



uh c ماننس a by d one o two اور d minus b by d one o two اگر ہم پچھلے اعداد و شمار پر واپس جائیں

تو ہمیں کیا نظر آتا ہے کہ اگر ہم اس پر

توجہ مرکوز کریں

d کچھ نہیں ہے مگر m دو ao ماننس c کچھ نہیں ہے مگر m ایک o پھر ہم دیکھتے ہیں کہ m دو o ایک o تو صحیح زاویہ مثلث آزمائیں کی نشاندہی کرتے ہیں o1 o2 کے اور آئیے ہم ڈیٹ کرتے ہیں آئیے اس زاویہ کو b ماننس

دو پر کچھ o سے ایک d کا تقسیم a ماننس c تو یہ کون سا زاویہ ہے ہم اسے الفا سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ہم استعمال کرتے ہیں کہ ہمیں o ہے۔ s سے تقسیم کیا گیا سائن الفا do one o two کو b ماننس d اور cos alpha نہیں بلکہ کی شکل ہے اور sin a sin b جمع cos a cos b سائن الفا اور یہ سائن الفا ہے اور اس لیے ہمارے پاس یہ اظہار ہے لیکن یہ cos یہ کے سوا کچھ نہیں ہے۔ یہ بھی واضح ہے کہ الفا کی قدر کسی چیز پر منحصر نہیں ہے سوائے دو دائروں کے cos ماننس الفا کے phi یہ مراکز کے نقاط کے جو ہمیں دیا گیا ہے لہذا الفا ہمیں معلوم ہے لہذا جو چیز ہمارے لئے نامعلوم ہے وہ فائی اور تھیٹا کی قدر ہے کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ ہم دو دائروں کے تقاطع کے پوائنٹس کو بالکل نہیں جانتے ہیں اور یہی ہماری کوشش ہے کہ ہم ایک طریقہ وضع کریں ہماری کوشش یہ ہے کہ ایک ایسا طریقہ تلاش کیا جائے جس سے چورایے کے پوائنٹس کی خصوصیت ہو تاکہ پوائنٹس ان دو قطبی شکلوں کے ذریعے تقطیع کی یا تھیٹا سے واضح ہوتا ہے لہذا ہم نے یہاں تھیٹا کو نقل کیا phi تلاش کرنے کے قابل ہوتے ہیں یہ phi شکل دی گئی تھی لہذا جس لمحے ہم

تو اب آہ ہمارے یہاں کیا ہے اگر ہم اس مساوات کو دیکھیں

تاکہ ہم حل کر سکیں rms کے phi میں مساوات te تو ہمارے پاس بنیادی طور پر ایک مثلث ہے

ماننس الفا phi دو مربع جمع دو o ایک d دو مربع جمع r ایک مربع ہے r تو یہ مساوات ٹھیک ٹھیک ہے یہ مساوات میں لہذا اس مساوات میں سب کچھ معلوم ہے ہمیں کیونکہ ہم مساوات یا دو دائروں کو جانتے ہیں لہذا ہم رڈاس کو جانتے ہیں ہم مراکز کے cos کے جان جانے کے بعد اس مساوات کو phi ہے جسے ہم phi کے درمیان فاصلہ جانتے ہیں ہم یہ زاویہ الفا جانتے ہیں اب جو معلوم نہیں ہے وہ کی قدر یہاں ڈالیں اور ہم اس مساوات سے اس نقطہ انتفاضہ کے نقاط phi حل کر کے جان سکتے ہیں ہم بہت آسانی سے جان سکتے ہیں۔ حاصل کر سکتے ہیں

دو ایک r دو پورے مربع پر دو o ایک d دو مربع جمع r ایک مربع ماننس r ہے cos تو پچھلی سلائیڈ سے ہمارے پاس فائی ماننس الفا کی کی قدر معلوم کرنے کے لیے اس مساوات کو حل کرنا ہوگا جو اس طرح گرافی طور پر کیا جا phi یا دو کرتے ہیں اس لیے بنیادی طور پر ہمیں ماننس الفا cos کے phi سکتا ہے اس لیے ہم عمودی محور پر فائی ماننس الفا بمقابلہ افقی محور پر فائی اور گراف کا گراف پلاٹ کریں گے۔ کچھ اس طرح نظر آسکتا ہے

cos of phi ماننس alpha alpha cos of phi صفر ہے phi تو آئیے ہم کہتے ہیں کہ یہ الفا ہے لہذا جب

cos ماننس الفا کا الفا phi ہے جو کہ جب

تو ہم اس قدر کو کہتے ہیں اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک تک پہنچ جائے گی

تو ہم کہتے ہیں کہ ہمارے پاس کچھ ایسا ہے

کی یہ قدر جہاں ہم اپنی کم سے کم تک پہنچ جاتی ہے phi تو یہ قدر دو پائی ہوگی اور یہ قیمت

ماننس ون ہے cos ماننس الفا کی phi پھر pi مساوی الفا پلس phi تو ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہمارے پاس

کے برابر جو کہ اب یہ نقطہ ہے اگر pi برابر الفا پلس phi تو جو کم سے کم ممکنہ قیمت ہے وہ حاصل کر سکتا ہے اور یہ حاصل کرے گا یہ واضح ہو کہ اگر یہ قدر اس مساوات کے دائیں جانب ایک مطلق قدر ہے جو ایک کے برابر سے کم ہے

محور سے افقی نقل مکانی کے ذریعہ ایک لکیر کے ذریعہ پیش کر سکیں x تو ہمارے پاس ایک حل ہوگا تاکہ ہم اس قدر کو

تو آئیے ایک سبز نقطے والی لکیر استعمال کریں۔ بہت

کی قدر ہے ہم ایک سے کم کہتے ہیں فرض کرتے ہیں کہ یہ نصف کے برابر ہے s تو فرض کریں اگر تھی

