदू असू द्या आणि लंबवर्तुळावरील बिंदूंसह q आणि r जेथे स्पर्शिका काढल्या आहेत आणि नंतर आपल्याला या जीवा qr चे समीकरण शोधायचे आहे म्हणून हे बिंदू म्हणूया tp समजा pq आणि p ही दोन स्पशरिषा आहेत जिथे q आणि r लंबवर्तुळावर आहेत
त्यामुळे q हा बिंदू x अविभाज्य y अविभाज्य आणि r हा बिंदू x दुहेरी अविभाज्य y लंबवर्तुळाकार असेल तर स्पशरिषेचे समीकरण असेल.
एखाद्या बिंदूवर स्पर्शिकेचे समीकरण आठवा x अविभाज्य y अविभाज्य हे xx प्राइम द्वारे चौरस अधिक yy अविभाज्य द्वारे b वर्ग एक समान दिले जाते म्हणून या प्रकरणात हे रेषा pq चे समीकरण असेल
आणि त्याचप्रमाणे रेषा pr चे समीकरण xx दुहेरी असेल डॅश बाय a स्क्वेअर अधिक yy दुहेरी डॅश बाय b स्क्वेअर एक समान म्हणून हे pq आणि p रेषेचे समीकरण आहेत आता px एक y एक
pq आणि p या दोन्हीवर बिंदू आहे म्हणून आपल्याकडे x एक y ठेवल्यास pq साठी या समीकरणात एक आणि आपल्याला x डॅश x एक बाय एक स्क्वेअर अधिक y डॅश y एक बाय b स्क्वेअर एक आणि x दुप्पट x एक स्क्वेअर बाय स्क्वेअर आणि y एक बाय b स्क्वेअर म्हणून y दुप्पट हे सुद्धा बरोबर आहे एक म्हणजे आपल्याला एक आणि दोन ही दोन समीकरणे मिळतील जे आपल्याला शोधायचे होते आपल्याला रेषेचे qr चे समीकरण शोधायचे आहे म्हणून आपल्याला जीवा qr चे समीकरण हवे आहे
म्हणून लक्षात घ्या की q आणि r हे बिंदू x डॅश y डॅश आणि x डबल डॅश y दुहेरी आहेत म्हणून आपल्याकडे कोणतीही सरळ रेषा आहे ज्यावर या दोन आहेत बिंदू खोटे असतील तर ते सरळ रेषेचे qr चे समीकरण असेल म्हणून समीकरणाचा विचार करा x गुणिले x एक बाय चौरस अधिक y गुणिले y एक बाय b चौरस एक हे एका सरळ रेषेचे समीकरण आहे लक्षात ठेवा की एक आणि दोन म्हणजे एक सूचित करते बिंदू q जो x डॅश y डॅश आहे वरील रेषेवर आहे आणि दोन म्हणजे बिंदू r ज्याचे निर्देशांक x दुप्पट आहेत y दुहेरी डॅश हे देखील त्याच रेषेवर आहे आता कोणत्याही दोन बिंदूंमधून जाणारी एक अद्वितीय सरळ रेषा आहे म्हणून हे समीकरण q आणि r ला जोडणाऱ्या रेषेच्या समीकरणाशिवाय दुसरे काहीही नाही
म्हणून दोन भिन्न बिंदूंमधून जाणारी एक अद्वितीय सरळ रेषा आहे कारण हे समीकरण q आणि r ला जोडणाऱ्या रेषेचे आहे अशा प्रकारे आपल्याला qr चे समीकरण xx एक चौरस आहे.
