پچھلے لیکچروں میں سے ایک میں دائروں پر 10 لیکچر میں خوش آمدید جس میں ہم نے کسی بھی دو دائروں کے درمیان براہ راست مشترکہ
ٹینجنٹ اور ٹرانسورس مشترکہ ٹینجنٹ کے بارے میں بات کی تھی اور ہم نے خاص طور پر مختلف معاملات پر غور کیا تھا جن میں سے ایک معاملہ
یہ تھا جہاں دائرے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک دوسرے کو اور دائروں کی مساوات کو دیکھتے ہوئے ہم نے یہ بھی بتایا تھا کہ یہ کیسے معلوم کیا
جائے کہ دو دائرے ایک دوسرے کو ایک دوسرے کو آپس میں ملا رہے ہیں یا نہیں لیکن پھر ان حالات کے لیے ہم نے کوئی ثبوت نہیں دیا تھا اس
x ایک جس میں مساوات s لیے ہم نے جو کہا تھا وہ یہ تھا کہ فرض کریں اگر ہمارے پاس دو دائرے ایک دوسرے کو آپس میں ملا رہے ہیں۔ دائرہ
مربع x دو جس میں مساوات s ایک صفر کے برابر ہے اور دوسرا دائرہ c جمع y ایک f جمع دو x ایک g مربع جمع دو y مربع جمع
دو صفر کے برابر ہے لہذا ہمیں یہ دو مساوات دی گئی ہیں اور پھر ہم سے کہا گیا c جمع y دو f جمع دو x دو g مربع جمع دو y جمع
ہے کہ آہ تلاش کریں اور پھر ہم نے کہا کہ یہ دونوں دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں گے اگر اور صرف اس صورت میں جب ان کے مرکز کے
s درمیان فاصلہ ہو
f ایک مائنس g سے ظاہر کیا گیا ہے اس میں نقاط مائنس o ایک جس کو s تو ان کے مراکز کو اس طرح رہنے دیں کہ پہلے دائرے کا مرکز
ایک مربع g ایک برابر ہے مربع جڑ r دو پہلے دائرے کا رداس ہے f ٹو کوما مائنس g دو کا مرکز مائنس o ایک ہے اور دوسرے دائرے
ٹو کے مربع جڑ کے c دو مربع مائنس f دو مربع جمع g دو کا رداس s ایک اور اسی طرح دوسرے دائرے c ایک مربع مائنس f جمع
برابر ہے لہذا صرف اتنی معلومات دیتے ہوئے ہم نے کہا۔ کہ اگر مراکز کے درمیان فاصلہ ہے
تو اگر مراکز کے درمیان فاصلہ جس کا مربع جڑ ہے
ایک پورا مربع ہے f دو مائنس f دو مائنس جی ایک پورا مربع جمع g تو ان دو پوائنٹس کے درمیان فاصلہ جو کہ
تو ہم نے کہا کہ اگر یہ فاصلہ رداس کے مجموعے سے کم یا اس کے برابر ہے یا اگر یہ دو دائروں کے رداس کے مطلق فرق کے فرق سے
زیادہ یا اس کے برابر ہے
تو اگر یہ درست ہے
تو اگر یہ شرط درست ہے
تو ہم ویں کہا دو دائروں پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں
دو کے برابر ہے r ایک جمع r دو کریں جو کہ مراکز کے درمیان فاصلہ o تو ہم نے یہ بھی کہا کہ اگر ایک
تو دونوں دائرے بالکل ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں
تو یہ معاملہ ہے جہاں ہم کچھ اس طرح ہے
دو ہو سکتا ہے اور وہ یہاں بالکل ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں s ایک ہو سکتا ہے اور یہ s تو یہ
ہونے دیں p تو اس نقطہ کو
سے بھی گزرے گی جہاں دو دائرے p تو یہ مرکز ایک اور دو ہیں اور پھر ہم نے یہ بھی کہا تھا کہ مراکز کو جوڑنے والی سیدھی لکیر اس نقطہ
دو سے بڑا ہے r ایک جمع r دو o ایک d ایک دوسرے کو چھوتے ہیں اور پھر ہم نے یہ بھی کہا کہ اگر
تو دونوں دائرے آپس میں نہیں ملتے ہیں لہذا یہ معاملہ ہے کچھ اس طرح جہاں ہمارے پاس پہلا دائرہ اور دوسرا دائرہ ہے اور وہ ایک دوسرے کو
نہیں کاٹتے ہیں
کے درمیان r 2 اور r 1 تو یہ حالت ہے اور پھر ہم نے یہ بھی کہا تھا کہ اگر مراکز کے درمیان فاصلہ قطعی فرق کے برابر ہے۔ دو رداس
پھر دونوں دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں
دو ہو سکتا s ایک پر ہو اور پھر ہمارے پاس دوسرا دائرہ o ایک ہو سکتا ہے جس کا مرکز s تو اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ یہ پہلا دائرہ
ایک کو چھوتا ہے اسی لیے ہم نے کہا s دو دائرے کو اندر سے ایک s دو ہے اور یہ دو دائرے اس لیے دائرہ s دو کے ساتھ o ہے۔ مرکز
پر داخل ہوں اور اس صورت میں دونوں مراکز کے درمیان فاصلہ مطلق فاصلہ ہے۔ رداس کے درمیان اور p اندرونی طور پر صرف ایک نقطہ
پھر یقیناً ہم نے بھی بحث کی تھی ہم نے آخری معاملے پر بھی تبادلہ خیال کیا تھا جہاں مراکز کے درمیان فاصلہ ریڈی کے درمیان قطعی فرق سے