تو اگر یہ قدر نصف کے برابر ہے

تو آدھا یہاں کہیں ہے کیونکہ یہ ایک ہے

محور کے m x تو یہ نصف ہے اور پھر اس قدر کے مطابق ہے جو ہمیں بتاتا ہے۔ نصف کا کہنا ہے کہ ہم ایک نقطے والی لکیر کھینچیں گے جو کے لیے وکر کو کاٹ cos phi محور سے نصف سے ہے گھر ہو گئی ہے لہذا وہ جگہیں جہاں یہ سبز نقطے والی لکیر x توازی ہے اور کی مساوات اس لیے ظاہر ہے کہ آپ کو معلوم ہے y دے گی کیونکہ یہ سبز لکیر ہندسی طور پر ہے اس گراف کے لیے اس قدر کے برابر لائن ماننس الفا کے لیے وکر کو کاٹ رہی ہے یہ دونوں قدریں برابر ہوں گی اور اس لیے اس صورت میں اگر phi cos کہ جہاں بھی یہ گرین لائن یہ نصف ہو

تو پانچ کی دو قدریں ہوں گی یہ قدر اور یہ قدر درحقیقت یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ جب تک دائیں طرف کی اس قدر کی ماڈیولس قدر

سختی سے ایک سے کم ہے اگر ماڈیولس قدر ایک سے سختی سے کم ہے

کی phi کے دو حل ہوں گے کیونکہ اس مکمل ایک مکمل چکر کی وجہ سے یہاں phi ہمیشہ t تو کوئی بھی آسانی سے دیکھ سکتا ہے۔ تھا

دو مختلف قدریں ہوں گی جو اس مساوات کو پورا کریں گی اور ایسا اس صورت میں ہوگا جب اس دائیں ہاتھ کی مطلق قدر ہو جو کہ ایک سے سختی

سے کم ہو۔ مثال کے طور پر ہم نے آدھا لیا اور پھر ہم نے یہ دیکھا اور یہ پانچ کی دو مختلف قدریں تھیں تاہم اگر ایسا ہے

تو وہ خاص معاملہ جہاں اس دائیں ہاتھ کی مطلق قدر ایک سے کم ہے اس منظر نامے کے مطابق ہوگی جہاں دو دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

، دو پوائنٹس پر بالکل دو پوائنٹس پر تاہم ہم دیکھتے ہیں کہ اگر دائیں ہاتھ کی یہ سائیڈ ایک کے برابر ہو یا ماننس ون

تو اگر یہ دائیں ہاتھ کی سائیڈ ایک کے برابر ہے

تو سبز نقطے والی لکیر کچھ اس طرح ہے جس صورت میں ایک کی اس قدر کے مطابق سبز نقطے والی لکیر اس منحنی خطوط کو صرف ایک جگہ

کے مساوی ہے الفا اور اس وجہ سے دونوں دائرے ایک phi کے مساوی ہے جو phi پر چھوتی ہے بالکل ایک جگہ جو الفا کے مساوی

دوسرے کو صرف ایک جگہ پر چھوئیں گے جس کے نقاط ان نقاط کے ذریعہ دیئے گئے ہیں اس مساوات کے ذریعہ دیئے جائیں گے لیکن الفا کے

برابر فائی کے ساتھ اگر یہ دائیں ہاتھ کی طرف جہاں اگر رڈاس اور مراکز کے درمیان فاصلہ تھا اس طرح کہ یہ دائیں ہاتھ کی طرف ایک کے

ماننس ون کے برابر ہے یہاں تک کہ جب یہ ماننس ون کے برابر ہے y برابر ہے اسی طرح جب یہ برابر ہے جب یہ دائیں ہاتھ کی طرف

کی بالکل ایک قدر ہے جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے جس کا بنیادی phi تو سبز نقطے والی لکیر کچھ اس طرح ہے اور اس صورت میں بھی

ہے جہاں یہ دونوں دائرے ایک دوسرے کو چھوئیں گے لہذا اس xy کے مساوی صرف ایک نقطہ phi کے برابر pi مطلب یہ ہے کہ الفا پلس

خاص صورت میں جہاں یہ دائیں ہاتھ ایک کے برابر ہے یا ماننس ایک ہم دیکھتے ہیں کہ دو دائرے ایک دوسرے کو صرف ایک نقطہ پر کاٹیں گے جو

کہ بنیادی طور پر ہے جس کا بنیادی مطلب یہ ہے کہ وہ ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر چھوئیں گے

تو اگلے ہم یہ دیکھنے کی کوشش کریں گے کہ ان دونوں صورتوں

کی اس آہ اور دونوں مراکز کے  $r_1$   $r_2$  توں کو کس طرح نمایاں کرنے کی کوشش کی جائے گی جہاں حلقے ایک دوسرے کو چھوتے ہیں  $d$  دو پورا مربع بذریعہ دو  $o$  دو مربع جمع کرو ایک  $r$  ایک مربع مائٹس  $r$  درمیان فاصلہ اس لیے ہم نے ابھی کہا تھا کہ ہم کہتے ہیں۔  $\cos$  دو برابر ہے آئیے مائٹس ون کہتے ہیں اور آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ کس چیز سے مطابقت رکھتا ہے جو کہ فائی مائٹس الفا کے  $o$  ایک کوما کے برابر ہے

تو یہ ہو گا اگر اور صرف اگر ایسا ہو

تو اگر ہم آہ کرنے کی کوشش کریں

دو  $r$  دو پورا مربع مائٹس دو  $o$  one  $o$  دو مربع پلس  $r$  ایک مربع برابر ہے  $r$  تو صرف اس کو حل کریں جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ ایک یا  $r$  دو مائٹس ڈو ایک او دو پورے مربع کے برابر ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ  $r$  ایک مربع  $r$  دو جس کا مطلب ہے کہ  $do$  one  $o$  تو اب واضح طور پر یہ معاملہ ممکن نہیں ہے کیونکہ ہم نے  $r$  دو مائٹس  $o$  ایک برابر ہے ایک  $r$  تو کے برابر ہے مائٹس ڈو ایک او ٹو یا  $r$  تو فاصلے سے بڑا ہے۔ دونوں مراکز کے درمیان فاصلہ ہمیشہ ایک غیر منفی مقدار ہے  $d$  دو کے برابر ہے اور  $r$  ایک  $r$  شروع میں کہا تھا کہ اور اس لیے یہ امکان ہے کہ یہ ممکن نہیں ہے