uare plus yy one by b चौरस एक समान आहे म्हणून लक्षात घ्या की हे समीकरण x one y one बिंदूवरील स्पशरिषेच्या समीकरणासारखे दिसते परंतु या प्रकरणात x one y one हा बिंदू लंबवृत्ताच्या बाहेर आहे म्हणून आपल्याकडे हे आहे लंबवर्तुळ आणि आपल्याकडे कोणताही बिंदू x एक y वन आहे आणि नंतर q आणि r या दोन बिंदूला जोडणाऱ्या जीवाचे समीकरण दुसरे काही नाही तर लंबवर्तुळावरील एका बिंदूवर स्पशरिषेच्या समीकरणात x one y one जोडणे
हे आपल्याला देते जीवा समीकरणाचे सूत्र पुढे आपण ही समस्या सिद्ध करू की
लंबवर्तुळावरील कोणत्याही बिंदूवरील सामान्य हा रेषांमधील कोन केंद्रस्थानी दुभाजक करतो
म्हणून आपण एक आकृती काढू या आपल्याकडे लंबवर्तुळ आहे आणि समजा एक बिंदू p आहे म्हणून आपण दोन फोकस आहेत का त्यांना f एक आणि f दोन म्हणू या आणि समजा आपण लंबवर्तुळावर कोणताही बिंदू p घेतला आणि नंतर आपण फोकस फोकस या बिंदूला जोडणारी रेषा पाहतो p या बिंदूवर आपल्याला काय सिद्ध करायचे आहे p ही सामान्य रेषा आहे ही b हा कोन इजेक्ट करतो म्हणजे p वर सामान्य दर्शविण्यासाठी कोन f एक pf दोन दुभाजक करतो मग आपण काय करू या लंबवर्तुळाकडे पाहू आणि p आणि दोन केंद्रबिंदू f एक आणि f दोन पाहू आणि येथे ठीक आहे आपण याचा कोन दुभाजक पाहू या म्हणजे pn हा कोन f एक pf दोनचा कोन दुभाजक असू द्या आणि आपल्याला जे दाखवायचे आहे ते म्हणजे हे सामान्य आहे हे दाखवायचे आहे तर जेव्हा गरज असेल तेव्हा pn सामान्य असेल.
लंबवर्तुळ म्हणून आपण हा कोन दुभाजक घेतल्यापासून या
कोनांना थीटा म्हणू या आता आपण या pn ला लंब असलेली रेषा बघूया तर हा कोन pi बाय दोन वजा थीटा हा देखील pi बाय दोन वजा थीटा आहे.

त्यामुळे p मधून जाणाऱ्या रेषेचा विचार करा जी pn ला लंब आहे
त्यामुळे pn सामान्य आहे हे सिद्ध करणे ही रेषा स्पर्शिका आहे हे सिद्ध करण्यासाठी समतुल्य आहे
त्यामुळे ही रेषा
लंबवर्तुळाला स्पर्शिका असल्याचे दर्शवेल याचा अर्थ असा की आपल्याला दाखवावे लागेल की जर तेथे असेल तर इतर कोणताही मुद्दा q या रेषेवर मग क्ष हे लंबवर्तुळावर पडू नये म्हणून या लंब रेषेवर एक बिंदू q घ्या मला पुन्हा चित्र काढू द्या हा बिंदू p हा आहे n हा f एक आणि f दोन आहे आता लंबवर्तुळ x वर्गाचे समीकरण समजा एक चौरस अधिक y वर्ग द्वारे b वर्ग एक समान नंतर f ते p या रेषेवर असलेल्या एका बिंदूचा विचार करा जो फोकस f दोन पासून दोन मार्गांच्या अंतरावर आहे म्हणून हे अंतर pl दोन पट आहे म्हणून रेषेवरील बिंदू l विचारात घ्या f 2 p असे की अंतर f दोन l हे दोन बरोबर आहे a आता आपण या रेषेवर कोणताही बिंदू q घेतला तर आपल्याला हे सिद्ध करायचे आहे की हा q लंबवृत्ताच्या बाहेर आहे म्हणून हे अंतर दोन a काय आहे तर आता हे दोन

लक्षात घ्या a हे l दोन f दोन च्या अंतराएवढे आहे जे qf दोन अधिक ql च्या अंतरापेक्षा कमी आहे म्हणून जर मी या बिंदूला q ते f दोन आणि l जोडले तर त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची ही बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा मोठी आहे म्हणून qf दोन अधिक ql हे अंतर lf 2 पेक्षा काटेकोरपणे मोठे आहे
जे i s 2 a पण मी या बद्दल काय म्हणू शकतो ठीक आहे आपण हा qf एक बघूया तर लक्षात घ्या की pn द्विभाजित कोन f one pf दोन असल्याने आपल्याला pq द्विभाजित कोन f one pl मिळतो कारण या लंब रेषा आहेत
त्यामुळे तुम्हाला पहायचे असेल तर जर हा कोन थीटा असेल आणि हा कोन देखील थीटा असेल तर हा कोन पाई बाय 2 वजा थीटा असेल तर हा कोन पाई बाय 2 वजा थीटा असेल आणि म्हणून हा कोन पुन्हा pi बाय दोन वजा थीटा असेल तर हे दोन कोन समान आहेत म्हणून आपण ते pq पाहतो.