سختی سے کم ہے جس صورت میں دوبارہ دائروں کو قطعاً نہیں کاٹتے ہیں وہ کرتے ہیں۔ نہیں اور مزید یہ کہ ایک دائرہ مکمل طور پر دوسرے
دائرے کے اندر ہونے والا ہے لہذا ہمارے پاس اس طرح کی صورتحال ہے جہاں ہم کہتے ہیں کہ ہمارے پاس یہاں ایک مرکز کے ساتھ دائرہ ہے
دو کے ساتھ ہے لہذا یہ دو دائرے آپس میں نہیں بٹتے اور مزید یہ کہ دو دائروں میں سے ایک مکمل o اور پھر ہمارے پاس ہے یہ دائرہ دو مرکز
طور پر دوسرے دائرے کے ایک کے اندر ہے لہذا اس لیکچر کی مرکزی بحث ان شرائط کو سختی سے اخذ کرنے پر مرکوز ہوگی۔ لہٰذا ہم یہ
دکھائیں گے کہ دو دائرے کوئی بھی دو دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ شرط پوری ہو جائے
تو اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر یہ شرط پوری نہیں ہوتی
تو دونوں دائرے ایک دوسرے کو کاٹ نہیں سکتے اور پھر بطور خاص کیسز یہ بھی دکھائیں کہ اگر یہ اور یہ سب سختی سے ثابت ہوں گے
کیونکہ ہم نے آہ نہیں کی تھی کہ جس لیکچر میں ہم عام مماس کے اخذ پر بحث کر رہے تھے اور پھر ہم اس خصوصی صورت کو بھی دکھائیں گے
جہاں اگر فاصلہ درمیان ہے۔ مراکز رداس کے مجموعے کے برابر ہیں
تو وہ بالکل ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو چھوئیں گے کیونکہ جب وہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں
تو وہ حقیقت میں ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں دو مختلف پوائنٹس پر ہوتے ہیں لیکن ایک خاص صورت کے طور پر جب فاصلہ رقم کے برابر ہوتا ہے
تو وہ ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں بیرونی طور پر میرا کیا مطلب ہے کہ دونوں دائرے ایک دوسرے کے اندر نہیں ہیں
کو چھو رہا ہے اور پھر یقینا ہم اس معاملے کو بھی سختی s 1 پر باہر سے p سے باہر ہیں۔ اور یہ اس نقطہ s 1 دو s تو مثال کے طور پر
سے اخذ کریں گے جہاں ایک دائرہ دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتا ہے
تو آئیے یہ دیکھنے کے ساتھ شروع کریں کہ ایسا کن حالات میں ہوگا۔ کہ دو دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں
ایک دائرہ کیا ہے اور ہمارے پاس دائرہ دو ہے اور ہم یہ کہتے ہیں s تو آئیے ہم یہ کہتے ہیں کہ ہمارے پاس یہ دو دائرے ہیں اور اس طرح ہم نے
ہوں y اور x کہ وہ ان دو پوائنٹس پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور ان میں سے ایک کا کوآرڈینیٹ ہونے دیں۔ انٹرسیکشن کے پوائنٹس
کوما ہو ٹو سے ظاہر کرتا ہے دوسرے دائرے کا مراکز ہو جس ba اور i a ہے پہلے دائرے میں سے ایک جس کے نقاط کو o تو یہ مرکز
دو ہے لہذا d ایک o اور یقیناً یہ سیدھی لکیر کی لمبائی دو مراکز کے درمیان فاصلہ d کوما dc اور سے ظاہر ہوتے ہیں۔ c کے نقاط
اب دونوں دائروں پر ہے اس مسئلے x comma y یہ نقطہ x comma y اس نقطہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں s 2 اور s 1 چونکہ
کو حل کرنے کے لیے ہم دائرے کی پیرامیٹرک شکل یا پیرامیٹرک مساوات کو استعمال کرنے جا رہے ہیں لہذا اگر آپ کو دائرے کی پیرامیٹرک
مساوات یاد ہے
کو دائرے کے x کوآرڈینیٹ ہو سکے۔ کے طور پر لکھا جائے x کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے تاکہ y اور x تو دائرے پر کوئی بھی نقطہ
کوآرڈینیٹ کے مرکز کے ساتھ ساتھ دائرے کے رداس کے اوقات کاس ذیلی زاویہ تھیٹا کے برابر ہے لہذا یہ زاویہ عام طور پر یہ x مرکز کے
زاویہ ہوتا ہے اگر ہم اس دائرے کے مرکز سے ایک لکیر کھینچیں جو ہے ایکس محور کے م
توازی ہم کہتے ہیں کہ یہ سبز نقطوں والی لکیر ہے

محور سے اس رداس تک ہے جو ایک مرکز کے ساتھ x محور x تو تھیٹا صرف ایک زاویہ ہے جو گھڑی کی مخالف سمت میں لیا گیا ہے جو
یہ پوائنٹ۔ جوڑتا ہے xy
تو یہ یہ پورا زاویہ
تو یہ زاویہ تھیٹا ہے
تھیٹا لکھا r one cos کوآرڈینیٹ ہے جو ایک جمع x تو پھر پیرامیٹرک فارم کا استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس دائرے پر کسی بھی نقطہ کا