تو واحد امکان یہ ہے اور یہ شرط اس کے سوا کچھ نہیں ہے کہ مراکز کے درمیان فاصلہ رداس کے مجموعے کے برابر ہو۔

تو یہ ایک ایسی حالت ہے جس میں دائیں ہاتھ کی طرف مائٹس ون کے برابر ہے لیکن آئیے ہم بندسی طور پر یہ بھی دیکھنے کی کوشش کریں کہ آہ کا کیا مطلب ہے

تو جب دو مراکز کے درمیان فاصلہ رداس کے مجموعے کے برابر ہو

$\phi$  مائٹس ون ہے یا جس کا بنیادی طور پر یہ مطلب ہے کہ  $\cos$  تو یہ اظہار مائٹس ون ہوتا ہے۔ جس کا مطلب ہے کہ فائی مائٹس الفا کی  $\pi$  کے برابر ہے الفا پلس  $\phi$  ہے یا بنیادی طور پر وہ  $\pi$  مائٹس الفا بنیادی طور پر  $\phi$  برابر ہے لہذا

کے برابر ہے اب ہم اس اعداد و شمار پر واپس جاتے ہیں آئیے دیکھتے ہیں کہ اس کا کیا مطلب ہے  $\pi$  الفا جمع  $\phi$  تو ہمارے پاس جو ہے وہ  $\phi$  جب ہم کہتے ہیں کہ

الفا پلس پائی کے برابر ہے لہذا ہم اس آہ کی صورت حال کی تحقیق کرنا چاہتے ہیں لہذا آہ ہم اس انگ کو دیکھتے ہیں۔  $\phi$  تو ہم نے کہا ہے کہ  $le$

تو یہ زاویہ یہاں ہے

یہ زاویہ  $o_1$   $o_2$   $po_1$   $o_2$   $p$  مائٹس الفا ہے اور اس وجہ سے یہ زاویہ  $\pi$  by 2  $\pi$  تو یہ  $90^\circ$  ڈگری ہے یہ زاویہ یہاں ظاہر ہے سے ظاہر کرتے ہیں لہذا یہ زاویہ بیٹا شمار کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ فائی ہے یہ  $90^\circ$  ہے یہ پائی ہائی 2 مائٹس الفا ہے  $\beta$  جسے ہم

تو یہ نکلے گا

الفا پلس پائی کے برابر ہے جو ہم منظر نامہ ہے ابھی غور کر رہے ہیں  $\phi$  پلس الفا مائٹس فائی اب جب  $\pi$  بیٹا برابر  $\pi$  تو بیٹا نکلے گا

تو اگر ہم اس فائی کو الفا پلس پائی سے بدل دیں

تو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایسا ہوتا ہے

تو بیٹا اصل میں صفر کے برابر ہے بیٹا صفر کے برابر ہے لیکن بیٹا صفر کے برابر کا کیا مطلب ہے

تو آئیے اب اس مثلث پر

$p$  دو  $o$  توجہ مرکوز کریں ایک

$p$  اس پر ہے کیا اس نقطہ  $p$  تو بیٹا صفر کے برابر ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ زاویہ بیٹا صفر پر گرنے والا ہے جس کا مطلب ہے کہ یہ نقطہ دو پوائنٹس کے بیچ میں کہیں ہونا چاہئے ایک یا دو کا  $o$  کو اس پر سیدھی لکیر پر ایک

تو بنیادی طور پر یہ مثلث اے ایک پو دو

پوائنٹ کے ساتھ ایک سیدھی لکیر بن جاتی ہے لہذا یہی ہوتا ہے  $p$  ایک پو دو پوائنٹس ایک اور او دو کے درمیان کہیں  $o$  تو بیسی کالی یہ مثلث

جب بیٹا صفر پر گرتا ہے جب بیٹا صفر کے برابر ہوتا ہے اور اس صورت میں اس کا بنیادی مطلب کیا ہے

تو یہ بنیادی طور پر کیا ہے اس معاملے میں بنیادی طور پر آہ اس شرط کا بنیادی طور پر مطلب یہ ہے کہ ہمارے پاس پہلے دائرے کے مرکز میں ہے اور ان کا نقطہ جہاں وہ ایک دوسرے کو چھوتے ہیں یہ دونوں دائرے ایک  $o_2$  ایک ہے اور ہمارے پاس دوسرے دائرے کے مرکز کے طور پر

سیدھی لکیر پر ہے جو مراکز کو جوڑتا ہے اس کا یہی مطلب ہے اور  $p$  ہے اور یہ نقطہ  $p$  دوسرے کو بالکل ایک نقطہ پر چھوتے ہیں جو پوائنٹ کے درمیان۔ دو  $o$  یہ مرکزوں کو جوڑنے والی سیدھی لائن کے درمیان کہیں واقع ہے لہذا ایک اور

پر اگر ہم ایک کھڑا کھینچتے ہیں  $p$  اور مزید اگر ہم کہتے ہیں  $p$  دو یہ رابطہ کا نقطہ ہے  $o$  ایک  $o$  تو ہمارے پاس کچھ اس طرح ہے دو یہ کھڑی یہ نیلی لکیر ہے پھر یہ واضح ہے کہ اس نیلی لکیر پر کسی بھی نقطہ  $o$  پر ہم اس سیدھی لکیر پر ایک کھڑا کھینچتے ہیں ایک  $p$  تو

اور اس مرکز کے درمیان سب سے کم فاصلہ پہلے دائرے میں سے ایک مرکز سے اس سیدھی لکیر تک کا کھڑا فاصلہ ہوگا اور یہ کھڑا فاصلہ پہلے دائرے کا رداس ہے یہ فاصلہ  $p$  ہے۔ کیونکہ ہم نے اس لائن کو نوے ڈگری سے ایک او دو پر بنایا ہے اور کیونکہ ایک  $p$  ظاہر ہے کہ ایک