कोन f one pl चा दुभाजक आहे आणि म्हणून हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि म्हणून ql qf एक बरोबर आहे म्हणून ql qf एक बरोबर आहे तर याचा अर्थ काय आहे की दोन a हे qf दोन अधिक qf एक पेक्षा काटेकोरपणे कमी आहे? लक्षात ठेवा की लंबवर्तुळ असा आहे की लंबवर्तुळावरील कोणत्याही बिंदूसाठी दोन केंद्रस्थानापासूनच्या अंतराची बेरीज दोन a एवढी असते कारण येथे अंतराची बेरीज दोनपेक्षा जास्त आहे a याचा अर्थ q लंबवर्तुळाच्या बाहेर आहे आणि तेव्हा आपण आहे हे pn लंबवर्तुळासाठी सामान्य आहे हे सिद्ध झाले आहे ठीक आहे पुढील समस्येसाठी
लंबवर्तुळाच्या पायाचे स्थान लंबवर्तुळाच्या केंद्रस्थानापासून स्पर्शिकेपर्यंत शोधणे आवश्यक आहे, म्हणून समजा आपण लंबवर्तुळाचा विचार x वर्गाने चौरस अधिक y चौरस असा केला आहे.
b च्या चौरसाने b
पेक्षा मोठा असलेला एक बरोबर आहे
त्यामुळे आता आपल्याकडे हे लंबवर्तुळ आहे समजा मी लंबवर्तुळाकडे कोणतीही सामान्य स्पर्शिका घेतली आणि नंतर आपण foci f1 आणि f2 वर पाहिले तर आपण लंबवर्तुळाकार काढू शकता.
foci f1 आणि f2 मधून स्पर्शिका काढायची मग आपल्याला अशा सर्व बिंदूंचे स्थान शोधावे लागेल म्हणून आपल्याला कळते की स्पर्शिकेचे समीकरण आठवते की ज्या स्पर्शिकेचा उतार m आहे त्याचे समीकरण y समान mx अधिक c ने दिले आहे जेथे c वर्ग आहे एक चौरस m चौरस अधिक b वर्ग
त्यामुळे m च्या कोणत्याही निश्चित मूल्यासाठी दोन स्पर्शरेषा असतात ज्या y समान असतात mx अधिक किंवा चौरस m वर्गाचे वजा वर्गमूळ अधिक b वर्ग यावरून आपल्याला वेगवेगळ्या स्पर्शिकेचे समीकरण मिळते आता m ची मूल्ये शोधायची असतील तर समजा हा कोणताही सामान्य बिंदू आहे hk हा लंबाचा पाय आहे तर
समीकरण जर h स्वल्पविराम k हा
foci अधिक वजा ae शून्य वरून लंबाचा पाय असेल तर
hk ला जोडणाऱ्या रेषेचा हा उतार दोन केंद्रस्थानी उणे एक बाय m आहे कारण ही स्पर्शरेषेला लंब आहे आणि म्हणून समीकरण k वजा शून्य समान असेल वजा एक बाय m गुणा x वजा किंवा अधिक ae याचा अर्थ mk अधिक xx आहे h क्षमस्व mk अधिक h वर्ग समान आहे चौरस e चौरसासाठी हे एक समीकरण आहे h स्वल्पविराम k हे स्पर्शरेषेवर आहे म्हणून जेथे स्पर्शरेषेचे समीकरण हे आहे
त्यामुळे k वजा mh वर्ग एक चौरस m चौरस अधिक b वर्ग हे समीकरण दोन आहे जर आपण एक जोडले आणि दोन मग आपल्याला m स्क्वेअर k स्क्वेअर अधिक h स्क्वेअर अधिक दोन mhk अधिक k स्क्वेअर अधिक m स्क्वेअर h स्क्वेअर वजा दोन mhk एक स्क्वेअर e स्क्वेअर अधिक एक स्क्वेअर m स्क्वेअर अधिक b स्क्वेअर मिळतील
त्यामुळे हे येथे रद्द होईल म्हणजे एक अधिक m चौरस सामान्य आहे आणि आपल्याला h चौरस अधिक k वर्ग मिळतो एका चौरसाच्या बरोबरीचा e वर्ग e वर्ग 1 वजा b वर्ग एक चौरस अधिक एक वर्ग m वर्ग अधिक b वर्ग म्हणजे हा चौरस वजा b च्या बरोबरीचा आहे स्क्वेअर अधिक a स्क्वेअर मी स्क्वेअर अधिक b स्क्वेअर b स्क्वेअर रद्द करतो आणि हे स्क्वेअर गुणिले एक अधिक m स्क्वेअरच्या बरोबरीचे आहे