بھی y کوما x کوآرڈینیٹ کے برابر ہوگا۔ مرکز کا جو ایک ہی زاویہ تھیٹا کا رداس ٹائم سائن ہے اب چونکہ یہ نقطہ y کوآرڈینیٹ y ہے اور
x لکھ سکتے ہیں۔ اس صورت میں y اور x دو کی پیرامیٹرک شکل کے لحاظ سے بھی s ٹو پر واقع ہے ہم دوسرے دائرے s دوسرے دائرے
کے y اور x کے برابر ہے کیونکہ اب زاویہ مختلف ہوگا کیونکہ اب ہم اس نقطہ r 2 cosine جمع c کے phi کسی دوسرے زاویہ
دکھانے کے لیے ہمیں phi اب ہم اگر دوبارہ s2 کے ساتھ پیرامیٹرک شکل میں ظاہر کرنے کی کوشش کر رہے ہیں۔ دوسرا دائرہ ah نقاط کو
کیا کرنا ہے
محور کے م x کے ذریعے o2 تو ہمیں مرکز
le سے جڑ رہا ہے۔ اور پھر انگ xy کے ساتھ مرکز o2 توازی ایک لکیر کھینچنی ہے اور پھر ہم کہتے ہیں کہ ہمارے پاس یہ رداس اس نقطہ
x محور کے سلسلے میں مخالف گھڑی کی سمت میں لیا گیا ہے لہذا ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ اس افقی x افقی سے یا اس رداس کے زاویہ سے
محور کو کس زاویہ سے گھڑی کی مخالف سمت میں گھمایا جانا چاہئے تاکہ یہ اس کے ساتھ موافق ہو۔ رداس تاکہ زاویہ عین یہ زاویہ ہے اتنا اتنا
سے ظاہر کروں گا phi اور میں اسے
کو پیرامیٹرک شکل کے لحاظ سے ظاہر کرتے ہیں y اور x دونوں دائروں پر واقع ہے لہذا ہم ابتدائی طور پر y کوما x تو چونکہ یہ نقطہ
جیسا کہ پیرامیٹرک میں پہلے دائرے کے حوالے سے فارم اور چونکہ یہی نقطہ دوسرے دائرے پر بھی ہے اس لیے ہم دوسرے دائرے کے حوالے
سے پیرامیٹرک شکل میں نقاط کا دوبارہ اظہار کرتے ہیں
اس کو برابر کریں اور یہ جو میں حاصل کرتا ہوں وہ یہ ہے کہ ایک i ہو جائے گا اگر r 2 sin phi جمع d اب y یہ ہے اور x تو
پلس آر ایک کوس تھیٹا سی پلس آر ٹو کوس فائی ہے لہذا اس مقام پر عمومیت کے نقصان کے بغیر آئیے ہم فرض کریں کہ عمومیت کے نقصان کے
بغیر ہم فرض کرتے ہیں کہ r ایک r لہذا اگر r دو r ایک سے بڑا ہے دو سے بڑا یا مساوی ہے
دو کے قواعد الٹ جائیں گے لہذا اس مفروضے کے ساتھ مساوات r ایک اور r تو اسی قسم کے ثبوت کی پیروی کی جائے گی صرف یہ ہے کہ
اور اسی طرح اگر ہم اس cos phi ٹو r مائنس اے پلس c برابر ہے r one cos theta یہ اور یہ جو ہمیں درحقیقت ملتا ہے وہ ہے
sin phi ٹو r جمع b مائنس d ہے r one sin theta کو برابر کرتے ہیں اور یہ ہمیں ملتا ہے
تو اگر ah r دو کو r ایک سے بڑا یا مساوی ہونا تھا
تو ہم اس پوری چیز کو مختلف طریقے سے لکھتے
r 1 سائن فائی ہے r 2 اور r 1 cos theta جمع c برابر ہے مائنس cos phi ٹو r تو اس صورت میں ہمیں لکھنا چاہیے تھا
کے برابر اور پھر باقی ثبوت بالکل ملتا جلتا ہے اسی لیے ہم نے عمومیت کے نقصان کے بغیر کہا کہ sin theta plus b minus d so
اب ہم ان دونوں مساوا
ایک مربع گناہ r مربع تھیٹا پلس cos ایک مربع r توں کو دونوں اطراف مربع کرتے ہیں اور ان کو جوڑتے ہیں جو ہمیں بائیں طرف ملتا ہے ہے
مربع تھیٹا
پورا sin phi دو r جمع b مائنس d پورے مربع جمع cos phi دو r مائنس ایک جمع c تو یہ دائیں ہاتھ کی بائیں طرف ہے ہمیں
ایک مربع کو آسان کرتا ہے لہذا ہمارے پاس یہ r مربع تھیٹا جمع گناہ مربع تھیٹا ایک کے برابر ہے بائیں ہاتھ کی طرف cos مربع ملتا ہے کیونکہ
مساوات ہے اور اگر اب ہم دائیں ہاتھ کو پھیلاتے ہیں
دو مربع گناہ مربع r جمع phi مربع cos دو مربع r پورا مربع جمع b مائنس D مائنس ایک پورا مربع جمع c تو ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے
دو مربع کے علاوہ کچھ نہیں ہے کیونکہ R اب یہ b sin phi مائنس d دو r جمع دو a cos phi مائنس c دو r فائی جمع دو
اور ab ایک مربع کے برابر ملتا ہے اور یہ مقدار کچھ نہیں ہے مگر دو مراکز r ایک ہے لہذا ہمیں phi مربع sin جمع phi مربع cos
کے درمیان فاصلہ ہے لہذا یہ مقدار کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس لیے یہ مربع فاصلے کے برابر ہے معذرت، لہذا یہ دونوں مراکز کے درمیان cd
a مائنس c دو میں r ٹو مربع جمع دو r ایک مربع مربع کے برابر ہے کے درمیان فاصلہ مراکز جمع r مربع فاصلہ ہے لہذا ہمارے پاس