ایک کے برابر ہے اب واضح طور پر اگر ہم اس نیلی لائن پر کوئی اور نقطہ لیں  $p$  ایک

تھا اور اب ہم سیدھی لکیر پر ایک  $p$  ایک سے سختی سے زیادہ ہونا چاہئے کیونکہ ایک کے قریب ترین نقطہ یہ  $r$  تو ایک سے اس نقطہ کا فاصلہ کے علاوہ کسی بھی  $p$  نہیں ہے لہذا یہ واضح ہے کہ اس نقطہ کا فاصلہ اس نیلی سیدھی لکیر پر  $p$  اور نقطہ کا انتخاب کر رہے ہیں جو

کریں  $sh$  ایک سے زیادہ ہوگا اور اس لیے وہ نقطہ اس پہلے دائرے کے باہر واقع ہوگا صفر کے برابر اسی طرح ہم  $r$  دوسرے نقطہ کا رداس کے علاوہ سیدھی لکیر  $p$  ہے۔ کوئی بھی نقطہ بہت آسان ہے اسی طرح اسی طرح کے دلائل کا استعمال کرتے ہوئے یہ دکھانا بہت آسان ہے کہ

پر کوئی بھی نقطہ اس دوسرے دائرے کے باہر بھی پڑے گا اور اس وجہ سے سیدھی لکیر کے تمام نکات اسی طرح اور اس لیے واحد سیدھی لکیر ہے اور اس وجہ سے یہ سیدھی لکیر ان دونوں دائروں کے لئے ٹرانسورس مشترکہ ٹینجنٹ  $p$  کا نقطہ جو دونوں دائروں کو چھوتا ہے یہ نقطہ

ایک جو ہم نے ابھی دیکھا ہے وہ یہ ہے کہ اگر دونوں ایسے ہیں اور میں یہ صورت حال اگر آپ کو  $d$  کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا یہ حالت

ہمارے پچھلے لیکچرز یاد ہوں

تو ہم کہتے ہیں کہ جب بھی ایسا ہوتا ہے کہ اس نقطہ کے رابطے کا نقطہ جہاں دو دائرے چھوتے ہیں اگر وہ دونوں مراکز کے درمیان ایک ہی

سیدھی لکیر پر واقع ہے

دو کے  $o$  دو اور ایک اور  $o$  اس سیدھی لکیر پر ایک  $p$  تو اگر اس نقطہ کا نقطہ جہاں دو دائرے ہیں۔ ایک دوسرے کو چھوئے جو یہ نقطہ ہے لہذا ہم جو دکھاتے ہیں وہی ہے جو ہم نے  $o$  درمیان ہے پھر ہم نے کہا جب ہم کہتے ہیں کہ یہ دونوں دائرے ایک دوسرے کو باہر سے چھوتے ہیں

دکھایا ہے کہ اگر دو دائرے باہر سے چھوتے ہیں

دو ہے، اس لیے یہ ہم نے ابھی سختی سے دکھایا ہے تاہم دوسرے کا  $r$  ایک جمع  $r$  تو یہ درست ہونا چاہیے کہ دونوں دائروں کے درمیان فاصلہ

کیا ہوگا؟ معکوس دلیل ہم یہ کہتے ہیں کہ ہمیں دو دائرے دیئے گئے ہیں اور کہا جاتا ہے کہ مراکز کے درمیان فاصلہ  $rd$  کے مجموعے کے برابر ہے

تو یہ الٹا دلیل ہے

تو ہمیں کہا جاتا ہے کہ مراکز کے درمیان فاصلہ  $rd$  کے برابر ہے۔  $rd$  کے مجموعے

پر چھوئیں گے جو کہ حقیقت میں درست ہے کیونکہ اگر ہم  $p$  تو کیا اس کا مطلب یہ ہے کہ دونوں دائرے بیرونی طور پر بالکل ایک نقطہ

ڈالتے ہیں  $ah$  مساوات کے ساتھ شروع کرتے ہیں اور اگر ہم اسے یہاں اس اظہار میں

دو دو ایک  $r$  دو پورا مربع بذریعہ دو  $o$  ایک  $d$  دو مربع جمع  $r$  ایک مربع ماننس  $r$  برابر ہے  $\cos$  تو ہم جانتے ہیں کہ فائی ماننس الفا کی

دو ڈالیں  $o$  دو اب اس مساوات میں اگر ہم اسے  $o$

دو کے برابر ہو جائیں اور تھوڑا کریں ریاضی جو ہم دیکھیں گے وہ ہے۔ یہ قدر ماننس ون پر نکلے گی اور پھر اس کا بنیادی  $r$  ایک جمع  $r$  تو

پر چھوئیں گے اس کا تصور کرنا بھی  $p$  طور پر مطلب یہ ہوگا کہ بیٹا صفر کے برابر ہے اس کا مطلب یہ ہوگا کہ دونوں دائرے ایک دوسرے کو

ساتھ دونوں سیدھی لائن کی طرف آنا شروع ہو جائیں گے جو مراکز  $r$  مشکل نہیں ہے کیونکہ بیٹا صفر پر جاتا ہے۔ کیا ہوگا کہ یہ بازو اور یہ

میں شامل ہو جائیں گے لیکن یہ تب ہی ہو سکتا ہے جب ہم اس دائرے کو آہستہ آہستہ باہر لے جائیں

تو کیا ہوگا کہ یہ زاویہ بیٹا اس وقت تک کہ ہونا شروع ہو جائے گا جب تک کہ ہم اسے اتنا آگے نہ لے جائیں کہ بالکل ایک نقطہ ہے جہاں یہ دونوں

دائرے یکساں طور پر چھوئیں گے اگر ہم جب اسے طالب علموں کے لیے اسی طرح ایک مشق کے طور پر چھوڑا جا سکتا ہے