त्यामुळे एक अधिक m स्क्वेअर रद्द केला जाऊ शकतो आणि हे h स्क्वेअर अधिक k स्क्वेअर स्क्वेअरच्या बरोबरीने देते कारण हे कोणत्याहीसाठी खरे आहे h स्वल्पविराम k हा लंबाचा पाय आहे म्हणून स्थान x चौरस अधिक y चौरस चौरस आहे म्हणून या चित्रात हा h स्वल्पविराम k लंबवर्तुळाच्या मध्यभागी असलेल्या त्रिज्येच्या वर्तुळावर आहे म्हणून याला सहायक वर्तुळ म्हणतात
त्यामुळे केंद्रबिंदूपासून स्पर्शिकेपर्यंतच्या लंबाच्या पायाच्या स्थानाचा पाय हा लंबवर्तुळाचे सहायक वर्तुळ आहे ठीक पुढील समस्या आम्हाला लंबवर्तुळामध्ये कोरलेल्या त्रिकोणाचे जास्तीत जास्त संभाव्य क्षेत्रफळ किती आहे हे ठरवायचे आहे,
त्यामुळे ही समस्या सोडवण्यासाठी लंबवर्तुळावरील सामान्य बिंदूसाठी पॅरामीटर वापरुया, म्हणून लंबवर्तुळाकार x वरील कोणतेही तीन बिंदू cos theta b sin theta b समान cos phi b sine phi c बरोबर cos psi b sin psi b समान करूया
चौरस बाय चौरस अधिक y चौरस बाय b वर्ग एक समान आहे म्हणून आपण लंबवर्तुळावरील कोणतेही तीन बिंदू विचारात घेत आहोत जिथे theta phi आणि psi हे उच्चार त्रिकोण आहेत म्हणजे theta phi psi हे बिंदूंचे विक्षिप्त कोन आहेत म्हणून आपण मध्ये पाहिले शेवटचा वर्ग की जर आपल्याकडे हा लंबवर्तुळ असेल आणि जर आपण ab आणि c येथे कोणताही बिंदू घेतला
तर हा विक्षिप्त कोन काहीही नाही पण जर मी सहाय्यक वर्तुळाकडे पाहिले तर आपण सहायक वर्तुळावरील संबंधित बिंदू पाहतो तर आपण हा बिंदू पाहू.
p हा बिंदू q आणि c शी संबंधित एक बिंदू आहे हा c आहे आणि हा बिंदू आहे r
त्यामुळे हा theta phi आणि psi हा बिंदू p चा कोन आहे म्हणून p हा बिंदू आहे a cos theta b sin theta सॉरी a cos theta एक पाप थीटा म्हणून मला लिहू द्या i t पुढच्या जागेत

त्यामुळे p च्या बरोबरीने cos theta a sin theta q बरोबर एक cos phi a sin phi आता r बरोबर cos psi a sin psi b सहाय्यक वर्तुळावरील संबंधित बिंदू x चौरस अधिक y चौरस समान आता चौरस आठवतो जर आपल्याकडे

x एक y एक x दोन y दोन आणि x तीन y तीन असे कोणत्याही तीन बिंदूंचे समन्वय असतील तर त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ ज्याचे शिरोबिंदू x एक y एक x दोन y दोन x तीन y तीन आहेत ते आपल्या अर्धे आहेत x एक y एक एक x दोन y दोन एक आणि x तीन y तीन एक चा निर्धारक पहा आणि याच्या परिपूर्ण मूल्यामुळे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ मिळते म्हणून आपण हे सूत्र वापरू म्हणून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ a abc अर्ध्या गुणाप्रमाणे आहे x एक च्या निर्धारकावर एक cos theta x 2 आहे y 1 आहे b sine theta 1 a cos phi b sin phi 1 आणि a cos psi b sin psi एक हा अर्धा a आहे पहिल्या स्तंभापासून सामान्य आहे आणि b आहे दुस-या स्तंभापासून सामान्य
त्यामुळे अर्धा ab वेळा cos theta sin theta 1 cos phi sine phi 1 आणि cos psi sin psi 1.