سے ضرب d0102 اور پھر ہم یہاں تھوڑا سا ہیرا پھیری کرتے ہیں لہذا صرف اس اصطلاح کو ہم sin phi b مائنس d جمع cos phi
ٹو میں d over o b by مائنس d جمع cos phi بن جاتا ہے۔ دو بار d one o بذریعہ a مائنس c اور تقسیم کرتے ہیں اور یہ
پورا مربع b مائنس d مائنس ایک پورا مربع جمع c دو مربع ہے o سے زیادہ d اب اگر ہمیں احساس ہوتا ہے کہ sin phi
b مائنس d اور a مائنس c تو بنیادی طور پر ہمارے پاس کچھ اس طرح ہے
ہیں b مائنس d اور a مائنس c دو سے زیادہ ہے اور باقی دو اطراف d o تو ہمارے پاس ایک دائیں زاویہ مثلث ہے جس کی فرضی طوالت
ہم کہتے ہیں اور اس لیے اسے ہونا چاہیے اور ہم حقیقت میں ایسا نہیں کر سکتے اس دائیں زاویہ مثلث کو یہاں دکھانا بہت مشکل ہے لہذا اگر ہم
اپنے اعداد و شمار پر واپس جائیں
محور کے م x دو سے اس سبز نقطے والی لکیر کی طرف ایک کھڑا کھینچیں جو o تو یہ دائیں زاویہ اگر آپ اس مرکز
توازی ہے
کے بارے میں کیونکہ اس دائیں زاویہ مثلث میں ng تو ہم اس کو کھڑا کہتے ہیں ۔ صحیح زاویہ مثلث ہے کہ ہم بات کر رہے ہیں۔
ہے اور آئیے ہم صحیح زاویہ مثلث کے اس زاویہ کو الفا b مائنس d یہ a مائنس c ہے یہ لمبائی do1 o2 کی لمبائی hypotenuse
cos کے علاوہ کچھ نہیں ہے a by d over o2 مائنس c سے ظاہر کرتے ہیں لہذا ہمارے پاس یہ زاویہ الفا ہے اور اس وجہ سے
سائن الفا ہے لہذا ہم اسے اب اس مساوات میں استعمال کریں گے لہذا ہمارے پاس جو ہے وہ یہ b by d over o2 مائنس d اور alpha
جمع cos alpha cos phi دو بار o دو مربع جمع دو آر دو ڈی اوور r دو پورے مربع جمع do one o ایک مربع ہے r ہے کہ
sine alpha sine phi
کے برابر ہے اور اس لیے یہاں cos مائنس الفا کے cos فارمولہ استعمال کر رہا ہے یہ cos a cos b plus sin a sin b تو یہ
ایک d دو r دو مربع پر دو r دو پورے مربع جمع o ایک مربع مائنس ڈو ایک r برابر ہے cos سے ہمیں ملتا ہے۔ کہ فائی مائنس الفا کی
دو o
تو اگر ہم ایسا کرتے ہیں چونکہ ہمارا بنیادی مقصد اب اس فائی کی قدر تلاش کرنا ہے کیونکہ اگر آپ کو یاد ہے اصل مسئلہ یہ تھا کہ ہمیں یہ
دونوں دیئے گئے تھے۔ حلقے اور ہمیں اب تقطیع کے پوائنٹس کا پتہ لگانا ہے کیونکہ ہم پیرامیٹرک فارم استعمال کرتے ہیں ان نقطوں کو تلاش کرنا
ان زاویوں تھیٹا اور فائی کو تلاش کرنے کے مترادف ہے کیونکہ ایک بار جب ہمیں تھیٹا اور فائی مل جاتا ہے
تلاش کرسکتے ہیں لیکن پھر یہ تھیٹا اور فائی ایسا ہونا چاہیے کہ یہ بیک وقت ان دو مساوا y اور x تو ظاہر ہے کہ ہم

توں کو حل کرے یہ مثلثی مساواتیں ہیں اس لیے ہمارے پاس دو نامعلوم تھیٹا اور فائی ہیں جن کا پتہ لگانا ضروری ہے اور باقی تمام دیگر متغیرات
کو بھی جانا جاتا cd اور ab ٹو کو 2 سینٹرز کے کوآرڈینیٹس کے بارے میں جانا جاتا ہے r ایک معلوم ہے۔ r ہیں جو ہمیں معلوم ہیں کیونکہ
ہے اور یہ وہی ہے جو ہم پچھلی چند سلائیڈوں میں کرنے کی کوشش کر رہے ہیں اور ہم اس مقام پر پہنچ گئے ہیں جہاں سے باقی سب کچھ
اور الفا کا سائن cos تو یہ دائیں ہاتھ کی طرف پوری طرح سے معلوم ہے۔ ہمارے لیے الفا ہمیں بھی جانا جاتا ہے کیونکہ اگر ہم یاد کرتے ہیں کہ
معلوم مقداروں کے مثلثی تناسب ہیں
کا پتہ چل جاتا ہے phi کو تلاش کرنے کے لیے اور ایک بار جب ہمیں phi تو الفا بھی ہمیں معلوم ہے اور اس لیے ہمیں قابل ہونا چاہیے
کی قدر کو ان دو مساوا phi تو ہم
کو جان لیتے ہیں phi توں میں پلگ کر سکتے ہیں اور ہم آسانی سے تھیٹا کو تلاش کر سکتے ہیں اور ایک بار جب ہم تھیٹا اور
تو ہم اس کو تلاش کر سکتے ہیں کہ ہم انتفاضہ کے نقطۂ نظر کا ہم آہنگ جانتے ہیں۔ ان دو دائروں میں سے اس آہ کو حل کرنے کے لیے آئیے فائی
کا گراف کھینچتے ہیں cos مائنس الفا بمقابلہ فائی کے
ہے phi بائی دو پر ہوگی جب pi کے برابر زیادہ سے زیادہ ایک کی زیادہ سے زیادہ ویلیو الفا پلس cos پر فائی مائنس الفا کے الفا phi تو
ہے جس کو ہم cos صفر کے برابر ہے قیمت مائنس الفا کی phi کی قیمت صفر ہوگی cos مائنس الفا کے دو phi الفا پلس پائی بذریعہ