تو اگر ہم حق کو برابر کرتے ہیں۔ اس مساوات کا ہاتھ اس مساوات کے دائیں ہاتھ میں جمع ایک کے برابر ہے کیونکہ ہم نے پہلے ماننس ون صورت

دیکھی ہے اگر یہ جمع ایک کے برابر ہے

دو کے برابر ہے ہمارے  $r$  ایک ماننس  $r$  کر سکتے ہیں۔ اوہ کہ دو مراکز کے درمیان فاصلہ  $sh$  تو یہ ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہاں سے ہم

دو سے بڑا لیا ہے لہذا یہ حقیقت میں  $rd$  کے مطلق فرق کے برابر ہے لیکن پھر اگر یہ برابر ہے ایک واحد حل  $r$  ایک  $r$  معاملے میں ہم نے

الفا کے برابر ہے  $phi$  برابر الفا کے مساوی ہوگا اگر ہم اس اعداد و شمار پر واپس جائیں جب  $phi$  برابر الفا اور  $phi$  ہے

کا مطلب ہے کہ یہ دائرہ اندر کی طرف بڑھ رہا ہے تاکہ یہ اس طرح حرکت کر رہا ہے  $pi$  کے مساوی ہے لہذا بیٹا برابر  $pi$  تو یہ بیٹا برابر

لہذا آپ مثالوں کے ذریعے یہ دکھا سکتے ہیں کہ ایک منظر نامہ یہ ہے کہ جب دائرے آہ کو چھو رہے ہوں

تو دائرے دو پوائنٹس پر آپس میں جڑ رہے ہیں جو اس طرح ہے اس صورت میں یہ زاویہ بیٹا ہے اگر یہ چھوٹا دائرہ مزید اندر چلے جائیں گے

تو ایک منظر کچھ اس طرح ہوگا

تو یہ مراکز ہوں گے یہ مراکز کو جوڑنے والی لائن ہوگی اور پھر اس طرح اب یہ زاویہ بیٹا بڑھے گا

یہ شدید تھا اب یہ رکاوٹ بن گیا ہے کیونکہ یہ دائرہ اندر چلا گیا ہے اور جب ایسا ہوتا ہے کہ دوسرا دائرہ بالکل اندر  $r$  تو اب یہ زاویہ بیٹا ہوگا

اتنا حرکت کرتا ہے کہ یہ صرف ایک نقطہ پر بڑے دائرے کو چھوتا ہے

تو اس صورت میں کیا ہوگا؟ کہ یہ

تھا  $p$  تو یہ پوائنٹ

$pi$  ایک ہی سیدھی لائن پر ہوں گے کیونکہ جب بیٹا  $p$  دو اور  $o$  یہاں آئے گا اور ایسا ہوگا کہ ایک  $p$  تو اس صورت میں کیا ہوگا کہ یہ نقطہ

بنتا ہے

$o$   $1$   $o$   $2$  ایک سیدھی لکیر میں سمٹ جائے گا لیکن پھر ماننس ون کیس سے فرق یہ ہے کہ ماننس ون کیس میں مثلث  $p$  دو  $o$  تو یہ مثلث ایک

تھا  $po$   $2$  ایک سیدھی لکیر میں سمٹ گیا جو کہ ایک  $p$

کے ساتھ ایک اور  $p$  تو  $o$   $one$   $po$  اس سیدھی لکیر میں سمٹ گیا ہے  $p$  دو  $o$  تو جب ہمارے پاس ماننس  $1$  تھا۔ اگر ہم دیکھیں کہ مثلث ایک

کے درمیان تھا۔ دو  $o$  ایک اور  $p$  دو کے درمیان تھا اس لئے ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا اور کیونکہ  $o$  ایک اور  $p$  دو کے درمیان ہے کیونکہ  $o$

کا نقطہ ہے۔ اس نقطہ کی حکمت عملی جہاں دو دائرے چھوتے ہیں اس طرح ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ دونوں دائرے ایک دوسرے  $p$   $con$  اور

تو بیرونی طور پر چھو رہے ہوں گے لیکن اب اس کے علاوہ ایک صورت میں جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ مثلث ایک سیدھی لکیر میں گر جاتا ہے

اتنا واضح طور پر یہ صرف اس صورت میں ہو سکتا ہے جب دائرہ چھوٹا دائرہ اندر سے بڑے کو چھوتا ہے کیونکہ  $p$  دو ہے۔  $o$   $one$   $o$  جو

رابطہ کا نقطہ یا نقطہ جہاں دو دائرے چھوتے ہیں وہ دونوں مراکز کے درمیان نہیں ہے وہ ایک ہی سیدھی لائن پر ہے لیکن جب آگے بڑھایا جائے

تو ہم اس سیدھی لکیر کو مرکز سے جوڑتے ہوئے لیتے ہیں اور اگر ہم اسے آگے بناتے ہیں

تو  $o$   $one$   $o$  سے باہر ہے حالانکہ یہ ایک ہی لائن پر ہے لیکن یہ لائن سیگمنٹ  $o$  لائن سیگمنٹ ایک  $p$  سے ملتی ہے لہذا  $p$  تو یہ دراصل

حصہ نہیں ہے اور اس سے ہمیں یہ نتیجہ اخذ کرنے میں مدد ملتی ہے کہ دونوں دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھو رہے ہوں گے اور

اس کے لیے یہ شرط ہے اور اس کے برعکس بھی یہ دکھانا بہت آسان ہے کہ اگر ہم بھول جاتے ہیں

تو آپ کو معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم صرف دیکھتے ہیں۔ اس مساوات کو چھوڑ کر آپ جانتے ہیں کہ ہم نے اسے ایک کے برابر دو رکھا تھا ہم نے

اسے ایک کے برابر اس معاملے میں بدل دیا تھا جہاں ہم دیکھنا چاہتے تھے کہ کیا ہوتا ہے کیونکہ ہم ان دو منظر ناموں میں دلچسپی رکھتے تھے