त्रिकोण pqr चे क्षेत्रफळ काय आहे जेथे आता pqr त्रिज्या a च्या सहायक वर्तुळावर बिंदू आहेत म्हणून येथे फरक फक्त y निर्देशांक आहे b sin theta ऐवजी i a sin theta आहे त्याचप्रमाणे a cos phi a sin आहे phi one a cos psi a sin psi n one हे अर्धा चौरस गुणा बरोबर आहे cos theta sin theta one cos phi sine phi one आणि cos psi sin psi वन हे येथे समान आहे म्हणून आपण जे पाहतो
ते त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ आहे त्रिकोणाच्या pqr च्या क्षेत्रफळानुसार abc समान आहे जर मी या दोघांना विभाजित केले तर मला हे गुणोत्तर b a ने मिळेल म्हणून आपण पाहतो की लंबवर्तुळा वर कोरलेल्या कोणत्याही त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ संबंधित त्रिकोणाच्या pqr च्या क्षेत्रफळाच्या b द्वारे a स्थिर गुणोत्तर आहे सहाय्यक वर्तुळ म्हणून त्रिकोण abc चे क्षेत्रफळ त्रिकोणाच्या pqr च्या क्षेत्रफळाने b च्या बरोबरीचे आहे आता हा pqr त्रिज्या a च्या वर्तुळात कोरलेला त्रिकोण आहे
त्यामुळे त्याचे क्षेत्रफळ जास्तीत जास्त कधी आहे हे आपल्याला कळते म्हणून पुन्हा हे सत्य लक्षात ठेवा सर जेव्हा त्रिकोण समभुज असतो तेव्हा cle चे जास्तीत जास्त क्षेत्रफळ असते
म्हणून जर माझ्याकडे त्रिज्या a चे वर्तुळ असेल आणि आपल्याला या त्रिकोणाचे जास्तीत जास्त क्षेत्रफळ pqr हवे असेल तर हे घडते जेव्हा हा त्रिकोण समभुज त्रिकोण असेल तेव्हा हे pqr असेल तर हे त्याचे केंद्र आहे वर्तुळ आपण ही त्रिज्या a च्या बरोबरीसाठी घेत आहोत आणि म्हणून आपण या समभुज त्रिकोणाचे जास्तीत जास्त संभाव्य क्षेत्रफळ किती आहे हे शोधू शकतो
कारण जर आपण हा कोन पाई 6 ने पाहिला तर ही बाजूची लांबी
cos pi च्या 2 पट असेल 6 ने जे 2 a मध्ये रूट 3 बाय 2 रूट च्या 3 पट आहे म्हणून जर a या वर्तुळाची त्रिज्या असेल तर बाजूची लांबी qr मूळ 3 पट a आहे आणि म्हणून त्रिकोण pqr चे कमाल क्षेत्रफळ रूट तीन बाय चार च्या समान आहे गुणाकार बाजू लांबी वर्गमूळ तीन एक चौरस जे याच्या बरोबरीचे असेल ते तीन मूळ तीन बाय चार एक चौरस असेल आणि
म्हणून त्रिकोण abc चे कमाल क्षेत्रफळ b गुणिले हे 3 मूळ 3 बाय 4 चौरस असेल जे th च्या बरोबरीचे असेल ree रूट तीन बाय चार पट a b
त्यामुळे हे एका लंबवर्तुळामध्ये कोरलेल्या त्रिकोणाचे जास्तीत जास्त संभाव्य क्षेत्रफळ आहे
ठीक आहे,
त्यामुळे आपण या व्याख्यानाच्या शेवटी पोहोचू या पुढील लेक्चरमध्ये आपण हायपरबोला आणि आयताकृती हायपरबोलावर काही समस्या करू.
धन्यवाद.