کی قدر ہوگی۔ مائنس ون ہونے والا ہے جو یہاں الفا پلس تھری پائی بائی ٹو پر ہے cos پر یہ قدر فائی مائنس الفا کی pi کہتے ہیں کہ الفا پلس
تو جب فائی الفا پلس تھری پائی بائی دو کوس پانچ مائنس الفا دوبارہ صفر ہے
کے بعد یہ کافی cos کے ان فنکشن phi m کیونکہ pi تو یہ دوبارہ یہاں ہے اور پھر ہم کہتے ہیں کہ ہم صرف دو تک پلاٹ کرتے ہیں ۔
ہے۔ انوس الفا فائی پیریڈیسیٹی کا ایک م
تواتر فعل ہے دو پائی ہونے کی وجہ سے یہ صفر اور دو پائی کے درمیان گراف کھینچنے کے لیے کافی ہے کیونکہ باقی تمام وقفوں کے لیے
تو دو پائی سے چار پائی تک کے وقفے کے لیے گراف بالکل اسی طرح ہوگا۔ مائنس ٹو پائی سے صفر تک بھی صفر سے 2 پائی کے گراف کی طرح
ہو گا لہذا حاصل کردہ گراف کچھ اس طرح نظر آئے گا پھر یہ یہاں 0 اور پھر مائنس 1 پر جائے گا اور پھر دوبارہ 0 پر یہاں اور دو پائی پر واپس
آئے گا۔ یہ بنیادی طور پر ایک مکمل دائرہ یا ایک مکمل آہ ایک مکمل دو پائی کی گردش کو مکمل کرنے جا رہا ہے اور اس وجہ سے یہ قدر اور یہ قدر
یکساں ہوگی اور پھر ہم یہ کہتے ہیں کہ اب یہ واضح ہے کہ اگر اس دائیں ہاتھ کا ماڈیولس اس سے بڑا ہے ایک
تو واضح طور پر کوئی حل نہیں ہے اور یہ بالکل وہی معاملہ ہے جہاں اس کا مطلب یہ ہے کہ چونکہ کوئی حل نہیں ہے یا بنیادی طور پر اس
ایک سے زیادہ ہے جس کا مطلب e مثلثی مساوات کا کوئی حل نہیں ہے اس صورت میں جہاں مطلق یا یا قدر اس دائیں ہاتھ کی مطلق قدر میں سے
ہے کہ یا
تو یہ ایک سے بڑا ہے یا یہ مائنس ون سے کم ہے
تو اس صورت میں چونکہ اس مثلثی مساوات کا کوئی حل نہیں ہے یہ واضح ہے کہ دو دائرے آپس میں نہیں جڑیں گے لہذا دوسری صورت یہ ہے
کہ جب اس دائیں ہاتھ کی اس مطلق قدر کا ماڈیولس ایک سے کم ہے اس صورت میں اگر قدر ہے
تو ہم کہتے ہیں کہ اگر مطلق قدر ایک سے سختی سے کم ہے
تو یہ معاملہ ہے جہاں ایسا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ قدر ایک سے سختی سے کم ہے
تو ہم کہتے ہیں کہ قدر نصف کے برابر ہے
تو پھر اس کا حل تلاش کرنے کے لیے ہم کیا کرتے ہیں
تو ہم کہتے ہیں کہ یہ ہے یہ یہ قدر اس کے برابر ہے
محور کے م x تو یہ حق ہاتھ کی طرف اس قدر کے برابر ہے اور اس لیے ہم
توازی ایک افقی لکیر کھینچتے ہیں اس لیے معذرت کے ساتھ یہ سرخ وکر صرف یہاں تک جائے گا کیونکہ یہ اور یہ ایک جیسا ہونا چاہیے اور اس
ایک سے سختی سے کم ہے یہ دیکھنا بہت آسان ہے کہ حقیقت میں دو مختلف حل ہوں گے h لیے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی قدر کے لیے جو
کے دو مختلف اقدار ہوں گے جو اس مساوات کو پورا کریں گے لہذا ہم کوئی دوسری قدر بھی لے سکتے ہیں لہذا ہم کوئی دوسری قدر بھی phi یا
لے سکتے ہیں چلو ہم کہتے ہیں ۔ ہم اس قدر کو کہتے ہیں جو کہ ہمیں مائنس ایک بائے چار کہتے ہیں
تو اگر یہ دائیں ہاتھ کی طرف مائنس ایک بائے چار ہے
محور کے م x تو حل تلاش کرنے کے لیے
محور سے عمودی فاصلہ ہے۔ ایک بذریعہ چار ہے لیکن یہ منفی طرف ہے منفی طرف ہے لہذا بنیادی x توازی ایک افقی لکیر کھینچے گی جس کا
طور پر یہ سبز لکیر ہے لہذا جب یہ مائنس ون بائی چار ہے
مائنس الفا اور وہ دو پوائنٹس یہ ہیں لہذا یہ دو ایک ہیں لہذا کوئی آسانی cos phi تو دو حل اس سبز لکیر کے منحنی خطوط کے ساتھ ملتے ہیں
کی دو الگ الگ قدریں موجود ہوں phi سے دیکھ سکتا ہے کہ اس دائیں ہاتھ کی کسی بھی قدر کے لئے آہ جس کی مطلق قدر ایک سے کم ہے وہاں
کے ایسے ہر ایک حل کے لیے اگر ہم اسے اس مساوات میں واپس رکھیں گے phi کے حل اور phi گی یا دو الگ الگ
ہیں phi تو ہمیں اس فائی سے مطابقت رکھنے والے تھیٹا کی ایک منفرد قدر ملے گی تاکہ اب ایک تھیٹا اور فائی جوڑا ہو گا کیونکہ وہاں دو مختلف
ایسے معاملات میں جہاں دائیں ہاتھ کی مطلق قدر ایک سے کم ہے یہ واضح ہے کہ وہاں دو مختلف تھیٹا فائی جوڑے ہوں گے اس کا مطلب یہ ہے
کہ چوراہے کے دو مختلف مقامات ہوں گے مثال کے طور پر جیسا کہ اس تصویر میں اب اس کے لیے دکھایا گیا ہے ۔ معاملہ جہاں مطلق قدر ہے