کا صرف ایک حل اس کا بنیادی طور پر مطلب یہ ہے کہ دو دائرے ایک  $phi$  جہاں ہمارے پاس صرف ایک حل ہے کیونکہ جب ہمارے پاس

اگر ہم اس سلائیڈ پر واپس جائیں  $ah$  دوسرے کو صرف ایک جگہ پر کاتتے ہیں کیونکہ اگر ہم

کو تبدیل کرتے ہیں  $phi$  کے مطابق ہوگی کیونکہ اگر ہم  $p$  کی ہر ایک مختلف قدر ایک مختلف نقطہ  $phi$  کی مختلف اقدار ہوں گی  $phi$  تو

کو آرڈینیٹ بدل جائیں گے جس کا مطلب ہے کہ ہمیں ایک دوسرے سے تقطیع کا نقطہ ملتا ہے لیکن ہم نے دیکھا کہ کچھ خاص  $y$  اور  $x$  تو

منظر ناموں میں جہاں یہ جہاں ہے ہم نے دیکھا کہ خاص منظر ناموں میں جہاں یہ دائیں ہاتھ کی طرف یا

تو جمع ایک ہے یا ماننس ایک ایسی صورت

کا صرف ایک حل ہے یا پانچ کی ایک قدر ہم مساوات کو حل کرتے ہیں وہاں دو قدریں نہیں ہیں بالکل ایک قدر ہے اور واضح طور پر  $phi$  توں میں

پانچ کی ایک قدر ہوگی بالکل ایک نقطہ پر جواب دیں جہاں دو دائرے آپس میں ملیں گے جس کا بنیادی مطلب یہ ہے کہ اس مقام پر دو دائرے ایک

دوسرے کو چھوئیں گے اور پھر ہم اس معاملے کے لیے بھی کر سکتے ہیں ہم آپ کو معلوم ہے کہ ہم اس شرط سے شروع کرتے ہیں اگر ہم اس

شرط سے شروع کرتے ہیں

تو اور اگر آپ اس قدر کو یہاں رکھیں گے

تو ہم کیا دیکھیں گے کہ یہ دائیں ہاتھ کی طرف پلس ون کے برابر ہوگا

تو آہ جس کا بنیادی مطلب یہ ہے کہ اگر یہ شرط درست بھی ہے

تو اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ دونوں دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں

فاصلہ مطلق فرق کے برابر ہے  $d$  تو ہم کیا شو میں نے اب دکھایا ہے کہ اگر

تو دونوں دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں اور اس سے پہلے ہم نے دکھایا ہے کہ اگر دو دائرے اندرونی طور پر چھوتے ہیں

اگر دو دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں

تو یہ سچ ہے کہ ایک یا دو کرنا بالکل فرق کے برابر ہے اور کچھ ایسا ہی ہم نے اس معاملے کے لئے دکھایا تھا جہاں وہ باہر سے چھوتے ہیں اور پھر ہم نے اپنے پچھلے میں بھی دیکھا تھا۔ لیکچر کہ دو دائرے ایک دوسرے کو ایک یا دو پوائنٹس پر کاٹتے ہیں تو وہ بالکل دو پوائنٹس پر کاٹتے ہیں اگر اس دائرے ہاتھ کی وسعت ہے جو ایک سے کم ہے اور اس کا تجزیہ ہم نے اپنے پچھلے لیکچر میں کیا تھا۔ لہذا اگر طول و عرض ایک سے کم ہے

تو دونوں دائرے بالکل دو نقطوں پر آپس میں ملتے ہیں اور اگر اس قدر کا ماڈیولس ایک کے برابر ہے

تو دو دائرے ایک دوسرے کو چھوتے ہیں اور یقیناً اگر یہ قدر مطلق قدر ایک سے زیادہ ہے

کا حل اگر یہ قدر ایک سے زیادہ ہے اگر اس کی مطلق قدر ایک سے زیادہ ہے  $\phi$  تو کوئی نہیں

تو واضح طور پر پانچ کا کوئی حل نہیں ہے کیونکہ کوزائن فنکشن کی حد جمع ایک اور مانس ون کے درمیان ہے جس کا بنیادی مطلب ہے کہ چونکہ

کا کوئی حل نہیں ہے اس کا بنیادی مطلب یہ ہے کہ دو دائرے ایک دوسرے کو نہیں چھوتے اور نہ ہی وہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں دو  $\phi$

دائرے ایک دوسرے کو نہیں کاٹتے ہیں اور پھر تھوڑا سا ب اس کیس کے لیے ہم نے یہ ظاہر کیا کہ آپ کے مطابق دو کیسز ہیں جو آپ جانتے ہیں

کہ وہ باہر سے چھوتے ہیں یا اندرونی طور پر اور پھر اس آہ خاص کیس کا تجزیہ کرنا زیادہ مشکل نہیں ہے اور میرے خیال میں پچھلے لیکچر میں

دو سے کم ہے اور اگر یہ مطلق فرق سے بڑا ہے اگر ایسا ہے  $r$  ایک جمع  $r$  دو  $o$  ہم نے کہا تھا کہ اگر ایک

تو یہ آہ یہاں پر یہ پہلا معاملہ بالکل اس شرط کے برابر ہے لہذا ہم ایک چھوٹی سی مثال لیتے ہیں صرف یہ بتانے کے لئے کہ ہم نے کیا کیا اس

لیکچر میں ہم نے اب تک کیا کیا ہے

ہوئے دیں  $y$  اور  $x$  تو آئیے یہ کہتے ہیں کہ ہمارے پاس دو دائرے ہیں لہذا یہ محور

تو ہمارے پاس ایک دائرہ ہے جس کا مرکز اصل میں ہے اور جس کا رداس  $s$  ہے ہمیں تین یونٹس کہتے ہیں۔ دائرہ کچھ اس طرح ہے

ٹو ہے جس کا مرکز اس مقام پر ہے جو پانچ کوما صفر ہے اور جس کا رداس  $s$  تو یہ پہلا دائرہ ہے اور ہم کہتے ہیں کہ ہمارے پاس ایک اور دائرہ