تو یہ وہ معاملہ ہے جہاں ہم ابھی اس مساوات کی پچھلی سلائیڈ پر مساوات کے دائیں ہاتھ کی مطلق قدر کے ساتھ معاملہ کر رہے ہیں لہذا اگر اس
دائیں ہاتھ کی مطلق قدر سختی سے ہے ایک سے کم
تو یہ وہ معاملہ ہے جس پر ہم غور کر رہے ہیں اور ہم نے استدلال کیا ہے کہ اس صورت میں دو پوائنٹس بالکل دو پوائنٹس ہوں گے جہاں دو دائرے
آپس میں ملیں گے لیکن پھر آخر کار جو ہم دکھانا چاہتے ہیں وہ یہ ہے کہ ہم یہ دکھانا چاہتے ہیں کہ یہ شرط ہے اور اس شرط سے بھی مراد ہے
کہ فاصلہ رداس کے مجموعے سے کم اور مطلق فرق سے زیادہ ہے
تو ہمیں یہاں سے شروع کرنا چاہیے۔ دونوں طریقوں سے اگر ہم یہاں سے شروع کرتے ہیں
تو ہمیں یہ حاصل کرنا چاہئے اور اس کا مطلب بھی اس پر ہونا چاہئے لیکن اگر آپ یہ دیکھنا چاہتے ہیں کہ ہمیں اس مساوات سے پہلے اپنی
مساوات پر واپس جانا ہوگا جو یہاں لکھا گیا ہے
ایک مربع یا اس کے بجائے اگر ہم اس مساوات کو اسی مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں r تو اگر ہم دوبارہ اس مساوات کو دیکھیں
تو یہ ہمیں کوزائن فارمولے کی یاد دلاتا ہے کوسائن قانون یہ ہمیں کوسائن قانون کی یاد دلاتا ہے کیونکہ اگر ہم کوسائن قانون کو یاد کرتے ہیں
دو ہیں اور ہم یہ کہتے ہیں o ایک d ایک اور r دو r تو ہمارے پاس کیا تھا کہ آئیے کہتے ہیں کہ ہمارے پاس ہے ایک مثلث جس کے اطراف
دو کی لمبائی کے اطراف کا زاویہ بیٹا ہے o دو اور ایک r کہ
دو میں r ایک مربع پر دو r دو ڈبلیو سوراخ مربع مائنس o دو مربع جمع ایک کوما r تو ہم جانتے ہیں کہ بیٹا کا کوزائن کچھ نہیں ہے بلکہ

Prutor@IITK

دو میں اور یہ دائیں ہاتھ کی طرف اس طرف سے بہت مشابہت رکھتا ہے سوائے اس کے کہ ہمیں منفی نشان کے علاوہ اس کی نفی o ایک d
کرنی ہوگی لہذا اگر ہم اس دائیں ہاتھ کا مائنس لیں گے
تو بالکل ٹھیک ہو جائے گا۔ اسے حاصل کریں
تو اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر ہم دوبارہ اپنی ابتدائی سلائیڈ پر جاتے ہیں
تو آئیے یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ یہ زاویہ کہاں ہے میرا مطلب ہے بیٹا جس کے بارے میں ہم بات کر رہے ہیں لہذا اگر ہم یہاں واپس جائیں
تو ہمیں کیا نظر آتا ہے دیکھیں
کو دیکھیں po1 o2 po1 o2 ہونے دیں اور آئیے مثلث p تو آئیے اس نقطہ کو
دو ظاہر ہے لمبائی دو ایک یا دو کریں o دو ہے اور ایک r کی لمبائی p دو o ایک r کی لمبائی ہے p تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سائیڈ ایک
دو r دو لمبائی کے درمیان کے زاویہ کی بات کر رہے تھے لمبائی r تو یہ وہ مثلث ہے جسے ہم نے چند منٹ پیچھے کھینچا تھا اور پھر ہم اس
دو o ایک d کی طرف اس آہ لمبائی کی لمبائی
تو یہ کیا ہے یہ زاویہ کیا ہے
بیٹا لیکن پھر بیٹا تلاش کرنا بہت مشکل نہیں ہے کیونکہ اگر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ 90 ڈگری s تو یہ زاویہ وہی ہے جسے ہم کہہ رہے تھے۔
کے علاوہ کچھ نہیں ہے اور یہ زاویہ الفا تھا لہذا اگر آپ اس دائیں زاویہ مثلث کو دیکھیں pi by 2
ہے دو مائنس الفا اب اگر ہم ان تمام ایک دو تین اور چار ان تمام چار زاویوں کو جوڑتے ہیں pi by تو یہ الفا ہے اور اس لیے یہاں یہ زاویہ
تو ہمیں دو پائی ملیں گے
تو دو پائی برابر ہے،
pi by تو آئیے فائی سو فائی پلس سے شروع ہونے والی گھڑی کی مخالف سمت میں شروع کریں اور پھر بیٹا پلس پائی سے دو مائنس الفا جمع
two
جمع الفا کے برابر ہے اب اگر ہم اسے دیکھتے ہیں phi مائنس pi تو اس مساوات سے ہمیں جو ملے گا وہ یہ ہے کہ یہ زاویہ بیٹا
تو میں اس مثلث کو یہاں کھینچتا ہوں
ہے لہذا اگر ہم اس مثلث پر کوسائن قانون کو لاگو کرتے ہیں do one o two اور یہ r one r two تو یہ بیٹا یہ ہے۔
پلس الفا اور اس phi مائنس کے برابر ہے۔ pi تو ہمیں وہی ملے گا جو ہم نے یہاں لکھا تھا لیکن پھر ہم نے پچھلی سلائیڈ پر دکھایا ہے کہ بیٹا
مائنس فائی پلس الفا کے کوسائن کے سوا کچھ نہیں ہے جو کچھ بھی نہیں ہے لہذا بیٹا کا کوزائن پائی مائنس فائی s pi کا کوزائن i لیے بیٹا