بھی ہے تین یونٹس کا کہنا ہے

$p$  دوسرے دائرے میں دونوں کا ایک ہی رداس ہے لیکن مراکز مختلف مراکز پر ہیں ان کے مختلف نقاط ہیں لہذا وہ ان دو پوائنٹس  $e$  تو یہ ہے

پر ایک دوسرے کو آپس میں جوڑتے ہیں اور اگر ہم اسے لکھیں  $q$  اور

ہے  $p$  اور یہ  $o_1$   $o_2$  تو ان دو مثلثوں کے لیے یہ ہے

دو پانچ ہے  $o$  ایک  $d$  دو ہے تین اور  $r$  ایک تین ہے  $r$  ہے جس سے ہمیں  $p$  دو  $o$  ایک  $o$  تو یہ مثلث

تو اس صورت میں ہمیں کیا ملے گا وہ یہ ہے کہ اگر ہم پیروی کریں وہی تجزیہ جو ہم نے عام کیس کے لیے کیا ہے پھر ہمیں کیا ملے گا وہ یہ ہے

برابر ہوگی  $\cos$  کہ فائی مانس الفا کی

تو  $\cos$  of alpha ہمارا الفا ایسا ہے کہ  $ah$  یہاں  $ah$  تو

کوما ڈی  $c$  تو یہ نکتہ یہ ہے کہ ہم نے پہلے مرکز کی نمائندگی کی تھی۔ پہلے دائرے کو ایک کوما ب کے ذریعے دوسرے دائرے کے مرکز کے

دو سے  $do$  one  $o$  دو سے اور دو مراکز کے درمیان فاصلہ  $r$  ایک سے اور دوسرے دائرے کا رداس  $r$  کے ذریعے پہلے دائرے کا رداس

تھی ہمارے پاس یہ مساوات  $ah$  مانس الفا کی وجہ  $\phi$  تھا لہذا ہمارے پاس اس مثال کے لیے یہی ہے اور  $do$  one  $o$  two پر  $b$  مانس

دو  $o$  ایک  $d$  دو  $r$  دو مربع ہم دو  $o$  کے برابر ہے  $d$  دو مربع جمع  $r$  ایک مربع مانس  $r$  تھی کہ یہ

تو یہ آہ تین مربع کے برابر ہوگا جو کہ نو مانس تین مربع جمع پانچ مربع ضرب دو میں تین میں پانچ جو نکلے گا مانس 5 ہائی 6 کے برابر ہوگا۔

پھر ہم کیا کر سکتے ہیں کہ ہم اپنے گراف پر واپس جا سکتے ہیں

ہے اس کے بعد الفا کچھ نہیں ہے مگر  $\theta$  ڈگری  $\theta$   $\sin$  alpha ایک ہے اور  $\cos$  alpha تو یقیناً یہاں سے ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ چونکہ

کے سوا کچھ نہیں ہے اور اس حل کو تلاش کرنا یا بنیادی طور پر اب جو ہم  $\cos$  phi مانس الفا خود  $\cos$  phi کے برابر ہے اور اس لیے

چاہتے ہیں۔ ان دو پوائنٹس کے کوآرڈینیٹ تلاش کرنے کے لیے بس یہ کیا جا سکتا ہے کہ ہمیں ایکس محور کے حوالے سے مانس 5 ہائی 6 کی نقل

مکانی کے ساتھ ایک سبز افقی لیکر کھینچنی ہو گی لیکن اس کے م

توازی ہو تاکہ یہ کچھ اس طرح ہو اس طرح یہ منفی پہلو پر پانچ ہائی چھ ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مانس پانچ ہائی سکس یہ افقی آہ لائن مانس

پانچ ہائی کے ساتھ ایکس محور سے مانس پانچ ہائی سکس کی نقل مکانی پر اور ایکس محور کے م

مانس الفا کے لیے دو پوائنٹس پر منحنی خطوط اور اس لیے یہ اس کے دو حل ہیں  $\cos$  phi توازی اس کو کاٹتی ہے یا کاٹتی ہے۔

کے برابر مانس فائیو ہائی چھ کے برابر دیں گی۔ اس معاملے کے لیے  $\cos$  مانس الفا کے مانس phi کی دو قدریں ہیں جو ہمیں  $\phi$  تو یہ

ہمارے پاس جو ہے وہ یہ ہے کہ فائی مانس الفا کے برابر ہوگا

تو اس کی دو قدریں ہوں گی اس لیے کہ یہ مانس پانچ ضرب چھ ہے اور اس صورت میں الفا صفر کے برابر ہے، اس لیے ہمیں بنیادی طور پر اس

برابر مانس فائیو ہائی سکس کے برابر ہے  $\phi$  کا حل تلاش کرنا ہوگا۔ مساوات بھی

کے وقفہ  $\pi$  اور 5 کی یہ قدر  $\theta$  سے  $\cos$  inverse of minus five by six کے ذریعے دی جائے گی  $\phi$  تو یقیناً ایک ویلیو

سے تعلق رکھتی ہے لہذا یہ پہلا فائی اینگل بنیادی طور پر یہ ہے زاویہ

$\pi$  کی دوسری ویلیو  $\phi$  2 الٹا کے برابر ہے جس کا تعلق  $\theta$  اور 180 ڈگری کے درمیان ہے اور  $\cos$  تو یہ مانس فائیو ہائی سکس کے

مانس اس پہلی ویلیو کے برابر ہوگی

ٹو ہوگا کیونکہ ہم نے دیکھا کہ دو حل ہوں گے اس لیے ہم اسے فی ون سے اور ایک کو فائی ٹو سے ظاہر  $\phi$  ایک ہونے دیں یہ  $\phi$  تو اس کو

$\cos$  inverse of  $\pi$  اور  $\phi$  ٹو برابر دو  $\phi$  اور  $\cos$  inverse of six by six مانس پانچ  $\cos$  inverse of six by six کے برابر ہیں