پلس الفا کے کوسائن کے برابر ہے جو فائی مائنس الفا کے کوسائن کے مائنس کے برابر ہے اور ہمیں یہاں ایک منفی نشان ملتا ہے لہذا میرا مطلب
ہے کہ یہ ہے اس کے مساوی جس کا بنیادی طور پر مطلب ہے اس سے ہمیں یہ مساوات ملے گی
تو جو ہمارے یہاں ہے وہ بنیادی طور پر یہ ہے کہ یہاں یہ مساوات جو ہمیں ملی ہے وہ اس مثلث ایک یا دو پی پر لاگو ہونے والے کوزائن قانون
کے سوا کچھ نہیں ہے اب تکون کی عدم مساوات سے کیا ہے ہمارے پاس یہ ہے کہ اگر یہ شرط درست ہے اگر یہ شرط درست ہے
تو اس صورت میں دو دائرے دو نقطوں پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں
ہے اور اس مثلث کے لیے مثلث عدم مساوات مطمئن ہونا ضروری ہے اور p دو o کا نقطہ ہے اور ہمارے یہاں یہ مثلث ایک p تو یہ انتفاضہ
دو سے سختی سے کم ہونا چاہیے r ایک جمع r دو o ایک d چونکہ مثلث عدم مساوات کو مطمئن کرنا ضروری ہے یہ درست ہونا چاہیے کہ
ورنہ دوسری طرف ہمارے پاس مثلث نہیں ہو سکتا اگر ہم جانتے ہیں کہ اگر ہمارے پاس ہے
تو یہ ایک چیز ہے دوسری چیز یہ ہے کہ یہ ایک شرط ہے جو ہمیں مثلث عدم مساوات کی وجہ سے حاصل ہوتی ہے لیکن یہ صرف ایک وقت ہے
ایک کو بائیں جانب رکھتے ہیں اور ہم r کیونکہ مکمل طور پر تین عدم مساوات ہوں گی۔ دوسری آہ مثلثی عدم مساوات اس وقت ہوتی ہے جب ہم
ایک r دو اب اس صورت میں چونکہ عمومیت کے نقصان کے بغیر r ایک مائنس r دو r دو جمع do one o ایک کم ہے r کہتے ہیں کہ
دو سے بڑا ہے r
ایک ہے r تو یہ اس کے مطلق فرق کے سوا کچھ نہیں ہے کیونکہ
دو سے بڑا ہے لہذا یہ آہ دوسری مثلث عدم مساوات اس پر دلالت کرتی ہے اور تیسری مثلثی عدم مساوات ہمیں r ایک r تو یہ سچ ہے کیونکہ
دو کے برابر ہے r ایک r ایک سے کم ہے جو بہرحال درست ہے کیونکہ r دو ایک دو جمع r کچھ معنی خیز نہیں دے گی کیونکہ تیسرا ہو گا
اور دونوں مراکز کے درمیان فاصلہ مثبت ہے لہذا اس سے ہمیں کوئی مطلب نہیں ملے گا۔ gful
تو ہم نے جو دیکھا وہ یہ تھا کہ اگر یہاں اس مساوات کے اس مثلث کا دائیں ہاتھ کی طرف ہے اگر مطلق قدر ایک سے کم ہے
تو ہم نے دلیل دی کہ تقطیع کے دو نقطے ہوں گے اور پھر ہم نے یہ بھی دکھایا کہ ہم استعمال کرتے ہوئے ظاہر کیا کہ یہ مساوات پہلی شکل میں
قانون سے مطابقت رکھتی ہے اور پھر اس مثلث پر تکونی عدم مساوات کا اطلاق کرتے ہوئے ہم نے cosine مثلث میں سے کسی ایک کے لیے
یہ ظاہر کیا کہ اگر دونوں دائرے دو نقطوں پر آپس میں ملتے ہیں
تو ان دونوں شرائط کا پورا ہونا ضروری ہے۔ سچ ہے
تو ہم نے صرف ایک راستہ کا مطلب دکھایا ہے کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو آپس میں ملا دیں
تو ان دونوں کو مطمئن کرنا چاہیے لیکن اس کے برعکس بھی درست ہے کیونکہ اگر یہ دونوں شرائط پوری ہو جائیں
دو سے بڑا ہے اور مراکز کے درمیان فاصلہ مثبت ہے اور اس وجہ سے ہمارے پاس r ایک r تو یہ تیسری شرط بہرحال درست ہے کیونکہ
دو جو مطمئن ہو تینوں تکونی عدم مساوات اور اس لیے ان کو چاہیے کہ کوئی بھی o دو اور کرتے ہیں ایک r ایک r تین نمبر تین مثبت نمبر ہیں
کو اس کی طرف کر سکتا ہے اور پھر ہم صرف دلیل کو پیچھے کی طرف لے جا o 2 کے ساتھ ایک مثلث بنا سکتا ہے اور r 1 r 2 1 ہمیشہ
سکتے ہیں اور اگر ہم دلیل کو پیچھے کی طرف لے جائیں
پر ایک دوسرے کو کاٹیں گے p تو یہ بہت مشکل نہیں ہے۔ ظاہر کریں کہ وہ دو مثلث میں ہیں ایک دوسرے کو کاٹیں گے اور وہ بالکل اس نقطہ
دو اس تکون کی عدم مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک مثلث کا اپنے دو عمودی خطوط کے o ایک d دو اور r ایک r کیونکہ چونکہ یہ تین اعداد
دو کچھ نہیں ہے مگر دو مراکز کے درمیان ایک فاصلہ ہے دائیں o ایک d کے طور پر موجود ہونا ضروری ہے۔ دو کیونکہ o ساتھ ایک اور
ہے لہٰذا یہ چوٹی دوسرے دائرے پر پڑے کیونکہ دوسرے دائرے کا دوسرا رداس r2 سے فاصلہ o2 طرف اور ایک اور چوٹی کے ساتھ جس کا
r دو ہے لہذا اس نقطہ کو ہمیں اس دائرے پر لیٹنا چاہیے اور اسی طرح چونکہ یہ دوسری تیسری لمبائی p r ہے اور اس کا فاصلہ نقطہ r2
کا ایک ہی ورٹیکس بھی پہلے دائرے پر لیٹنا چاہیے اور اس لیے چونکہ یہ دونوں دائروں پر واقع ہے اس کو تقطیع کا ایک نقطہ p ایک ہے اس مثلث
ہونا چاہئے لہذا میں ایک بار پھر آہ کو دوسری دلیل دہراتا ہوں لہذا ہم نے سب سے پہلے جو دکھایا وہ یہ تھا کہ تکونی عدم مساوات کا استعمال
کرتے ہوئے ہم نے دکھایا کہ آہ اس شرط کا مطلب ہے کہ یہ دونوں لازمی ہیں۔ پکڑو اب ہم پسماندہ دلیل کو دکھائیں گے کہ اگر ہمیں صرف یہ دو
شرطیں دی جائیں
تو یہ دونوں شرطیں بھی اس بات پر دلالت کریں گی کہ دو دائرے ایک دوسرے کو ایک دوسرے سے ملا دیں گے اس لیے کہ ہمیں یہ دو شرائط دی
گئی ہیں یہ شرط بہرحال درست ہے کیونکہ r ایک r برابر ہے r 2 کے برابر ہے r 1 r 2 اور مرکز کے سے بڑا یا مساوی ہے

Prutor@IITK

شرط کے سوا کچھ نہیں ہے بلکہ یہ تینوں مساواتیں لگتی c درمیان فاصلہ مثبت ہے اب ان تینوں شرائط کو دیکھتے ہوئے ہم سمجھتے ہیں کہ یہ ہیں تکونی عدم مساوات کی
دو کرتے ہیں جو تکونی عدم مساوات کو پورا o دو اور ایک r ایک r تو ہمارے پاس بنیادی طور پر مثبت نمبروں کے ساتھ تین نمبر ہوتے ہیں o ایک d دو کریں اب o دو ہے اور ایک r one r one r ایک مثلث بنائیں جس کے اطراف کی لمبائی t o کرتے ہیں اور اس لیے ہمیں دو دو مراکز کے درمیان فاصلہ کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا ہم اس مثلث کے عمودی حصوں میں سے دو کا انتخاب کرتے ہیں جن کو ہم بنا رہے ہیں۔
دو کے فاصلے پر r ایک اور او دو اور تیسرا ورٹیکس ہم اسے ایک نقطہ کے طور پر منتخب کر سکتے ہیں جو دوسرے دائرے کے مرکز سے ہے اور اس لیے یہ نقطہ r 2 ایک کے فاصلے پر ہے لیکن پھر ہم جان لیں کہ دوسرے دائرے کا رداس r اور پہلے سرکٹ کے مرکز سے ہے اس لیے یہ نقطہ بھی منبع دائرے پر ہونا چاہیے اور r 1 دوسرے دائرے پر ہونا چاہیے اسی طرح ہم جانتے ہیں کہ پہلے دائرے کا رداس چونکہ یہ آن ہے۔ دونوں دائرے یہ ہونا چاہیے کہ وہ ایک دوسرے کو آپس میں جوڑ رہے ہیں جس کا مطلب ہے کہ دو دائرے ایک دوسرے کو آپس میں جوڑ رہے ہیں اس لیے ہم نے اب تک اس لیکچر میں جو کچھ دکھایا ہے وہ یہ ہے کہ اگر دو دائرے دو نقطوں پر آپس میں ملتے ہیں کے حل یا دو الگ الگ حل جو تبھی ہوں گے جب اس دائیں ہاتھ کی phi تو میرا کہنے کا مطلب یہ ہے کہ اگر دو الگ ہیں اس مساوات کے مطلق قدر ایک سے کم ہو
کے حل جس کا بنیادی phi تو اگر ہم اس شرط کو فرض کریں کہ اگر یہاں دائیں ہاتھ کی مطلق قدر ایک سے کم ہے جس میں دو الگ الگ ہیں مطلب یہ ہے کہ ہم یہ فرض کر رہے ہیں کہ دو دائرے دو مختلف نقطوں پر آپس میں ملتے ہیں لہذا اگر دو دائرے دو مختلف نقطوں پر آپس میں ملتے ہیں
تو اگر ہم یہ فرض کریں کہ دو دائرے دو مختلف نقطوں پر آپس میں ملتے ہیں
تو یہاں سے شروع ہو کر تکونی عدم مساوات کا استعمال کیا جائے۔ ہم نے یہ دکھایا ہے کہ دونوں مراکز کے درمیان فاصلہ رداس کے مجموعے سے سختی سے کم ہونا چاہیے اور یہ بھی کہ مراکز کے درمیان فاصلہ دو رداس کے درمیان قطعی فرق سے سختی سے زیادہ ہونا چاہیے اور پھر اس کے بعد ہم نے یہ بھی دکھایا کہ ہم معکوس دلیل بھی دکھائی ہم نے دکھایا کہ اگر ہم شروع کرتے ہیں
دو سے کم ہیں اور یہ دونوں رداس کے درمیان r ایک جمع r تو اگر ہم اس مفروضے کے ساتھ شروع کرتے ہیں کہ فاصلہ شرط ہے دو دائرے مطلق فرق سے زیادہ ہے اگر ہم اس مفروضے کے ساتھ شروع کریں
تو ہم نے یہ بھی ظاہر کیا کہ ہم نے دلیل دی کہ یہ ہونا چاہیے اور شاید پہلے 15-20 منٹ میں اگلے لیکچر میں ہمیں بقیہ دلیل کو ختم کرنے کے قابل ہونا چاہئے تاکہ بقیہ کیسز بنیادی طور پر وہ کیسز ہیں جہاں ہمارے پاس مطلق قدر ایک کے برابر ہے یا مطلق قدر ایک سے زیادہ ہے مثال کے طور پر ہم ان کو لیں گے۔ کیسز اگلے لیکچر میں اس لیے ختم کر دیں گے کہ اگلے لیکچر کے پہلے 15 20 منٹ اور اگلے لیکچر کے بقیہ حصے میں حلقہ احباب پر ایک نئے موضوع کا آغاز کریں گے شکریہ

Prutor@IITK