کچھ نہیں ہے لیکن آئیے ہم اس کے ساتھ کھینچتے ہیں 6 by 5 مانس

یہاں اس قدر سے مطابقت رکھتا ہے اور میں اس کی نشاندہی کروں گا۔ لہذا یہ بنیادی طور پر اس زاویہ سے مطابقت رکھتا  $\phi$  2 تو یہ دوسرا

ہے

تو  $\cos$  inverse of

$\cos$  inverse of تو اس لائن سے لے کر یہاں سے شروع ہو کر اس لائن تک تمام راستے اس طرح سبز رنگ میں یہ زاویہ دو پائی مانس

ٹو اس کے مطابق ہوگا اگر ہم  $\phi$  کے سوا کچھ نہیں ہے اور جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ  $\cos$  inverse of minus five by six

تو آہ اب بنیادی طور پر صرف فائی ون اور فائی ٹو کی اس مختلف قدروں کو استعمال کر کے اور پوائنٹ آف پوائنٹ کی پولر نمائندگی کا استعمال

$\cos$  phi ٹو  $r$  جمع  $c$  برابر ہے  $x$  کر کے جہاں 2 دائرے چھوتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ

کے قطبی شکل میں  $\phi$  one کے برابر  $\phi$  one لہذا جب ہم  $\sin$  phi one دو  $r$  جمع  $d$  ہے  $y$  کہتے ہیں۔ ایک اور  $\phi$  one تو آئیے

ڈالتے ہیں

سے ظاہر کرتے ہیں  $x$  one  $y$  one تو ہمیں یہ دو پوائنٹ ملتے ہیں آئیے ہم ان کو  
 ہے لہذا یہ  $\phi_1$  سے مطابقت کرے گا کیونکہ یہ زاویہ بنیادی طور پر  $p$  کے مساوی ہوگا۔ اس نقطہ  $\phi_1$  کے برابر  $\phi_1$  تو یہ  
 ہے جو  $y_1$  کو  $x_1$  کے نقاط جو یہ نقطہ ہے  $p$  ہے۔ لہذا اس نقطہ  $\phi_2$  ہے اور سبز رنگ میں دکھایا گیا یہ دوسرا زاویہ  $\phi_1$   
 یہ مساوات آہ کے ذریعہ دی جائے گی اور اس کا حساب لگانا زیادہ مشکل نہیں ہے۔ کیونکہ ہم یہاں ان تمام قدروں کو جانتے ہیں ہم پہلے سے ہی  
 $d$  برابر ہے پانچ کے اسی طرح ہم جانتے ہیں کہ  $c$  دو برابر ہے تین کے برابر ہے ہم جانتے ہیں کہ  $r$  ایک ہم جانتے ہیں کہ  $\phi_1$  جانتے ہیں  
 کی گنتی کر سکتے ہیں لہذا ہم بنیادی طور پر اس  $\sin \phi_1$  ایک  $\phi_1$  تین اور چونکہ ہم جانتے ہیں  $ah$  دو ہے  $r$  صفر کے برابر ہے  
 دو سے ظاہر  $y$  دو  $x$  کو  $ah$  کے نقاط کا حساب لگا سکتے ہیں جس سے ہم  $q$  نقطہ کے نقاط کا حساب لگا سکتے ہیں اسی طرح اس نقطہ  
 میں شمار کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح سے اسی طرح کا حساب لگایا جا سکتا ہے لیکن  $a$  دو کے نقاط کو  $y$  دو کو  $qx$  کرتے ہیں لہذا اس نقطہ  
 $\cos$  inverse of minus  $\phi_2$  ہے  $\phi_2$  ہوگا جہاں  $\phi_2$  کے بجائے ہمارے پاس  $\phi_1$  یہ صرف یہ ہے کہ  
 five by six

ہوگا۔ دو کوس فائی ٹو اور وائی ٹو برابر ہوں گے ڈی پلس آر ٹو سائن فائی ٹو فائی ٹو یہ زاویہ  $c$  plus  $r$  دو برابر  $x$  تو درست ہونے کے لئے  
 ہے

تو یہ صرف دو تھی بس ایک سادہ سی مثال ہے کہ ہم اس لیکچر میں تیار کی گئی تکنیک کو اس تکنیک میں کیسے استعمال کر سکتے ہیں جو ہم نے تیار  
 سب سے پہلے ای کو استعمال کیا گیا تھا۔ ان حالات کو سنجیدگی سے سختی سے ثابت کریں جن کے تحت دونوں be first use کی ہے۔  
 دائرے بالکل ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں اور ایک ضمنی پیداوار کے طور پر ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ ان دونوں دائروں کے انتفاضہ  
 الفا صفر کے برابر تھا لیکن  $ah$  کے نقطہ کے نقاط کو تلاش کرنے کے لیے ایک ہی تکنیک کا استعمال کیا جا سکتا ہے اور اگرچہ اس مثال میں  
 عام طور پر الفا صفر کے برابر ہونا ضروری نہیں ہے لیکن اس صورت میں بھی یہ بہت مشکل نہیں ہے کیونکہ اس کے بجائے ہمیں یہاں کیا ملے  
 مائنس الفا ہوتا  $\phi_2$  مائنس الفا ہے اور یہاں ہمارے پاس  $\phi_1$  گا وہ یہ ہے کہ اس فائی کے بجائے یہاں ہمارے پاس 5 مائنس الفا ہوتا۔  
 تو اگر الفا 0 نہ ہوتا

$\cos$  مائنس  $\pi$  برابر الفا پلس 2 ہوتا۔  $\phi_2$  اور  $\cos$  inverse of minus 5 by 6 برابر الفا پلس  $\phi_1$  تو حل  
 inverse of minus five by six

میں ہم ایک نیا موضوع شروع کریں گے جس کا نام فیملی آف دائروں ہے جو کچھ ایسا ہی ہوگا جو سیدھی لکیروں کے خاندان  $ah$  تو اگلے لیکچر  
 کے موضوع میں زیر بحث آئے گا۔ آپ کا شکر یہ